УДК 517.9:519.6

©2009 р. О.Б. Настасій, І.М. Черевко

Буковинська державна фінансова академія, Чернівці
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ

Досліджено умови існування розв'язку крайової задачі для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, наведено обчислювальну схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі за допомогою B-сплайнів та досліджено умови її збіжності.

We investigate the existence of a solution of a boundary problem for linear integro-differential equations, give a calculus scheme for an approximate solution of the boundary problem by means of B-splines and study its convergence conditions.

Вступ. У даній роботі досліджується наближений метод розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, що базується на застосуванні кубічних B-сплайнів. Для звичайних диференціальних рівнянь метод сплайн-колокацій розглядався в [1 – 3] та інших. Застосування B-сплайнів дозволяє побудувати алгоритми, які прості в реалізації і в той же час застосовні до широкого класу задач. Дослідження крайових задач чисельно-аналітичними методами вивчаються в роботах [4,5].

1. Постановка задачі. Існування розв'язку. Розглянемо крайову задачу

$$L[y] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt = r(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2, \tag{2}$$

де $p, q, r \in C([a,b])$, $K \in C([a,b]\times[a,b])$.

Для рівняння (1) крайові умови (2) можна замінити на нульові умови

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{3}$$

оскільки заміна $z(x) = y(x) - \left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{b-a}(x-a)+\gamma_1\right)$ приводить рівняння (1) до рівняння такого ж виду із заміною $r(x)$ на функцію

$$r(x) + p(x)\cdot\frac{\gamma_2-\gamma_1}{b-a} + q(x)\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{b-a}(x-a)+\gamma_1\right] + \int_a^b K(x,t)\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{b-a}(t-a)+\gamma_1\right]dt.$$

Позначимо $\max\limits_{x\in[a,b]}|q(x)| = m_q$, $\max\limits_{x\in[a,b]}|p(x)| = m_p$, $\max\limits_{x\in[a,b]\times[a,b]}|K(x,t)| = m_K$.

Теорема 1. *Нехай справджується нерівність*

$$(m_q + m_K)\frac{(b-a)^2}{8} + m_p\frac{b-a}{2} < 1. \tag{4}$$

Тоді крайова задача (1), (3) має єдиний розв'язок.

Доведення. Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = r(x), \tag{5}$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{6}$$

єдиний розв'язок якої можна подати у вигляді [6]

$$y(x) = -\int_a^b G(x,t)r(t)dt, \tag{7}$$

де $G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}t(b-a-x), & a \le t \le x \le b, \\ \frac{1}{b-a}x(b-a-t), & a \le x \le t \le b. \end{cases}$

Функція G володіє властивостями:

$$a \le G(x,t) \le \frac{b-a}{4}, \int\limits_a^b G(x,t)dt \le \frac{b-a}{2},$$

$$\int\limits_a^b \left| \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} \right| dt \le \frac{b-a}{2}.$$

Із цих властивостей та (7) маємо:

$$\|y(x)\| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a\le t\le b} \|r(t)\|,$$

$$\|y'(x)\| \le \frac{b-a}{2} \max_{a\le t\le b} \|r(t)\|. \qquad (8)$$

Нехай D – банахів простір неперервно-диференційовних функцій $h(x)$ з нормою

$$|h(x)| = \qquad (9)$$

$$= \max\left(\max_{a\le x\le b} \|h(x)\|, \frac{b-a}{4} \max_{a\le x\le b} \|h'(x)\| \right).$$

Розглянемо в кулі $|h| \le \rho$ з D деяку функцію $h(x)$. Нехай $y(x)$ - єдиний розв'язок крайової задачі

$$y''(x) = -p(x)h'(x) - q(x)h(x) -$$

$$- \int\limits_a^b K(x,t)h(t)dt + r(x), \qquad (10)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \qquad (11)$$

В кулі $|h| \le \rho$ з D визначимо оператор T_0, який діє за правилом $T_0[h(x)] = y(x)$.

Якщо $y_0(x) = T_0[0]$ і $\|r(x)\| \le m$, то з (8) одержимо

$$\|y_0(x)\| \le \frac{m(b-a)^2}{8},$$

$$\frac{b-a}{4}\|y'(x)\| \le \frac{m(b-a)^2}{8}.$$

Таким чином, норма функції $y_0(x) = T_0[0] \in D$ задовольняє нерівність

$$|T_0[0]| \le \frac{m(b-a)^2}{8}.$$

Якщо позначити $y_1 = T_0[h_1], y_2 = T_0[h_2]$, то, згідно з (8), (10), маємо

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \le \frac{(b-a)^2}{8}\Bigg((m_q + m_K) \times$$

$$\times \max\|h_1 - h_2\| + m_p \max\|h_1' - h_2'\| \Bigg),$$

$$\|y_1'(x) - y_2'(x)\| \le \frac{b-a}{2}\Bigg((m_q + m_K) \times$$

$$\times \max\|h_1 - h_2\| + m_p \max\|h_1' - h_2'\| \Bigg).$$

Домноживши останню нерівність на $(b-a)/4$, а вираз $m_p\frac{(b-a)^2}{8}\max\|h_1' - h_2'\|$ подавши у вигляді $m_p\frac{b-a}{2}\cdot\left[\frac{b-a}{4}\max\|h_1' - h_2'\|\right]$, отримаємо нерівність

$$|T_0[h_1] - T_0[h_2]| \le \left(\frac{(m_q + m_K)(b-a)^2}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_p(b-a)}{2}\right) \cdot |h_1 - h_2|.$$

Вибираючи тепер ρ так, щоб справджувалася нерівність

$$\frac{m(b-a)^2}{8} \le \rho\left(1 - (m_q + m_k)\frac{(b-a)^2}{8} + \right.$$

$$\left. + m_p\frac{b-a}{2}\right),$$

дістаємо, що відображення T_0 має в кулі радіуса ρ єдину нерухому точку [6], яка є розв'язком задачі (1), (3).

Теорема 1 доведена.

2. Метод сплайн-колокації. Припускатимемо надалі, що існує єдиний двічі неперервно-диференційовний розв'язок крайової задачі (1), (2). Шукатимемо наближений розв'язок задачі (1), (2) у вигляді кубічного сплайна $S(x)$ [1, 2]

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x) \qquad (12)$$

на рівномірній сітці

$$\Delta = x_{-1} < x_0 < ... < x_n < x_{n+1}, x_k = a + kh,$$

$$k = \overline{-1, n+1}, h = \frac{b-a}{n}.$$

Підставляючи $S(x)$ у рівняння (1) і крайові умови (2), у вузлах $x_k \in [a,b]$ маємо

$$S''(x_k) + p(x_k)S'(x_k) + q(x_k)S(x_k) +$$

$$+ \int\limits_a^b K(x_k, t)S(t)dt = r(x_k), k = \overline{0, n}, \quad (13)$$

$$S(x_0) = \gamma_1, \quad S(x_n) = \gamma_2. \quad (14)$$

Замінюючи значення сплайна і його похідних співвідношеннями

$$S(x_k) = \frac{b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1}}{6},$$

$$S'(x_k) = \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2h},$$

$$S''(x_k) = \frac{b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}}{h^2}, k = \overline{0, n},$$

і ввівши позначення $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $r_k = r(x_k)$, перепишемо (13), (14) у вигляді

$$\frac{b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}}{h^2} + p_k \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2h} +$$

$$+ q_k \frac{b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1}}{6} + \int\limits_a^b K(x_k, t) \times$$

$$\times \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B(t_i) dt = r_k, k = \overline{0, n}. \quad (15)$$

$$\frac{b_{-1} + 4b_0 + b_1}{6} = \gamma_1, \frac{b_{n-1} + 4b_n + b_{n+1}}{6} = \gamma_2. \quad (16)$$

Система (15), (16) - це система $n+3$ лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів сплайна b_k, $k = \overline{-1, n+1}$. Подамо її у матричному вигляді

$$Ab = r, \quad (17)$$

де $b = (b_{-1}, b_0, ..., b_{n+1})^T$,
$r = (6\gamma_1, h^2 r_0, ..., h^2 r_n, 6\gamma_2)^T$, $a_{-1,0} = 4$,

$$a_{-1,-1} = a_{-1,1} = 1, a_{-1,j} = 0, j = \overline{2, n+1},$$

$$a_{n+1,j} = 0, j = \overline{-1, n-2}$$

$$a_{n+1,n-1} = a_{n+1,n+1} = 1, a_{n+1,n} = 4,$$

$$a_{i,i-1} = 1 - \frac{h}{2}p_i + \frac{h^2}{6}q_i + \frac{h^2}{6}\int\limits_a^b K(x_i, t)dt,$$

$$a_{ii} = -2 + \frac{2h^2}{3}q_i + \frac{2h^2}{3}\int\limits_a^b K(x_i, t)dt,$$

$$a_{i,i+1} = 1 + \frac{h}{2}p_i + \frac{h^2}{6}q_i + \frac{h^2}{6}\int\limits_a^b K(x_i, t)dt, i = \overline{0, n}.$$

Отже, побудова наближеного розв'язку крайової задачі зводиться до розв'язування системи виду (17).

3. Достатні умови збіжності.

Теорема 2. *Нехай існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2) і виконується одна з умов:*

A) $\max\left\{|q(x)| + \int\limits_a^b |K(x,t|\,dt\right\} < 8\left[\frac{4}{3}h^2 + (b-a)^2\right]^{-1}$;

B) $q(x) + \int\limits_a^b |K(x,t)|\,dt < -M < 0$, *де* M *– додатна константа.*

Тоді існує $h_0 > 0$ *таке, що при* $0 < h < h_0$ *система (17) має єдиний розв'язок і правильною є оцінка*

$$\|S(x) - y(x)\|_{C([a,b])} \le \alpha(h), \quad (18)$$

де $\alpha(h) \to 0$ *при* $h \to 0$.

Доведення. Нехай $S(x,y)$ - кубічний сплайн, який інтерполює на сітці $Delta$ розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1), (2), а $S(x)$ – сплайн, що визначається запропонованою схемою апроксимації. Тоді маємо

$$\|S(x) - y(x)\| \le \|S(x) - S(x,y)\| +$$

$$+ \|S(x,y) - y(x)\|. \quad (19)$$

Для другого доданку у правій частині формули (19) має місце оцінка [2]

$$\|S(x,y) - y(x)\| \le K_0 h^2 \omega(y''), \quad (20)$$

де $\omega(y''(x)) = \max\limits_{\substack{\xi,\eta \in [a,b] \\ |\xi - \eta| \le h}} |y''(\xi) - y''(\eta)|$,
$h \le b - a$, – модуль неперервності функції

$y''(x)$. Якщо $y''(x)$ – неперервна функція, то $\omega(y''(x)) \to 0,\ h \to 0$.

Тепер оцінимо перший доданок у правій частині нерівності (19). Представимо $S(x,y)$ через B-сплайни у вигляді

$$S(x,y) = \sum_{m=-1}^{n+1} d_m B_m(x).$$

Тоді,

$$\|S(x) - S(x,y)\| = \left\| \sum_{m=-1}^{n+1} (b_m - d_m) B_m(x) \right\| \le$$
$$\le \max_{-1 \le m \le n+1} |d_m - b_m|.$$

Підставивши $S(x) - y(x)$ у рівняння (1) дістанемо

$$|L[S(x,y) - y(x)]| = \alpha(x,h) \le K\omega(y''(x)), \tag{21}$$

де $K \equiv \max\limits_{x\in[a,b]} \{K_1 + K_2 h|p(x)| + K_0 h^2 |q(x)| + K_0 h^2 \int\limits_a^b |K(x,t)|\, dt\}$.

Оскільки $\omega(y''(x)) \to 0$, при $h \to 0$, то $\alpha(x,h) \to 0$, $h \to 0$, $x \in [a,b]$, зокрема і для $x = x_k$, $k = \overline{0,n}$. Таким чином, з формули (21), врахувавши рівності $L[y(x_k)] = r(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, отримаємо, що $L[S(x_k,y)] = r_k + \alpha_k(h)$, $k = \overline{0,n}$, де $\alpha_k(h) = \alpha(x_k,h)$. Для знаходження коефіцієнтів d_m, $m = \overline{-1,n+1}$, отримаємо аналогічну системі (17) систему рівнянь

$$Ad = r + \varepsilon, \tag{22}$$

де $\varepsilon = (\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n+1})^T$, $\varepsilon_{-1} = 0$, $\varepsilon_i = h^2\alpha_i(h)$, $i = \overline{0,n}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$.

Віднявши рівність (17) від рівності (22), отримаємо систему

$$A(d - b) = \varepsilon. \tag{23}$$

Доведемо теорему при виконанні умови A). Проведемо заміну змінних $y = u \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x p(t)dt\right\}$, яка зведе рівняння (1) до рівняння, в якому відсутній доданок з похідною невідомої функції. Таким чином, замість рівняння (1) розглядатимемо рівняння

$$y''(x) + q(x)y(x) + \int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = r(x).$$

При цьому зміняться елементи матриці A системи (17). Враховуючи їх вигляд, матрицю A можна подати у вигляді $A = D + h^2 C$, де елементи матриць D і C визначаються співвідношеннями

$$d_{-1,-1} = d_{-1,1} = 1,\ \ d_{-1,0} = 4,\ d_{-1,j} = 0,$$
$$j = \overline{2,n+1}, d_{n+1,j} = 0,\ j = \overline{-1,n-2},$$
$$d_{n+1,n-1} = d_{n+1,n+1} = 1, d_{n+1,n} = 4,$$
$$d_{i,i-1} = 1, d_{ii} = -2, d_{i,i+1} = 1, d_{ij} = 0, i = \overline{0,n},$$
$$j = -1, 0, ..., i-2, i+2, ..., n+1,$$
$$h^2 c_{ij} = a_{ij} - d_{ij},\ \ i,j = \overline{-1,n+1}.$$

Враховуючи структуру матриці D, можна отримати наступне твердження [7].

Лема. *Матриця D невироджена і справедливі співвідношення*

$$\det D = (-1)^{n+1} 36n,$$

$$\left\|D^{-1}\right\| \le \frac{1}{8h^2}\left(\frac{4}{3}h^2 + (b-a)^2\right).$$

Переконаємось тепер, що матриця A невироджена і знайдемо оцінку для $\|A^{-1}\|$. Маємо $A^{-1} = \left(E + h^2 D^{-1} C\right)^{-1} D^{-1}$, отже, $\left\|A^{-1}\right\| = \left\|\left(E + h^2 D^{-1} C\right)^{-1} D^{-1}\right\| \le \left\|\left(E + h^2 D^{-1} C\right)^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{8h^2}\left(\frac{4}{3}h^2 + (b-a)^2\right)$.

Якщо

$$\left\|h^2 D^{-1} C\right\| = \nu < 1, \tag{24}$$

то матриця A невироджена.

При цьому,

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{8h^2}\left(\frac{4}{3}h^2 + (b-a)^2\right).$$

Із співвідношення (23) слідує, що

$$\|d - b\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\varepsilon\| \le$$

$$\le \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{4}{3}h^2 + (b-a)^2\right)\frac{1}{8}K\omega(y''(x)).$$

Отже, $\|d - b\| \to 0, h \to 0$.

Знайдемо ν безпосередньо через коефіцієнти рівняння (1). Для цього оцінимо $\|C\| =$

$\max\limits_{-1\le k\le n+1}\sum\limits_{j=-1}^{n+1}|c_{kj}|$. Враховуючи вигляд елементів матриці D і властивості B-сплайнів, отримаємо

$$\|C\|\le\max_{x\in[a,b]}\left\{|q(x)|+\int_a^b|K(x,t)|\,dt\right\}.$$

Очевидно, що нерівність (24) правильна тоді, коли виконуватиметься умова

$$\left\|h^2D^{-1}C\right\|\le$$

$$\le h^2\left\|D^{-1}\right\|\cdot\|C\|\le\left(\frac{4}{3}h^2+(b-a)^2\right)\times$$

$$\times\frac{1}{8}\max_{x\in[a,b]}\left\{|q(x)|+\int_a^b|K(x,t)|\,dt\right\}<1.$$

З останньої нерівності отримуємо обмеження на коефіцієнти рівняння (17), які співпадають з умовою А) теореми 2.

Доведемо тепер теорему 2 при виконанні умови В). Перетворимо систему (17) до системи з матрицею, що має діагональне переважання. У системі (23) позначимо $d-b=f$ і виключимо з системи усі невідомі f_{-1} та f_{n+1}. Врахувавши (16), матимемо

$$f_{-1}=-4f_0-f_1, f_{n+1}=-4f_n-f_{n-1}. \quad (25)$$

Після виключення невідомих f_{-1} та f_{n+1} із системи (23) отримаємо систему

$$\overline{A}\left(\overline{d}-\overline{b}\right)=\overline{\varepsilon}, \quad (26)$$

для якої кожна з величин $\eta_k=|\overline{a}_{kk}|-\sum\limits_{k\ne j}|\overline{a}_{kj}|$ при досить малих h задовольняє нерівність

$$\eta_k\ge -h^2q(x)-h^2\int_a^b|K(x,t)|\,dt.$$

З останньої нерівності маємо, що при виконання умови В) теореми 2 всі $\eta_k>0$, тобто система (26) буде мати переважаючу діагональ. Застосувавши теорему Д.2 [1], отримаємо

$$\max_{0\le k\le n}|f_k|=\max_{0\le k\le n}|d_k-b_k|\le\max_{0\le k\le n}\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}\le$$

$$\le\frac{K}{M}\omega(y'')\to 0,\quad h\to 0. \quad (27)$$

Таким чином, з нерівності (27) і співвідношень (25) випливає, що теорема правильна при виконання умови В.

Теорема 2 доведена.

4. Приклад. Проілюструємо запропоновану обчислювальну схему на тестовому прикладі крайової задачі

$$y''+xy'-x^2y+\tfrac{1}{10}\int_0^1 e^{x+s}y(s)ds=$$
$$=-x^4+x^2+\tfrac{1}{10}e^x(2e-3)+2,$$
$$y(0)=1,\ y(1)=2,$$

точний розв'язок якої $y_T=1+x^2$.

Для цього прикладу справджується умова А) теореми 2. У таблиці 1 наведені значення наближеного розв'язку y_H, точного розв'язку y_T та їх відхилення у вузлах сітки з кроком $h=0,025$.

Табл. 1

x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
y_T	1,0100	1,0900	1,2500	1,4900	1,8100
y_H	1,0281	1,1388	1,3183	1,5609	1,8586
Δ	0,0181	0,0488	0,0683	0,0709	0,0486

Абсолютна похибка не перевищує 0,073, а відносна похибка не перевищує 5,1%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И, Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.:Наука, 1980. – 350с.

2. *Алберг Дж., Нельсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и её приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.

3. *Loscalzo F. R., Talbot T.D.* Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1967. – V.4, N3. – 1967. – P. 433-445.

4. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

5. *Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.К.* Конструктивне методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 220 с.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:Мир, 1970. – 684с.

7. *Черевко И.М., Якимов И.В.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №6. – С.854-860.