УДК 517.929

©2009 р. Р.І. Петришин, І.М. Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Встановлено умови існування інтегрального многовиду багаточастотної нелінійної коливної системи із запізненням, досліджено його властивості.

We find the existence conditions of the integral manifold of multifrequency nonlinear oscillating system with delays and investigated it's properties.

Метод інтегральних многовидів є досить зручним і потужним засобом у теорії диференціальних рівнянь, оскільки при дослідженні систем диференціальних рівнянь високого порядку в багатьох випадках доцільно із всієї множини розв'язків досліджуваної системи виділяти деякі її підмножини (інтегральні многовиди), які володіють певними властивостями і мають розмірність нижче порядку вихідної системи. Цей метод було поширено на різні класи диференціальних рівнянь у роботах [1 – 6].

У даній статті побудовано інтегральний многовид багаточастотної нелінійної коливної системи із запізненням і досліджено деякі його властивості.

Постановка задачі та основні припущення.

Розглянемо багаточастотну нелінійну коливну систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx}{d\tau}=a(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau)+\varepsilon A(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau,\varepsilon), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \tag{1}$$

в якій $x=x(\tau,\varepsilon)\in D\subset R^n$, $\varphi=\varphi(\tau,\varepsilon)\in R^m$, $m\geq 2$, $\tau\in R$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малий параметр, $\Delta=const>0$, $x_\Delta=x(\tau-\Delta,\varepsilon)$, $\varphi_\Delta=\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon)$, D – відкрита обмежена область. Дійсні вектор-функції a,A,b належать певним класам гладких і 2π-періодичних за змінними φ,φ_Δ функцій на множині $G=D\times D\times R^m\times R^m\times R\times(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=const$.

Побудуємо усереднену за φ,φ_Δ систему рівнянь першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\bar{a}(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau), \tag{2}$$

де

$$\bar{a}(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau)=$$
$$=(2\pi)^{-2m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}a(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau)d\varphi_1...d\varphi_{\Delta_m}.$$

Припустимо, що існує розв'язок $\bar{x}=\bar{x}(\tau)$ системи (2), який визначений на всій числовій осі і лежить в D разом із деяким своїм ρ-околом.

Зобразимо систему (1) у вигляді

$$\frac{dx}{d\tau}=\bar{a}(x,x_\Delta,\tau)+\tilde{a}(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau)+ +\varepsilon A(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau,\varepsilon), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\tilde{a}(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau)=a(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau)-\bar{a}(x,x_\Delta,\tau)$.

Вважатимемо далі, що

$$a\in C^1_{x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau}(G,\sigma_1),\ b\in C^1_{x,\varphi,\tau}(G,\sigma_1),\ A\in C^1_{x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau}(G,\sigma_1),$$

$$\sum_k\left[\|k\|\sup_G\|a_k\|+\left(\sup_G\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\right\|+ +\sup_G\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x_\Delta}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial a_k}{\partial \tau}\right\|\right)\right]\leq\sigma_1, \tag{4}$$

$$\sum_l\left[\|l\|\sup_G\|b_l\|+ +\left(\sup_G\left\|\frac{\partial b_l}{\partial x}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial b_l}{\partial \tau}\right\|\right)\right]\leq\sigma_1,$$

а $n\times 2n$ – матриця $\dfrac{\partial\bar{a}(z,\tau)}{\partial z}$, де $z=(x,x_\Delta)\in D^2$, – рівномірно неперервна на $D^2\times R$.

Тут σ_1 – деяка додатна стала; $C^1_{x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau}(G,\sigma_1)$ і $C^1_{x,\varphi,\tau}(G,\sigma_1)$ позначають множини вектор-функцій, що при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ є неперервними, мають неперервні частинні похідні першого порядку по $x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau$ і x,φ,τ відповідно, а також обмежені в G сталою σ_1 разом зі своїми частинними похідними по відповідних аргументах; $a_k=a_k(x,x_\Delta,\tau)$, $b_l=b_l(x,\tau,\varepsilon)$ – коефіцієнти розкладу функцій $a(x,x_\Delta,\Phi,\tau)$ і $b(x,\varphi,\tau)$ у ряди Фур'є

$$a(x,x_\Delta,\Phi,\tau)=\sum_{\|k\|\geq 0}a_k(x,x_\Delta,\tau)e^{i(k,\Phi)},$$
$$b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)=\sum_{\|l\|\geq 0}b_l(x,\tau,\varepsilon)e^{i(l,\varphi)},$$

$\Phi=(\varphi,\varphi_\Delta)$, i–уявна одиниця; $k=(k^{(1)},\ldots,k^{(2m)})$ і $l=(l^{(1)},\ldots,l^{(m)})$ – вектори з цілочисельними координатами; (k,Φ) і (l,φ) – скалярний добуток відповідних векторів; $\|k\|=|k^{(1)}|+\ldots+|k^{(2m)}|$, $\|l\|=|l^{(1)}|+\ldots+|l^{(m)}|$, а під нормою матриці надалі розумітимемо суму модулів її елементів.

Накладемо деякі додаткові обмеження на вектор частот $\omega(\tau)=(\omega_1(\tau),...,\omega_m(\tau))$. Нехай $\omega_\nu(\tau),\nu=\overline{1,m}$, а також їх похідні

$$\omega_\nu^{(\mu)}(\tau)=\frac{d^\mu}{d\tau^\mu}\omega_\nu(\tau),\nu=\overline{1,m},\mu=\overline{0,2p-1},p\geq m,$$

рівномірно неперервні на всій числовій осі і

$$\left\|\left(V_p^T(\tau)V_p(\tau)\right)^{-1}V_p^T(\tau)\right\|\leq\sigma_2<\infty,\ \tau\in R,\quad (5)$$

де $V_p(\tau)$ позначає матрицю

$$\left(\tilde{\omega}_\nu^{(\mu-1)}(\tau)\right)_{\mu,\nu=1}^{2p,2m},$$

$V_p^T(\tau)$ – транспонована матриця, $\tilde{\omega}(\tau)=(\omega(\tau),\omega(\tau-\Delta))$ – $2m$-вимірний вектор.

Обмеження (5) дають можливість для осциляційного інтеграла

$$J_\eta(t,\bar{t},s,\varepsilon)=\int_t^{t+s}f(y)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{t}}^{y}(\eta,\tilde{\omega}(z))dz\right\}dy$$

записати оцінку [4]

$$\|J_\eta(t,\bar{t},s,\varepsilon)\|\leq\sigma^{(1)}\varepsilon^\beta\left[\max_{[t,t+s]}\|f(y)\|+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\|\eta\|}\max_{[t,t+s]}\left\|\frac{df(y)}{dy}\right\|\right],\quad (6)$$

де $\eta=(\eta^{(1)},\ldots,\eta^{(2m)})$ – вектор з цілочисельними координатами, $\eta\neq 0$; $f(y)$ – неперервно-диференційовна на $[t,t+L]$ вектор-функція; $s\in[0,L],t\in R,\bar{t}\in R,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\sigma^{(1)}>0$ і $\varepsilon_0>0$ – сталі, незалежні від $\eta,t,\bar{t},s,\varepsilon$, але залежні від L, $\beta=1/2p$.

Покладемо $k=(l,0)$ – $2m$-вимірний вектор, $b_k(x,\tau,\varepsilon)=b_l(x,\tau,\varepsilon)$. Тоді

$$b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)=\sum_{\|k\|\geq 0}b_k(x,\tau,\varepsilon)e^{i(k,\Phi)}.$$

У зв'язку з цим, обмеження (5) дає можливість встановити оцінку осциляційних інтегралів (6), породжених функцією $b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$.

Нехай система у варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau}=H(\tau)z,\quad (7)$$

що відповідає розв'язку $\bar{x}=\bar{x}(\tau)$ системи (2), де $H(\tau)=\dfrac{\partial}{\partial x}\bar{a}(\bar{x}(\tau),\bar{x}(\tau-\Delta),\tau)$, – гіперболічна [2]. Це означає, що матриця $H(\tau)$ має блочно-діагональну структуру

$$H(\tau)=diag(H_+(\tau),H_-(\tau))$$

і система (7) розпадається на дві системи

$$\frac{dz_+}{d\tau}=H_+(\tau)z_+,\ \frac{dz_-}{d\tau}=H_-(\tau)z_-,\quad (8)$$

де $z=(z_+,z_-),z_+\in R^{n_0},z_-\in R^{n-n_0}$, причому матриціанти $Q_+(\tau,t)$ і $Q_-(\tau,t)$ відповідно першої і другої систем у (8) задовольняють нерівності

$$\|Q_+(\tau,t)\|\leq Ke^{\gamma(\tau-t)},\ \ \tau\leq t,$$
$$\|Q_-(\tau,t)\|\leq Ke^{-\gamma(\tau-t)},\ \ \tau\geq t,$$

з деякими сталими $K\geq 1$ і $\gamma>0$.

Якщо позначити через $Q(\tau,t)$ n – вимірну квадратну матрицю

$$Q(\tau,t)=\begin{cases}-diag(Q_+(\tau,t),0),\ \tau<t,\\ \ \ diag(0,Q_-(\tau,t)),\ \tau>t,\end{cases}$$

то

$$\|Q(\tau,t)\| \le Ke^{-\gamma|\tau-t|} \qquad (9)$$

для всіх $\tau \in R$ і $t \in R$.

Перетворимо рівняння (3) за допомогою заміни $y = x - \bar{x}(\tau)$, $y = (y_+, y_-)$, $y = y(\tau,\varepsilon)$, $y_\Delta = y(\tau-\Delta,\varepsilon)$ до вигляду

$$\frac{dy_+}{d\tau} = H_+(\tau)y_+ + F_+(y,y_\Delta,\tau)+$$
$$+\tilde{a}_+(y+\bar{x}(\tau), y_\Delta + \bar{x}(\tau-\Delta), \varphi, \varphi_\Delta, \tau)+$$
$$+\varepsilon A_+(y+\bar{x}(\tau), y_\Delta + \bar{x}(\tau-\Delta), \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon),$$
$$\frac{dy_-}{d\tau} = H_-(\tau)y_- + F_-(y,y_\Delta,\tau)+ \qquad (10)$$
$$+\tilde{a}_-(y+\bar{x}(\tau), y_\Delta + \bar{x}(\tau-\Delta), \varphi, \varphi_\Delta, \tau)+$$
$$+\varepsilon A_-(y+\bar{x}(\tau), y_\Delta + \bar{x}(\tau-\Delta), \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(y+\bar{x}(\tau), \varphi, \tau, \varepsilon),$$

де $(\tilde{a}_+, \tilde{a}_-) = \tilde{a}$, $(F_+, F_-) = F$, $F \equiv F_1 + \dfrac{\partial \bar{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}_\Delta} y_\Delta$, $F_1 \equiv \bar{a}(y+\bar{x}, y_\Delta + \bar{x}_\Delta, \tau) - \bar{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau) - \dfrac{\partial \bar{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}} y - \dfrac{\partial \bar{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}_\Delta} y_\Delta = \displaystyle\int_0^1 \Big[\frac{\partial \bar{a}(z+sh,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{a}(z,\tau)}{\partial z}\Big] ds \cdot h$, $z \equiv (\bar{x}, \bar{x}_\Delta)$, $h \equiv (y, y_\Delta)$.

Для побудови інтегрального многовиду $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ системи (3) застосуємо ітераційний метод. Його суть полягає в тому, що $Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ визначається як границя послідовності $\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}_{j=0}^{\infty}$, у якій $y = Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$ – інтегральний многовид системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= H(\tau)y + F(Y_{j-1}, Y_{j-1}^\Delta, \tau)+ \\ &+\tilde{a}(X_{j-1}, X_{j-1}^\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau)+ \\ &+\varepsilon A(X_{j-1}, X_{j-1}^\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X_{j-1}, \varphi, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (11)$$

де $Y_0 \equiv 0, Y_{j-1} = Y_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon), Y_{j-1}^\Delta = Y_{j-1}(\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon), \tau-\Delta, \varepsilon)$, $X_{j-1} = \bar{x}(\tau) + Y_{j-1}$, $X_{j-1}^\Delta = \bar{x}(\tau-\Delta) + Y_{j-1}^\Delta$.

За допомогою матриці $Q(\tau,t)$ інтегральний многовид системи (11) можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} & Q(\tau,t)(F(Y_{j-1}, Y_{j-1}^\Delta, t)+ \\ &+\tilde{a}(X_{j-1}, X_{j-1}^\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, t)+ \\ &+\varepsilon A(X_{j-1}, X_{j-1}^\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, t, \varepsilon))dt, \end{aligned} \qquad (12)$$

де $\varphi = \varphi_{\tau,j-1}^t(\psi,\varepsilon)$, а $\varphi = \varphi_{t,j-1}^\tau(\psi,\varepsilon)$ – розв'язок другого рівняння системи (11), який при $\tau = t$ набуває значення ψ.

Наведемо далі основні властивості функцій $Y_j(\psi,\tau,\varepsilon), j \ge 0$.

Лема 1. *Якщо виконуються умови* (4), (5) *і* $\varphi = \varphi_\tau^t(\psi,\varepsilon)$ *є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(t) + Y(\varphi,t,\varepsilon), \varphi, t, \varepsilon),$$
$$\varphi|_{t=\tau} = \psi, \ \psi \in R^m,$$

де $Y(\varphi,t,\varepsilon)$ *– неперервно-диференційовна по* $(\varphi,t) \in R^m \times R$ *при кожному фіксованому* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, *причому*

$$\Big\|\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi}\frac{\omega(t)}{\varepsilon}\Big\| \le \bar{d}_1, \ \Big\|\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\Big\| \le d_2\varepsilon^\beta,$$
$$(\varphi,t,\varepsilon) \in R^m \times R \times (0,\varepsilon_0] \equiv G_1,$$

$\bar{d}_1, d_2$ *– деякі сталі, то існує така незалежна від* ε *стала* c_1, *що при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *виконується нерівність*

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial \psi}(\varphi_\tau^t(\psi,\varepsilon) - \psi)\Big\| \le c_1(1+d_2)\varepsilon^\beta e^{\frac{\gamma}{2}|t-\tau|} \qquad (13)$$

для всіх $(\psi,t,\varepsilon) \in G_1, \tau \in R$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді можна вказати такі незалежні від* ε *сталі* c_3 *і* c_4, *що для всіх* $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$ *і* $t \in R$ *справедлива оцінка*

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi_\tau^t(\psi,\varepsilon)\Big\| \le c_3\Big(1 + \frac{\|\omega(\tau)\|}{\varepsilon}\Big) e^{c_4\varepsilon^\beta|t-\tau|}. \qquad (14)$$

Лема 3. *Нехай*

1) виконуються умови (4) *і* (5);

2) функції $Y_1(\varphi,\tau,\varepsilon)$ *і* $Y_2(\varphi,\tau,\varepsilon)$ *неперервно-диференційовні по* $(\varphi,\tau) \in$

$R^m \times R$ *при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 2π-*періодичні по* $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, *і задовольняють нерівності*

$$\|Y_s\| \le d_1\varepsilon^\beta, \ \left\|\frac{\partial Y_s}{\partial \varphi}\right\| \le d_2\varepsilon^\beta,$$

$$\left\|\frac{\partial Y_s}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar{d}_1, (\varphi, \tau, \varepsilon) \in G_1, s = 1, 2.$$

Тоді існують такі сталі c_5 *і* c_6, *що для всіх* $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ *і* $t \in R$ *справедлива нерівність*

$$\|\varphi^t_{\tau,1}(\psi, \varepsilon) - \varphi^t_{\tau,2}(\psi, \varepsilon)\| \le c_5 e^{c_6\varepsilon^\beta|t-\tau|} \times \times \big(1 + |t - \tau|\big) \sup_{\overline{G}_1} \|Y_1(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_2(\psi, \tau, \varepsilon)\|, \quad (15)$$

де $\overline{G}_1 = \{(x, \tau) : \varphi \in R^m, \tau \in R\}$, $\varphi^t_{\tau,s}(\psi, \varepsilon)$ *– розв'язок задачі Коші*

$$\frac{d}{dt}\varphi^t_{\tau,s}(\psi, \varepsilon) = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + $$
$$+ b\big(\bar{x}(t) + Y_s(\varphi^t_{\tau,s}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon), \varphi^t_{\tau,s}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon\big),$$
$$\varphi^\tau_{\tau,s}(\psi, \varepsilon) = \psi.$$

Доведення лем 1-3 проводиться аналогічно як і в [4].

Існування інтегрального многовиду та його властивості.

Припустимо надалі, що виконується умова

$$\frac{2K}{\gamma}\left(\sup_{\tau \in R}\left\|\frac{\partial \bar{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}_\Delta}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial \tilde{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial \tilde{a}(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau)}{\partial \bar{x}_\Delta}\right\|\right) \equiv \sigma_0 < 1, \quad (16)$$

де $\bar{x} = \bar{x}(\tau), \bar{x}_\Delta = \bar{x}(\tau - \Delta)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (4), (5), (9), (16). *Тоді існує досить мале число* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що функції* $Y_j = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), j = \overline{0, \infty}$, *які визначаються рівністю* (12), 2π*–періодичні по* $\psi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, *неперервно-диференційовні по* $(\psi, \tau) \in R^m \times R$ *при кожному фіксованому* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і для всіх* $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ *справедливі нерівності*

$$\|Y_j\| \le d_1\varepsilon^\beta, \ \left\|\frac{\partial Y_j}{\partial \psi}\right\| \le d_2\varepsilon^\beta, \ \ j \ge 0,$$

де d_1, d_2 *– сталі, незалежні від* ε, j.

Доведення. Розглянемо послідовність $\{Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\}_{j=0}^\infty$ і покажемо, що вона обмежена для $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$.

Оскільки $\dfrac{\partial \bar{a}(z, \tau)}{\partial z}$ рівномірно неперервна на множині $D^2 \times R$, то для довільного $\mu_1 > 0$ існує таке $\delta_1(\mu_1) > 0$, що

$$\begin{gathered}\|F_1(Y_j, Y_j^\Delta, \tau)\| \le \mu_1(\|Y_j\| + \|Y_j^\Delta\|), \\ \left\|\frac{\partial}{\partial z}F_1(Y_j, Y_j^\Delta, \tau)\right\| \le \mu_1\end{gathered} \quad (17)$$

для всіх $\tau \in R$ і $\|Y_j\| + \|Y_j^\Delta\| < \delta_1$.

Із зображення (12) одержимо, що

$$\|Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\| \le (\sigma_0 + $$
$$+ \frac{4}{\gamma}K\mu_1) \sup_{G_1}\|Y_{j-1}(\psi, \tau, \varepsilon)\| + \frac{2K}{\gamma}\sigma_1\varepsilon + $$
$$+ \sum_{\|k\| \ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1} Q(\tau, t) a_k(X_{j-1}, X_{j-1}^\Delta, t) \times \right.$$
$$\left. \times e^{i(k, \theta^t_{\tau,j-1})} e^{i(k, \tilde{\theta})} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^t (k, \tilde{\omega}(r))dr\right\}dt\right\|, \quad (18)$$

де k – цілочисельний $2m$-вимірний вектор, $\theta^t_{\tau,j-1} = \Phi^t_{\tau,j-1} - \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \tilde{\omega}(r)dr - \tilde{\theta}$, $\Phi^t_{\tau,j-1} = (\varphi^t_{\tau,j-1}, \varphi^{t-\Delta}_{\tau,j-1})$, $\tilde{\theta} = \left(0; \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\Delta} \omega(r - \Delta)dr\right)$.

Використовуючи оцінку осциляційного інтеграла (6), останній доданок у нерівності (18) оцінимо зверху величиною

$$\sigma^{(1)}K\sigma_1(1 + \sigma_1)\varepsilon^\beta \sum_{s=-\infty}^{\infty} \max_{[\tau+s, \tau+s+1]} e^{-\gamma|t-\tau|}.$$

Тоді, враховуючи оцінку (17) та рівність

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \max_{[\tau+s, \tau+s+1]} e^{-\gamma|t-\tau|} = \frac{2}{1 - e^{-\gamma}},$$

одержимо нерівність

$$\sup_{G_1}\|Y_j\| \le (\sigma_0 + \frac{4}{\gamma}K\mu_1) \sup_{G_1}\|Y_{j-1}\| + \sigma_3\varepsilon^\beta,$$

де $\sigma_3 = \dfrac{2}{\gamma}K\sigma_1 + 2K\sigma^{(1)}\sigma_1(1+\sigma_1)\dfrac{1}{1-e^{-\gamma}}$, з якої випливає оцінка

$$\sup_{\overline{G}_1}\|Y_j\| \le d_1\varepsilon^\beta,\ j\ge 0,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \tag{19}$$

зі сталою $d_1 = \sigma_3(1-\sigma_0-\frac{4}{\gamma}K\mu_1)^{-1}$, $\varepsilon_0 \le \left(\frac{\delta_1}{d_1}\right)^{1/\beta}$, $\mu_1 = \mu_1^{(1)} = \gamma(1-\sigma_0)(8K)^{-1}$.

Накладемо також умову $2d_1\varepsilon_0^\beta \le \rho$. При її виконанні $X_j(\psi,\tau,\varepsilon) = \bar{x}(\tau) + Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$ лежить в $\frac{1}{2}\rho$-околі кривої $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in \overline{G}_1$.

Припустимо далі, що операції диференціювання та інтегрування в правій частині (12) можна поміняти місцями. Правильність цієї операції встановимо пізніше.

Тоді, враховуючи нерівність (9), одержимо

$$\frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right) =$$
$$= H(t)Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) +$$
$$+F_2(Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon),Y_{j-1}(\varphi^{\tau-\Delta}_{\tau,j-1},\tau-\Delta,\varepsilon),\psi,\varphi^{\tau-\Delta}_{\tau,j-1},\tau,\varepsilon)+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial B}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right]dt +$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial B}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial\varphi^{t-\Delta}_{\tau,j}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi^{t-\Delta}_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right)\right]dt,$$

де $F_2(y,y_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau) = F(y,y_\Delta,\tau) + \tilde{a}(\bar{x}(\tau)+y,\bar{x}(\tau-\Delta)+y_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau) + \varepsilon A(\bar{x}(\tau)+y,\bar{x}(\tau-\Delta)+y_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\tau,\varepsilon)$, $\varphi^t_{\tau,i} = \varphi^t_{\tau,i}(\psi,\varepsilon), i = \{j-1,j\}$, $\tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon) = b(\bar{x}(\tau)+Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon),\psi,\tau,\varepsilon), B$ – підінтегральна функція інтеграла у правій частині (12).

Аналогічно, як і в [4, с.392] встановлюємо, що

$$\frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi^t_{\tau,j}}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right) \equiv 0,$$

$t\in R, (\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$.

Отже, для $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ виконується рівність

$$\frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(\psi,\tau,\varepsilon)\right) =$$
$$= H(t)Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) + \tag{20}$$
$$+F_2(Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon),Y_{j-1}(\varphi^{\tau-\Delta}_{\tau,j-1},\tau-\Delta,\varepsilon),\psi,\varphi^{\tau-\Delta}_{\tau,j-1},\tau,\varepsilon).$$

Далі покажемо, що послідовність $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\psi}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\right\}_{j=0}^{\infty}$ також рівномірно обмежена в G_1 величиною $d_2\varepsilon^\beta$, де d_2 – стала, яка не залежить від ε і $j\ge 0$.

Позначимо через $A_k(x,x_\Delta,\tau,\varepsilon)$ прямокутну $(2m\times n)$ матрицю

$$A_k(x,x_\Delta,\tau) \equiv \left(a_k^{(\mu)}(x,x_\Delta,\tau)k^{(\nu)}i\right)_{\mu,\nu=1}^{n,2m},$$

$$a_k(x,x_\Delta,\tau) = \left(a_k^{(1)}(x,x_\Delta,\tau),\dots,a_k^{(n)}(x,x_\Delta,\tau)\right),$$
$$k = (k^{(1)},k^{(2)},\dots,k^{(2m)}).$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial\Phi}a(x,x_\Delta,\Phi,\tau) = \sum_{\|k\|>0}A_k(x,x_\Delta,\tau)e^{i(k,\Phi)},$$

а для A_k справедливі нерівності

$$\|A_k\| \le \|a_k\|\|k\|, \left\|\frac{\partial A_k}{\partial\tau}\right\| \le \left\|\frac{\partial a_k}{\partial\tau}\right\|\|k\|,$$
$$\left\|\frac{\partial A_k}{\partial x}\right\| \le n\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\right\|\|k\|, \left\|\frac{\partial A_k}{\partial x_\Delta}\right\| \le n\left\|\frac{\partial a_k}{\partial x_\Delta}\right\|\|k\|.$$

Розглянемо (12) при $j=1$. Враховуючи, що $Y_0\equiv 0$, дістанемо нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)\right\| \le$$
$$\le 2\sigma_1\varepsilon K\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\gamma|t-\tau|}\left(2m + \left\|\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\Phi^t_{\tau,0}-\Psi\right)\right\|\right)dt +$$
$$+\sum_{\|k\|\ne 0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1}Q(\tau,t)A_k(X_0,X_0^\Delta,t)\times\right.$$
$$\times\left(E + \frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\Phi^t_{\tau,0}-\Psi\right)\right)\exp\{i(k,\theta^t_{\tau,1})\}\times$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^t(k,\tilde{\omega}(r))dr\right\}dt\right\|, \tag{21}$$

де $\Psi = (\psi,\psi)$.

Розглянемо останній доданок у нерівності (21) і, використовуючи оцінку [4, с.184]

$$\max_{[\tau+s,\tau+s+1]}\Big\|\frac{dz^l_{\tau,j}}{dl}\Big\| \le \sigma_1(nd_2\varepsilon^\beta+m)\times$$

$$\times(m+\max_{[\tau+s,\tau+s+1]}\|z^l_{\tau,j}\|),$$

де $z^l_{\tau,j} = \dfrac{\partial}{\partial\psi}\big(\varphi^l_{\tau,j}-\psi\big)$, та оцінку (13) при умовах

$$\Big\|\frac{\partial Y_0}{\partial\tau}+\frac{\partial Y_0}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\Big\| \equiv 0 < \bar d_1,$$

$$\sigma_4 = \max\big\{1, 4/\gamma\big\},$$

оцінимо його величиною $\sigma_5\varepsilon^\beta$, в якій $\sigma_5 = 2K\sigma^{(1)}\sigma_1(1+\sigma_1(4+d_2)+(2\sigma_1+\bar d_1)n)\Big(\frac{m}{1-e^{-\gamma}}+\frac{2\sigma_4}{1-e^{-\gamma/2}}\Big)$.

Тоді з (21) одержимо

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)\Big\| \le \frac{8}{\gamma}\sigma_1K(1+2\sigma_4c_1)\varepsilon+\sigma_5\varepsilon^\beta <$$

$$< d_2\varepsilon^\beta,\ (\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1.$$

Нехай $\tau\in[-T,T], N>T$. Тоді

$$\Big\|\int\limits_N^\infty Q(\tau,t)\big(F(Y_0,Y_0^\Delta,t)+$$

$$+\tilde a(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t)+$$

$$+\varepsilon A(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t,\varepsilon)\big)dt\Big\| \le$$

$$\le\frac{K}{\gamma}e^{-\gamma(N-T)}(2n^2\sigma_1d_1^2\varepsilon_0^{2\beta}+\sigma_0d_1\varepsilon_0^\beta+2\sigma_1+\varepsilon_0\sigma_1),$$

$$\Big\|\int\limits_N^\infty \frac{\partial}{\partial\psi}\Big[Q(\tau,t)\big(F(Y_0,Y_0^\Delta,t)+$$

$$+\tilde a(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t)+$$

$$+\varepsilon A(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t,\varepsilon)\big)\Big]dt\Big\| \le$$

$$\le\frac{2K}{\gamma^2}e^{-\gamma(N-T)}((4\sigma_1n^2d_1\varepsilon_0^\beta+\sigma_0+4\sigma_1)d_2\varepsilon_0^\beta+$$

$$+2\sigma_1+4\sigma_1d_2\varepsilon_0^{\beta+1}+4\sigma_1\varepsilon_0)(2m+2\sigma_4),$$

Аналогічні нерівності справджуються, якщо проміжок інтегрування $[N,\infty)$ замінити на $(-\infty,-N]$. З останніх нерівностей одержуємо, що інтеграл у (12) при $j=1$ та інтеграл, що одержується з (12) шляхом диференціювання по ψ під знаком інтеграла рівномірно збіжні на множині $(\psi,\tau,\varepsilon)\in R^m\times[-T,T]\times(0,\varepsilon_0]$. Тому на підставі гладкості правої частини (1) і довільності вибраного $T>0$ випливає неперервність функцій $Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$ і $\dfrac{\partial}{\partial\psi}Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$ по $(\psi,\tau)\in R^m\times R$ при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Використаємо далі нерівність (9) та оцінку (14) леми 2. Тоді для довільного фіксованого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$

$$\Big\|\int\limits_N^\infty \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[Q(\tau,t)\big(F(Y_0,Y_0^\Delta,t)+$$

$$+\tilde a(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t)+$$

$$+\varepsilon A(X_0,X_0^\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,t,\varepsilon)\big)\Big]dt\Big\| \le$$

$$\le\frac{K}{\gamma}e^{-\gamma(N-T)}\big[(4n^2\sigma_1d_1\varepsilon_0^\beta+\sigma_0+$$

$$+8\sigma_1(d_1\varepsilon_0^\beta+1))c_3(1+\sigma_1\underline{\varepsilon}_0^{-1})e^{\frac{\gamma}{2}(N-T)}\big]+\sigma_1d_1\varepsilon^\beta$$

при $\varepsilon_0\le\left(\dfrac{\gamma}{2c_8}\right)^{1/\beta}$.

Аналогічна нерівність справедлива і для інтеграла по проміжку $(-\infty,-N]$. З одержаних оцінок маємо рівномірну збіжність інтеграла, який одержується з рівності (12) шляхом диференціювання по τ, на множині $(\psi,\tau,\varepsilon)\in R^m\times[-T,T]\times[\underline{\varepsilon}_0,\varepsilon_0]$, де $T>0$ і $\underline{\varepsilon}_0\in(0,\varepsilon_0]$ – довільні сталі. Оскільки T і $\underline{\varepsilon}_0$ – довільні і праві частини (1) гладкі функції, то $\dfrac{\partial Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}$ неперервна по $(\psi,\tau)\in R^m\times R$ при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Рівномірна збіжність відповідних інтегралів дозволяє міняти місцями операції диференціювання та інтегрування по ψ і τ.

Тому функція $Y_1(\psi,\tau,\varepsilon)$ задовольняє рівність (20) для $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ та нерівність

$$\Big\|\frac{\partial Y_1}{\partial\tau}+\frac{\partial Y_1}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\Big\| \le \bar d_1.$$

Припустимо далі, що для всіх $j = \overline{2, l-1}, l > 2$, функції $Y_j = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$ неперервно-диференційовні по $(\psi, \tau) \in R^m \times R$ при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, задовольняють (20) та нерівності

$$\left\|\frac{\partial Y_j}{\partial \psi}\right\| \le d_2 \varepsilon^\beta, \ \left\|\frac{\partial Y_j}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_j}{\partial \psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar{d}_1, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1. \tag{22}$$

Доведемо далі, що $Y_l(\psi, \tau, \varepsilon)$ також неперервно-диференційовна по ψ, τ при кожному фіксованому ε і справджує (20) та (22) при $j = l$.

Враховуючи оцінку (19), з рівності (12) отримаємо оцінку

$$\sup_{\overline{G}_1}\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_l(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le \Big(\frac{8}{\gamma}\mu_1 K + \sigma_0 + \sigma_6 \varepsilon^\beta + $$

$$+ 2\sigma_0\sigma_4 c_1 (1 + d_2)\varepsilon^\beta\Big) \sup_{\overline{G}_1}\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_{l-1}(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| + \sigma_7 \varepsilon^\beta,$$

в якій $\sigma_6 = \frac{8}{\gamma} K \sigma_1 + \frac{16}{\gamma}\mu_1 \sigma_1 \sigma_4 c_1 K + \frac{16}{\gamma} K \sigma_1 \sigma_4 c_1$, $\sigma_7 = \sigma_5 + \frac{8}{\gamma} K \sigma_1 (1 + 2\sigma_4)$, $\varepsilon_0 \le (1 + d_2)^{-p}$.

З останньої нерівності маємо

$$\sup_{\overline{G}_1}\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_l(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le \le \frac{1 + \sigma_0}{2} \sup_{\overline{G}_1}\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_{l-1}(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| + \sigma_7 \varepsilon^\beta \tag{23}$$

при $\varepsilon_0 \le \big((1 - \sigma_0)(16(2\sigma_0\sigma_4 c_1(1 + d_2) + \sigma_6))^{-1}\big)^{1/\beta}$, $\mu_1 = \min\{\mu_1^{(1)}, \frac{\gamma(1-\sigma_0)}{32K}\}$.

Оскільки $\dfrac{1 + \sigma_0}{2} < 1$ за умовою (16), то нерівність (23) веде до оцінки

$$\sup_{\overline{G}_1}\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_l(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le \frac{2\sigma_7}{1 - \sigma_0}\varepsilon^\beta \equiv d_2 \varepsilon^\beta,$$

$$l \ge 0, \ (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1.$$

Як і у випадку $j = 1$ переконуємось, що і при $j = l$ функція $Y_l(\psi, \tau, \varepsilon)$ неперервно-диференційовна по ψ, τ при кожному фіксованому ε на множині $R^m \times [-T, T] \times [\underline{\varepsilon}_0, \varepsilon_0]$ і задовольняє тотожність (20) на цій множині. В силу довільності T і $\underline{\varepsilon}_0$ одержимо (20) для $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$ і правильність нерівності

$$\left\|\frac{\partial Y_l}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_l}{\partial \psi}\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}\right\| \le \bar{d}_1$$

зі сталою $\bar{d}_1 = \sigma_1(1 + 2d_1 + d_2) + 2\mu_1 d_1$.

Згідно з методом математичної індукції $Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), j = \overline{0, \infty}$, неперервно-диференційовні по $(\psi, \tau) \in R^m \times R$ при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і задовольняють нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\right\| \le d_2 \varepsilon^\beta, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1, \ j \ge 0.$$

Періодичність функцій $Y_j(\psi, \tau, \varepsilon), j = \overline{0, \infty}$ по $\psi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, встановлюємо аналогічно як і в [4, §18].

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ справедливі твердження:*

1) існує інтегральний многовид $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ системи (1), який лежить в $d_1\varepsilon^\beta$-околі кривої $x = \bar{x}(\tau)$ для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$;

2) функція $X(\psi, \tau, \varepsilon)$ – 2π-періодична за $\psi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, неперервна по ψ, τ при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, задовольняє умову Ліпшиця по ψ

$$\left\|X(\psi, \tau, \varepsilon) - X(\bar{\psi}, \tau, \varepsilon)\right\| \le d_2 \varepsilon^\beta \|\psi - \bar{\psi}\|, \ \bar{\psi} \in R^m$$

для всіх $(\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1$;

3) на інтегральному многовиді система (1) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X(\varphi, \tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon).$$

Доведення.

Розглянемо послідовність функцій $\{Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)\}_{j=0}^{\infty}$ і покажемо, що вона рівномірно збігається на множині G_1 до деякої функції $Y(\psi, \tau, \varepsilon)$. Для цього оцінимо норму різниці $\|Y_{j+1} - Y_j\|$.

Враховуючи зображення (12) для $Y_j(\psi, \tau, \varepsilon)$, дістанемо

$$Y_{j+1}(\psi, \tau, \varepsilon) - Y_j(\psi, \tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau, t)\big([F_j - F_{j-1}] +$$

$$+ [\tilde{a}_j - \tilde{a}_{j-1}] + \varepsilon[A_j - A_{j-1}]\big) dt, \tag{24}$$

де

$$F_l = F\big(Y_l(\varphi^t_{\tau,l}(\psi, \varepsilon), t, \varepsilon), Y_l(\varphi^{t-\Delta}_{\tau,l}(\psi, \varepsilon), t - \Delta, \varepsilon), t\big),$$

$$\tilde a_l=\tilde a\big(\chi_l,\Phi^t_{\tau,l},t,\varepsilon\big),\,A_l=A\big(\chi_l,\Phi^t_{\tau,l},t,\varepsilon\big),$$
$$\chi_l=(X_l(\varphi^t_{\tau,l}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),X_l(\varphi^{t-\Delta}_{\tau,l}(\psi,\varepsilon),t-\Delta,\varepsilon)),$$
$$\Phi^t_{\tau,l}=\big(\varphi^t_{\tau,l}(\psi,\varepsilon),\varphi^{t-\Delta}_{\tau,l}(\psi,\varepsilon)\big),\,l=\{j-1,j\}.$$

З нерівності (15) леми 3 одержимо оцінку

$$\|\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)-\varphi^t_{\tau,j-1}(\psi,\varepsilon)\|\le$$
$$\le\sigma_8 e^{\frac{\gamma}{2}|t-\tau|}\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\| \quad (25)$$

при умові $c_5 e^{\frac{\gamma}{4}|t-\tau|}\big(1+|t-\tau|\big)\le\sigma_8 e^{\frac{\gamma}{2}|t-\tau|}$, $c_6\varepsilon^\beta\le\frac{\gamma}{4}$, $\sigma_8=c_5\max\big\{1;\frac{4}{\gamma}\big\}$.

Далі, використовуючи нерівність (25), отримаємо

$$\|Y_j(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon)-Y_{j-1}(\varphi^t_{\tau,j-1}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon)\|\le$$
$$\le\Big(1+\sigma_8 d_2\varepsilon^\beta e^{\frac{\gamma}{2}|t-\tau|}\Big)\times$$
$$\times\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|. \quad (26)$$

Оцінимо доданки під знаком інтеграла в рівності (24). Маємо

$$\|F_j-F_{j-1}\|\le\Big(4\sigma_1 d_1\varepsilon^\beta+$$
$$+\sup_t\Big\|\frac{\partial\bar a(\bar x(t),\bar x(t-\Delta),t)}{\partial x_\Delta}\Big\|\Big)\|Y_j-Y_{j-1}\|,$$
$$\|\tilde a_j-\tilde a_{j-1}\|\le\big[\tilde a_j(\bar\chi,\Phi^t_{\tau,j},t)-\tilde a_j(\bar\chi,\Phi^t_{\tau,j-1},t)\big]+$$
$$+2\sup\Big\|\frac{\partial}{\partial\bar\chi}\tilde a\big(\bar\chi,\Phi^t_{\tau,j},t\big)\Big\|\|Y_j-Y_{j-1}\|+$$
$$+4\sigma_1 d_1\varepsilon^\beta\big(\|\varphi^t_{\tau,j}-\varphi^t_{\tau,j-1}\|+$$
$$+\|Y_j-Y_{j-1}\|\big)+2\sigma_1 d_1\varepsilon^\beta\|Y_j-Y_{j-1}\|,$$
$$\|A_j-A_{j-1}\|\le 2\big(\sigma_8 e^{\frac{\gamma}{2}|t-\tau|}+\sigma_1\big)\|Y_j-Y_{j-1}\|,$$

де $\bar\chi=(\bar x(\tau),\bar x(\tau-\Delta))$.

Далі, враховуючи одержані оцінки, одержимо

$$\sup_{G_1}\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\|\le(\sigma_0+\sigma_9\varepsilon^\beta)\times$$
$$\times\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|+$$
$$+\sum_{\|k\|\neq0}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\Big\|\int_{\tau+s}^{\tau+s+1}Q(\tau,t)a_k(\bar\chi,t)\big(e^{i(k,\theta^t_{\tau,j})}-$$
$$-e^{i(k,\theta^t_{\tau,j-1})}\big)e^{i(k,\tilde\theta)}\exp\Big\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\tau^t(k,\tilde\omega(r))dr\Big\}dt\Big\|, \quad (27)$$

де $\sigma_9=\frac{4K}{\gamma}(5\sigma_1 d_1+\sigma_0\sigma_8 d_2+10\sigma_1 d_1\sigma_8 d_2+4\sigma_1\sigma_8 d_1+2\sigma_1+4\sigma_8)$.

Для оцінки останнього доданка нерівності (27) скористаємось оцінками

$$\Big|e^{i(k,\theta^t_{\tau,j})}-e^{i(k,\theta^t_{\tau,j-1})}\Big|\le 2\|k\|\|\varphi^t_{\tau,j}-\varphi^t_{\tau,j-1}\|,$$
$$\Big|e^{i(k,\theta^t_{\tau,j})}\Big(k,\frac{d\theta^t_{\tau,j}}{dt}\Big)-e^{i(k,\theta^t_{\tau,j-1})}\Big(k,\frac{d\theta^t_{\tau,j-1}}{dt}\Big)\Big|\le$$
$$\le 2\|k\|^2\|\varphi^t_{\tau,j}-\varphi^t_{\tau,j-1}\|+$$
$$+2\sigma_1(\|Y_j-Y_{j-1}\|+\|\varphi^t_{\tau,j}-\varphi^t_{\tau,j-1}\|)\|k\|,$$

нерівностями (6), (25), (26) та умовами (4). Тоді, позначивши його через I, одержимо

$$\|I\|\le\sigma_{10}\varepsilon^\beta\sup_{G_1}\big\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\big\| \quad (28)$$

зі сталою $\sigma_{10}=16(1+\sigma_1)K\sigma^{(1)}((1+\sigma_1+d_2)(1-e^{-\gamma/2})^{-1}+(1-e^{-\gamma})^{-1})$.

Об'єднаємо (27) і (28)

$$\sup_{G_1}\big\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\big\|\le$$
$$\le\frac{1+\sigma_0}{2}\sup_{G_1}\big\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\big\|,$$

причому $\varepsilon_0\le\Big(\dfrac{1-\sigma_0}{2(\sigma_9+\sigma_{10})}\Big)^{1/\beta}$.

Оскільки $\dfrac{1+\sigma_0}{2}<1$, то за ознакою Даламбера числовий ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sup\limits_{G_1}\big\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\big\|$ збігається. Тоді за ознакою Вейєрштраса ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\big\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\big\|$ рівномірно збіжний, а це рівносильно рівномірній збіжності послідовності $\Big\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\Big\}_{j=0}^{\infty}$ на множині G_1. У зв'язку з цим гранична функція

$$Y(\psi,\tau,\varepsilon)=\lim_{j\to\infty}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) \quad (29)$$

2π-періодична по $\psi_\nu, \nu = \overline{1,m}$, неперервна по ψ, τ при кожному фіксованому ε і задовольняє нерівності

$$\big\|Y(\psi,\tau,\varepsilon)\big\| \leq d_1\varepsilon^\beta,$$

$$\big\|Y(\psi,\tau,\varepsilon) - Y(\bar\psi,\tau,\varepsilon)\big\| \leq d_2\varepsilon^\beta \|\psi - \bar\psi\|,$$

$$\bar\psi \in R^m, (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1.$$

З нерівності (15) випливає, що при $t \in [-T,T], (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$, де T – довільне додатне число, послідовність $\left\{\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)\right\}_{j=0}^\infty$ також рівномірно збіжна до деякої функції $\varphi^t_\tau(\psi,\varepsilon)$

$$\lim_{j\to\infty} \varphi^t_{\tau,j} = \varphi^t_\tau(\psi,\varepsilon),\ (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1, t \in R. \quad (30)$$

Покажемо, що $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ визначає інтегральний многовид системи (10). Оскільки $y = Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$ – інтегральний многовид системи (11), то для її розв'язків $\varphi = \varphi^\tau_{t,j}(\psi,\varepsilon)$, $y = Y_j(\varphi^\tau_{t,j-1}(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon)$ маємо

$$\varphi^\tau_{t,j} = \psi + \int\limits_t^\tau \Big(\frac{\omega(l)}{\varepsilon} + b\big(\bar x(l) +$$

$$+Y_{j-1}(\varphi^l_{t,j-1},l,\varepsilon),\varphi^l_{t,j-1},l,\varepsilon\big)\Big)dl,\ \tau \in R, t \in R;$$

$$Y_j(\varphi^\tau_{t,j-1},\tau,\varepsilon) = Y_{j-1}(\psi,t,\varepsilon)+$$

$$+\int\limits_t^\tau \Big(H(l)Y_j(\varphi^l_{t,j-1},l,\varepsilon) + F_2(Y_{j-1}(\varphi^l_{t,j-1},l,\varepsilon),$$

$$Y_{j-1}(\varphi^{l-\Delta}_{t,j-1},l-\Delta,\varepsilon),\varphi^l_{t,j-1},\varphi^{l-\Delta}_{t,j-1},l,\varepsilon)\Big)dl,\ \tau \geq t \in R,$$

а при $\tau \in [t-\Delta, t]$ покладемо

$$y = Y_{j-1}(\varphi^\tau_{t,j-1}(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon).$$

Якщо перейти до границі в останніх рівностях при $j \to \infty$ і скористатися рівностями (29), (30), то дістанемо тотожності

$$\varphi^\tau_t(\psi,\varepsilon) = \psi + \int\limits_t^\tau \Big(\frac{\omega(l)}{\varepsilon} +$$

$$+b\big(\bar x(l) + Y(\varphi^l_t(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon),\varphi^l_t(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon\big)\Big)dl,$$

$$Y(\varphi^\tau_t(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon) = Y(\psi,t,\varepsilon)+$$

$$+\int\limits_t^\tau \Big(H(l)Y(\varphi^l_t(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon) + F_2(Y(\varphi^l_t(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon),$$

$$Y(\varphi^{l-\Delta}_t(\psi,\varepsilon),l-\Delta,\varepsilon),\varphi^l_t(\psi,\varepsilon),\varphi^{l-\Delta}_t(\psi,\varepsilon),l,\varepsilon)\Big)dl$$

для всіх $\psi \in R^m, \tau \in R, t \in R, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, з яких випливає, що $y = Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ – інтегральний многовид системи (10). Для завершення доведення теореми покладемо $X(\psi,\tau,\varepsilon) = \bar x(\tau) + Y(\psi,\tau,\varepsilon)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.В.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 412 с.

2. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1977. — 304 с.

3. *Самойленко А.М. Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.

5. *Петришин Р.І., Дудницький П.М.* Стійкість інтегрального многовиду коливної системи з повільно змінними частотами та імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, N3 — С. 365 – 394.

6. *Сопронюк Т.М.* Існування розривного інтегрального многовиду багаточастотної імпульсної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С. 98 – 102.