УДК 517.988.63

©2009 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Отримано нові умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь із використанням локальної лінійної апроксимації цих рівнянь.

We obtain new conditions for the existence of bounded solutions of nonlinear difference equations with the application of local linear approach of this equations.

1. Основний об'єкт досліджень.

Нехай E – скінченновимірний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, X і Y – довільні банахові простори і $L(X,Y)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Позначимо через $l_\infty(\mathbb{Z},X)$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \in X$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},X)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_X.$$

Розглянемо різницеві оператори $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і визначаються формулами

$$(\mathcal{F}\mathbf{x})_n = x_n + f_{n-1}(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}) \qquad (1)$$

і

$$(\mathcal{G}\mathbf{x})_n = x_n + g(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}), \qquad (2)$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, відображення $f_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, і $g : E^p \to E$ неперервні і для кожного $r \in (0,+\infty)$

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le r \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le r}} \|f_n(x_1,\ldots,x_p)\|_E < +\infty. \qquad (3)$$

Метою цієї статті є з'ясування умов, коли множини значень $R(\mathcal{F})$ і $R(\mathcal{G})$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ збігаються з $l_\infty(\mathbb{Z},E)$. Зазначимо, що така задача для нелінійних різницевих рівнянь є складною проблемою (див., наприклад, [1-8]), яку розв'язати важко. Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношень $R(\mathcal{F}) = l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і $R(\mathcal{G}) = l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цих співвідношень.

В основу досліджень операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ в цій статті покладено метод, що використовує локальну лінійну апроксимацію цих операторів.

2. Формулювання основних результатів.

Нехай $\sigma(A)$ – спектр $A \in L(E,E)$ і $\mathcal{E}_1$ – множина елементів $\mathbf{A} = ((A_{n,1},\ldots,A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $l_\infty(\mathbb{Z}, L^p(E,E))$, де

$$L^p(E,E) = \underbrace{L(E,E)\times\ldots\times L(E,E)}_{p \text{ разів}},$$

для кожного з яких оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A}$, що діє в просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і визначається формулою

$$(\mathcal{L}_\mathbf{A}\mathbf{x})_n = x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_{n-k}, \; n \in \mathbb{Z}, \qquad (4)$$

має обернений неперервний оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}$. Позначимо через $\mathcal{E}_2$ множину таких елементів $B = (B_1,\ldots,B_p) \in L^p(E,E)$, що

$$-1 \notin \left\{ \sigma\left(\sum_{k=1}^{p} z^k B_k\right) : |z| = 1 \right\}.$$

Для кожного такого елемента оператор $\mathcal{L}_B : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_B\mathbf{x})_n = x_n + \sum_{k=1}^{p} B_k x_{n-k},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

має обернений неперервний оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$ [9].

Основними в статті є наступні два твердження.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, що*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \|x_1\|_E\le r\\ \vdots\\ \|x_p\|_E\le r}} \left\| f_n(x_1,\ldots,x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_k \right\|_E \le$$

$$\le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H. \tag{6}$$

Тоді для кожного $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ рівняння

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{h} \tag{7}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$.

Окремим випадком цієї теореми є

Теорема 2. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $B = (B_1, \ldots, B_p) \in \mathcal{E}_2$, що*

$$\max_{\substack{\|x_1\|_E\le r\\ \vdots\\ \|x_p\|_E\le r}} \left\| g(x_1,\ldots,x_p) - \sum_{k=1}^{p} B_k x_k \right\|_E \le$$

$$\le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_B^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H. \tag{8}$$

Тоді для кожного $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ рівняння

$$\mathcal{G}\mathbf{x} = \mathbf{h} \tag{9}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$.

Ці теореми покладено в основу методу, за допомогою якого з'ясовуються умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь. Ми доведемо ці твердження, використавши ряд допоміжних результатів.

Зазначимо, що при використанні на практиці теорем 1 і 2 потрібно знати норми операторів $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$ і $\mathcal{L}_B^{-1}$. Тому наведемо деяку інформацію про ці оператори. Нагадаємо, що оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$, який розглядається в теоремі 1, можна подати рівністю

$$\left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{h}\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m}h_m,$$

в якій для $G_{n,m} \in L(E,E)$, $n,m \in \mathbb{Z}$, виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)} < +\infty$$

(див., наприклад, [10,11]). Отже, для норми оператора $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$ справджується оцінка

$$\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)},$$

яку можна використати в (6). Оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$, що розглядається в теоремі 2, також подається за допомогою аналогічної рівності

$$\left(\mathcal{L}_B^{-1}\mathbf{h}\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n-m}h_m,$$

в якій для $G_m \in L(E,E)$, $m \in \mathbb{Z}$, виконується співвідношення

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_m\|_{L(E,E)} < +\infty \ [9].$$

3. Допоміжні твердження.

Наведемо ряд результатів про c-неперервні оператори, потрібні для доведення теорем 1 и 2.

Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m \in \mathbb{Z}$, лінійний неперервний оператор, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і визначається рівність

$$(\mathcal{P}_m\mathbf{x})(n) = \begin{cases} x_n, & \text{якщо } |n| \le m, \\ 0, & \text{якщо } |n| > m. \end{cases} \tag{10}$$

Послідовність $(\mathbf{x}_k)_{k\ge1}$ елементів простору $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x_k} \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathbf{x} \text{ при } k \to \infty,$$

якщо

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_k\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} < +\infty$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_m(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0$$

для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \longrightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і $\mathbf{x_k} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathbf{x} \text{ при } k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathcal{H}\mathbf{x} \text{ при } k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора (на мові "ε, δ") уведено в розгляд Е. Мухамадієвим [12]. Вивчення цих понять було продовжено в [13]–[19] та інших роботах. Визначення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано автором (див., наприклад, [20,21]).

Прикладами c-неперервних операторів є оператори $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}_\mathbf{A}$, $\mathcal{L}_B$ і $\mathcal{P}_m$, що визначаються відповідно рівностями (1), (2), (4), (5) і (10).

Легко перевірити, що якщо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ – c-неперервні оператори, то для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ оператори $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$ і $\mathcal{AB}$ також є c-неперервними. Також легко перевірити, що якщо збіжна послідовність $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 1}$ c-неперервних елементів простору $L(l_\infty(\mathbb{Z}, E), l_\infty(\mathbb{Z}, E))$ збігається до оператора $\mathcal{A} \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, E), l_\infty(\mathbb{Z}, E))$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} = 0,$$

то оператор $\mathcal{A}$ є c-неперервним. Отже, множина $\mathfrak{A}$ всіх c-неперервних елементів банахової алгебри $L(l_\infty(\mathbb{Z}, E), l_\infty(\mathbb{Z}, E))$ є банаховою підалгеброю цієї алгебри.

Важливими для подальшого є наступні два твердження про c-неперервні оператори.

Теорема 3 ([11,13]). *Нехай лінійний неперервний і c-неперервний оператор $\mathcal{A} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тоді оператор $\mathcal{A}^{-1}$ є c-неперервним.*

Теорема 4 ([8]). *Нехай $\mathcal{B}$ – замкнута куля з центром у точці 0 у банаховому просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і оператор $\mathfrak{C} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ є c-неперервним. Тоді $\mathfrak{C}$ має нерухому точку.*

Зауважимо, що в силу теореми 3 підалгебра $\mathfrak{A}$ алгебри $L(l_\infty(\mathbb{Z}, E), l_\infty(\mathbb{Z}, E))$ є наповненою [22].

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, потрібно мати на увазі, що ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає із c-неперервності (див. [6]).

4. Доведення теорем 1 і 2.

Розглянемо в просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ замкнену кулю $\mathcal{B}_R = \{x : \|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \leq R\}$ радіуса R з центром у точці 0.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 1. *Нехай для деяких чисел $H > 0$, $r > 0$ і елемента $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1$ справджується нерівність (6) і $\mathbf{h} \in \mathcal{B}_H$.*

Тоді рівняння (7) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E) \cap \mathcal{B}_r$.

Доведення. Подамо рівняння (7) у вигляді

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n-k}x_{n-k} = \\ = \sum_{k=1}^{p} A_{n-k}x_{n-k} - f_n(x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}) + \\ +h_n,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

і розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{W}$, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і визначається формулою

$$(\mathcal{W}\mathbf{x})_n = \\ = \sum_{k=1}^{p} A_{n-k}x_{n-k} - f_n(x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}) + \\ +h_n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, що визначається рівністю (4), має неперервний обернений $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$, то рівняння (11) можна подати у вигляді

$$x_n = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\mathbf{x}\right)_n, \; n \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$

Оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ на підставі теореми 3 є c-неперервним. Тому завдяки c-неперервності оператора $\mathcal{W}$ оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}$ також буде c-неперервним.

Також виконується співвідношення

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\,\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r.$$

Справді, позначимо

$$a = \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}$$

і

$$b = \sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le r \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le r}} \left\| f_n(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_k \right\|_E .$$

Тоді, якщо

$$\|\mathbf{y}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le r \;\; \text{і} \;\; \|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le H,$$

то згідно з нерівністю (6)

$$\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\mathbf{y}\right\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le$$

$$\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathcal{W}\mathbf{y}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le$$

$$\le a(b + \|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}) \le$$

$$\le a\left(\frac{r}{a} - H + \|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}\right) \le r.$$

Тому завдяки теоремі 4 рівняння (12) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}_r$. На підставі рівносильності рівнянь (12) і (11)

$$x_n^* + f_n(x_{n-1}^*, \ldots, x_{n-p}^*) \equiv h_n.$$

Отже, рівняння (7) має розв'язок $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_r$.

Лему 1 доведено.

Аналогічним чином доводиться

Лема 2. *Нехай для деяких чисел $H > 0$, $r > 0$ і елемента $B \in \mathcal{E}_2$ справджується нерівність (8) і $\mathbf{h} \in \mathcal{B}_H$.*

Тоді рівняння (9) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r$.

Очевидно, що твердження теорем 1 і 2 є наслідками лем 1 і 2.

Зауважимо, що виконання умов теорем 1 і 2 недостатньо для єдиності розв'язків рівнянь (7) і (9).

5. Застосування основних теорем.

Наведемо застосування теорем 1 і 2 до дослідження лінійних і нелінійних різницевих рівнянь.

5.1. Випадок лінійних різницевих рівнянь. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{Q} = ((Q_{n,1}, \ldots, (Q_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, L^p(E, E))$. Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} Q_{n,k}x_{n-k} = h_n,$$

де $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, та відповідний різницевий оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}\mathbf{x})_n = x_n + \sum_{k=1}^{p} Q_{n,k}x_{n-k}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 5. *Для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і послідовність $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, що*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le r \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le r}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k})x_k \right\|_E \le$$

$$\le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H, \qquad (13)$$

тоді і тільки тоді, коли різницевий оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має обернений неперервний оператор.

Очевидно, що нерівність (13) рівносильна нерівності

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le 1 \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le 1}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k})x_k \right\|_E \le$$

$$\leq \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - \frac{H}{r}. \tag{14}$$

Тут і в теоремі 5 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ – оператор, що визначається рівністю (4).

Доведення. Необхідність. Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1$, що виконується нерівність (13). Тоді в силу теореми 1 для оператора $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ виконується співвідношення

$$R(\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}) = l_\infty(\mathbb{Z}, E). \tag{15}$$

Покажемо, що

$$\ker \mathcal{L}_{\mathbf{Q}} = \{0\}, \tag{16}$$

тобто що різницеве рівняння

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} Q_{n,k} x_{n-k} = 0 \tag{17}$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок. Подамо це рівняння у вигляді

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n,k} x_{n-k} = \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k} - Q_{n,k}) x_{n-k}.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ має неперервний обернений, то в просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ рівняння (17) рівносильне рівнянню

$$x_n = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{z}\right)_n, \tag{18}$$

де

$$\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

і

$$z_n = \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k} - Q_{n,k}) x_{n-k}.$$

Нехай $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ – обмежений розв'язок рівняння (18), тобто

$$x_n^* \equiv \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{z}^*\right)_n, \tag{19}$$

де

$$\mathbf{z}^* = (z_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$$

і

$$z_n^* = \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k} - Q_{n,k}) x_{n-k}^*. \tag{20}$$

Оскільки на підставі (14) і (20)

$$\|\mathbf{z}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k} - Q_{n,k}) x_{n-k}^* \right\|_E \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E \leq 1 \\ \vdots \\ \|x_p\|_E \leq 1}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k} - Q_{n,k}) x_k \right\|_E \|x^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - \frac{H}{r} \right) \|x^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)},$$

то завдяки (19)

$$\|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{z}^*\right\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \leq$$

$$\leq \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathbf{z}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{H}{r} \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}\right) \|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}.$$

Звідси та з того, що

$$0 \leq 1 - \frac{H}{r} \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} < 1,$$

випливає рівність

$$\|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0,$$

тобто співвідношення (16) виконується. Отже, з рівності (15) і теореми Банаха про обернений оператор [23] випливає, що оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має неперервний обернений.

Достатність. Нехай оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має неперервний обернений. Тоді $\mathbf{Q}$ є елементом множини $\mathcal{E}_1$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H > 0.$$

Поклавши $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$, отримаємо нерівність (13).

Теорему 5 доведено.

Наслідок 1. *Різницевий оператор* $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ *має обернений неперервний оператор* $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}^{-1}$

тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, (A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$ *, для якого*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le 1 \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le 1}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k}) x_k \right\|_E <$$

$$< \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}}. \qquad (21)$$

Доведення. Нехай для деякого елемента $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$ виконується нерівність (21). Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} -$$

$$- \sup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \|x_1\|_E\le 1 \\ \vdots \\ \|x_p\|_E\le 1}} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k}) x_k \right\|_E > \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватиметься нерівність (14) і, отже, нерівність (13). Тому за теоремою 5 оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має обернений неперервний оператор.

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має обернений неперервний оператор, то на підставі теореми 5 для кожного $H > 0$ існують $r > 0$ і $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, для яких виконуватиметься нерівність (13) і, отже, нерівність (14). Із (14) випливає (21).

Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. *Різницевий оператор* $\mathcal{L}_A$ *, що визначається рівністю*

$$(\mathcal{L}_A \mathbf{x})_n = x_n + A x_{n-1},$$

де $A \in L(E, E)$ *, має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли існує елемент* $B \in \mathcal{E}_2$ *, для якого*

$$\|A - B\|_{L(E,E)} < \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_B^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}}.$$

У цьому твердженні $\mathcal{L}_B^{-1}$ – оператор, що визначається рівністю (5), в якій $p = 1$ і $B_1 = B$.

Зазначимо, що наведені умови оборотності різницевих операторів є новими.

5.2. Малі на нескінченності збурення лінійних різницевих рівнянь.

Наведемо ще одне твердження, яке можна отримати за допомогою теореми 1.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n,k} x_{n-k} +$$

$$+ f_n(x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}) = h_n, \qquad (22)$$

де $((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, L^p(E, E))$, $f_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, – неперервні відображення, що задовольняють співвідношення (3), і $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Використаємо лінійний оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, що визначається формулою (4).

Окремим випадком теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай оператор* $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ *має неперервний обернений* $(\mathcal{L}_{\mathbf{A}})^{-1}$ *і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_i\|_E\le r,\ i=\overline{1,p}} \|f_n(x_1, \ldots, x_p)\|_E}{r} <$$

$$< \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}}. \qquad (23)$$

Тоді рівняння (22) *для кожної послідовності* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ *має хоча б один розв'язок* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Справді, завдяки умовам теореми для кожного числа $H > 0$ існує таке число $r > 0$, що виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_i\|_E\le r,\ i=\overline{1,p}} \|f_n(x_1, \ldots, x_p)\|_E \le$$

$$\le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H,$$

аналогічне нерівності (6). Тому на підставі теореми 1 справджується твердження теореми 6.

Наслідок 3. *Нехай оператор* $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ *має неперервний обернений оператор* $(\mathcal{L}_{\mathbf{A}})^{-1}$ *і* $f_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, *– неперервні відображення, для яких*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ (x_1,\ldots,x_p)\in E^p} \|f_n(x_1,\ldots,x_p)\|_E < +\infty.$$

Тоді різницеве рівняння (22) *для кожної послідовності* $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ *має хоча б один розв'язок* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$.

Зауважимо, що в теоремі 6 нерівність (23) не можна покращити навіть у випадку лінійного різницевого рівняння (22). Також у цьому рівнянні неперервні відображення $f_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, можуть бути такими, що c-неперервний оператор

$$(F\mathbf{x})_n = f_n(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

є розривним у кожній точці простору $l_\infty(\mathbb{Z},E)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.

2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 1972. – 246 с.

3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев.: Наукова думка, 1986. – 280 с.

4. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев.: Вища школа, 1992. – 319 с.

5. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах // Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. – 2008. – Т. 72. – 496 с.

6. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Національний ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.

7. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660–662.

8. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів у просторах обмежених на зліченній групі функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 105–108.

9. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве // Доклады АН УССР. – 1975. – серия А, № 6. – С. 503–509.

10. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 210–215.

11. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 109–115.

12. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.

13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Матем. сб. – 1981. – **116**(158), № 4(12). – С. 483–501.

14. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Доклады АН УССР. – 1981. – сер.А, № 8. – С. 34–37.

15. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Матем. сб. – 1986. – **130**(172), № 1(5). – С. 86–104.

16. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.

17. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201–205.

18. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.

19. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.– Ин-т математики АН Украины, Киев. 1993. – 255 с.

20. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе. – 1987. – С. 102–103.

21. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Математическая физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 15(49). – С. 32–35.

22. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. – М.: Мир, 1972. – 183 с.

23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.