УДК 517.51

© 2009 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДЕЯКІ КОМУТАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЗСУВУ

Одержано зображення лінійних неперервних операторів, які діють у просторах многочленів і комутують з операторами, породженими узагальненими зсувами.

A representation for linear continuous operators which act in the spaces of polynomials and commute with operators generated by generalized shifts is obtained.

Оператори зсуву відіграють важливу роль у різних питаннях сучасної математики. Нехай h – фіксоване комплексне число. Оператор зсуву E_h лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій A_∞ за правилом:

$$(E_h f)(z) = f(z+h).$$

При вивченні різних властивостей операторів зсуву природним чином виникла задача про опис комутантів таких операторів. Один із перших результатів у цьому напрямку наведений в [1]. Тут доведено, що лінійний оператор T, який діє в просторі многочленів S над полем комплексних чисел, є переставним з довільним оператором зсуву тоді і тільки тоді, коли він переставний з оператором диференціювання, тобто подається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами виду

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z),$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел.

В [2] описано комутант фіксованого оператора зсуву в певних просторах формальних степеневих рядів, які наділені нормальною топологією Кете. Зокрема, в [2] встановлено, що лінійний неперервний оператор T, що діє в просторі цілих функцій, який наділений топологією компактної збіжності, буде переставним з фіксованим оператором зсуву E_h тоді і тільки тоді, коли він подається у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z),$$

де $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність цілих функцій, які періодичні з періодом h і задовольняють умову:

$$\forall r < \infty \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! \max_{|z|\le r} |\psi_n(z)|} < \infty.$$

В праці [3] при дослідженні умов повноти в просторі цілих функцій системи узагальнених похідних В.П. Громовим були введені оператори узагальненого зсуву T_h. В [4] одержано зображення лінійних неперервних операторів, які діють у просторі многочленів і комутують з оператором узагальненого зсуву. В [5] описано комутант лінійної комбінації операторів звичайного зсуву в класі лінійних неперевних операторів, що діють у просторах цілих функцій. В цій статті вивчається комутант суми операторів різних узагальнених зсувів. Зауважимо, що в [9] анонсовані деякі результати даної роботи.

Через S позначатимемо лінійний простір усіх многочленів над полем комплексних чисел, а через $\mathcal{L}(S)$ – множину всіх лінійних операторів, які діють в S. Для фіксованої послідовності ненульових комплексних чисел $\{\alpha_n : n \ge 0\}$ через D_α позначатимемо оператор узагальненого диференціювання, який діє на многочлен $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n$

за правилом:

$$(D_\alpha P)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}z^{n-1}.$$

Відомо, що оператор $T\in\ \mathcal{L}\ (S)$ є переставним з оператором D_α тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно D_α, тобто у вигляді

$$(TP)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(D_\alpha^kP)(z), \tag{1}$$

де $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ – деяка послідовність комплексних чисел [6].

Для довільного ненульового комплексного числа h оператор узагальненого зсуву T_h, що відповідає оператору D_α, лінійно діє в просторі S за правилом:

$$(T_hP)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kh^k(D_\alpha^kP)(z).$$

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Теорема 1. *Нехай D_α – деякий оператор узагальненого диференціювання і $A=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kD_\alpha^k$, де $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ – деяка послідовність комплексних чисел, причому $a_1\neq 0$. Для того, щоб оператор $T\in\mathcal{L}(S)$ був переставним з оператором A необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами* (1).

Доведення. Необхідність. Оскільки $a_1\neq 0$, то ядро оператора A складається з множини многочленів нульового степеня. Нехай оператор $T\in\mathcal{L}(S)$ і є переставним з A, тобто виконується рівність:

$$TA=AT. \tag{2}$$

Як доведено в [7], кожен лінійний оператор з класу $\mathcal{L}\ (S)$ можна подати у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку із змінними коефіцієнтами. Тому

$$(TP)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(z)(D_\alpha^kP)(z), \tag{3}$$

де $\{\psi_k(z):k=0,1,...\}$ – деяка послідовність многочленів. Індукцією по k доведемо, що кожен з многочленів $\psi_k(z)$ є сталою величиною.

Подіявши рівністю (2) на многочлен $P(z)\equiv 1$, одержимо, що $A(T1)=0$. Тому $T1=c_0$, де c_0 – деяке комплексне число. Отже, в зображенні (3) $\psi_0(z)=c_0$.

Припустимо, що многочлени $\psi_0(z),\psi_1(z),...,\psi_{n-1}(z)$ в зображенні (3) є сталими, тобто $\psi_k(z)=c_k, k=0,1,...,n-1$. Доведемо, що тоді многочлен $\psi_n(z)$ також буде сталою величиною.

Позначимо через B оператор виду $B=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi_k(z)D_\alpha^k$. Тоді, враховуючи індуктивне допущення, одержимо що $T=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kD_\alpha^k+B$. Оскільки кожні два диференціальні оператори нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами є переставними, то з останньої рівності та (2) випливає, що оператор B буде також переставним з оператором A, тобто

$$BA=AB. \tag{4}$$

Подіємо рівністю (4) на многочлен $P(z)=z^n$. Оскільки Az^n є многочленом $(n-1)$-го степеня, то $(BA)(z^n)=0$. Тому $(AB)(z^n)=0$ і, отже, $Bz^n=\tilde{c}_n$, де $\tilde{c}_n$ – деяке комплексне число. З іншого боку $Bz^n=\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\psi_n(z)$. Тому $\psi_n(z)=\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\tilde{c}_n$. Отже, $\psi_n(z)=const$. Позначаючи $\psi_n(z)=c_n$, $n=0,1,\ldots$, одержимо, що T подається у вигляді (1).

Достатність умов теореми є очевидною, оскільки кожні два диференціальні оператори нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами є переставними між собою.

З теореми 1 випливає наступне твердження (див. [4]).

Наслідок. *Нехай h – фіксоване ненульове комплексне число. Для того щоб оператор $T\in\ \mathcal{L}\ (S)$ був переставним з оператором T_h, необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами* (1).

Нехай h_1 і h_2 – довільні комплексні числа. Тоді

$$T_{h_1} + T_{h_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (h_1^k + h_2^k) D_\alpha^k.$$

Використовуючи теорему 1, одержуємо, що є правильним наступне твердження

Теорема 2. *Нехай $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$, причому $h_1 + h_2 \neq 0$. Тоді оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ комутує з оператором $T_{h_1} + T_{h_2}$ в $\mathcal{L}(S)$ тоді і тільки тоді, коли він подається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку (1), де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільна послідовність комплексних чисел.*

Якщо $h_1 + h_2 = 0$, то $T_{h_1} + T_{h_2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2\alpha_{2k} h_1^{2k} D_\alpha^{2k}$ і для опису комутанта цього оператора доведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема. *Нехай $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ – довільна фіксована послідовність комплексних чисел і $C = D_\alpha^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k D_\alpha^{2k+2}$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ був переставним з оператором C необхідно і достатньо, щоб T був переставним з D_α^2.*

Доведення. Необхідність. Нехай $T \in \mathcal{L}(S)$ і комутує з оператором C, тобто

$$TC = CT. \tag{5}$$

Подамо оператор C у вигляді $C = D_\alpha^2 a(D_\alpha)$, де $a(D_\alpha) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k D_\alpha^{2k}$. За лемою 1 [8] оператор $a(D_\alpha)$ є ізоморфізмом простору S. З рівності (5) випливає, що $TC^n = C^n T$ для кожного натурального n, тобто

$$T[a(D_\alpha)]^n D_\alpha^{2n} = [a(D_\alpha)]^n D_\alpha^{2n} T.$$

Подіявши цією рівністю на многочлени z^{2n-2} та z^{2n-1} і скориставшись тим, що оператор $[a(D_\alpha)]^n$ є ізоморфізмом простору S, одержимо, що

$$D_\alpha^{2n}\left(Tz^{2n-2}\right) = 0 \text{ і } D_\alpha^{2n}\left(Tz^{2n-1}\right) = 0.$$

Тому степінь кожного з многочленів Tz^{2n-2} і Tz^{2n-1} не перевищує $2n-1$. Через S_{2n-1} позначимо підпростір простору многочленів, який складається з усіх многочленів над полем комплексних чисел, степені яких не перевищують $2n-1$. З доведеного вище випливає що кожен з підпросторів S_{2n-1}, $n = 1, 2, \ldots$, є інваріантним відносно оператора T, а також, очевидно, і відносно оператора D_α^2.

Доведемо далі, що для кожного натурального n і довільного многочлена $P(z) \in S_{2n-1}$ виконується рівність

$$(TD_\alpha^2 P)(z) = (D_\alpha^2 TP)(z). \tag{6}$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Це твердження є правильним для $n = 1$, оскільки за доведеним вище $TS_1 \subset S_1$. Допустимо, що рівність (6) є правильною для кожного многочлена $P(z)$ з підпростору S_{2n-1} і доведемо, що вона буде виконуватися для довільного многочлена $P(z)$ з підпростору S_{2n+1}. Нехай $P(z) \in S_{2n+1}$. Подіявши рівністю (5) на $P(z)$, одержимо що

$$\left(Ta(D_\alpha)D_\alpha^2 P\right)(z) = \left(a(D_\alpha)D_\alpha^2 TP\right)(z). \tag{7}$$

Але $Q(z) = D_\alpha^2 P(z) \in S_{2n-1}$, тому за індуктивним допущенням $TD_\alpha^2 Q(z) = D_\alpha^2 TQ(z)$ і значить $(Ta(D_\alpha)Q)(z) = (a(D_\alpha)TQ)(z)$, бо $a(D_\alpha) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k D_\alpha^{2k}$. Таким чином, з рівності (7) випливає, що $(a(D_\alpha)TD_\alpha^2 P)(z) = (a(D_\alpha)D_\alpha^2 TP)(z)$. Оскільки $a(D_\alpha)$ є ізоморфізмом простору S, то з останньої рівності одержуємо, що співвідношення (6) виконується для довільного многочлена $P(z) \in S_{2n+1}$.

Звідси випливає, що рівність (6) виконується для довільного многочлена $P(z) \in S$, і тому оператор T переставний з D_α^2 в S. Необхідність умови леми доведено, а її достатність є очевидною.

Наведемо зображення комутанта оператора D_α^2 в класі операторів $\mathcal{L}(S)$ (див.[7]). Через $\mathcal{J}_\alpha$ позначатимемо оператор узагальненого інтегрування, що породжений послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ і діє на многочлен $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n$ за правилом: $(\mathcal{J}_\alpha P)(z) =$

$\sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} p_n z^{n+1}$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}\,(S)$ був переставним з оператором D_α^2 в S необхідно і достатньо, щоб T подавався у вигляді

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_\alpha^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n D_\alpha^n K + c(\mathcal{J}_\alpha + \mathcal{J}_\alpha K), \tag{8}$$

де $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільні послідовності комплексних чисел, c – довільне комплексне число, а оператор $K \in \mathcal{L}(S)$ і діє за правилом $(KP)(z) = P(-z)$. Використовуючи це твердження та лему одержуємо, що правильною є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай h – фіксоване ненульове комплексне число. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ був переставним з оператором $T_h + T_{-h}$ необхідно і достатньо щоб він подавався у вигляді (8), де $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільні послідовності комплексних чисел, а $c \in \mathbb{C}$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука,1965. – 424 с.

2. *Подпорин В.П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – 18, №6. – С. 1422-1425.

3. *Громов В.П.* О полноте систем аналитических функций в области // Мат. сб. – 1963. – Т.62,№3. – С. 320-334.

4. *Лінчук Ю.С.* Комутант оператора узагальненого зсуву // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. – 1999. – Вип 46. Математика. – С. 72 – 75.

5. *Лінчук Ю.С.* Комутанти деяких класів операторів, що пов'язані з операторами зсуву. // УМЖ. – 2007. – Т. ,№4. – С. - .

6. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 156 с.

7. *Подпорин В.П.* О решениях операторного уравнения $P_1(D)A = AP_2(D)$ в некоторых классах линейных операторов // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.240, №1. – С. 28 – 31.

8. *Лінчук Ю.С* Про еквівалентність диференціальних операторів нескінченного порядку // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 239. Математика. Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 89 – 91.

9. *Лінчук Ю.С.* Деякі властивості операторів узагальненого зсуву // Матеріали IV Всеукраїнської наукової конференції "Нелінійні проблеми аналізу". Тези доповідей (10-12 вересня). - Івано-Франківськ, 2008. - с. 53.