УДК 519.21

©2009 р.   І.В. Малик, В.Ю. Береза

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ІНТЕГРАЛОМ ЗА ПУАССОНОВОЮ МІРОЮ

Одержано необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язку стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу з інтегралом за пуассоновою мірою.

We obtain necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability in the mean square of a solution of a neutral type stochastic differential-difference equation with integration relatively to the Poisson measure.

Нехай на імовірнісному базисі [5, 11] $(\Omega, F, P, \Im)$ задано випадковий процес $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^1$, як сильний розв'язок лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (НСДРР)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}\,dt + \{Gx_t\}\,dw(t) + \int_Z \{U(z)x_t\}\,\widetilde{v}\,(dz,dt) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), -h \le t \le 0. \tag{2}$$

де $\Im \equiv \{F_t, t \ge 0\}$ - фільтрація (потік σ - алгебр); $x_t \equiv \{x(t+s), -h \le s \le 0\} \in C([-h,0])$; $\varphi \in S_{[-h,0]}$ - неперервні справа функції, що має лівосторонні границі з простору Скорохода $S_{[-h,0]}$; $w(t) = w(t,\omega)$ - одновимірний випадковий Вінерів процес, що узгоджений з потоком σ - алгебр $\Im$; $\widetilde{v}\,(z,t)$ - центрована пуасонова міра, що узгоджена з $\Im$ і незалежна від $w(t) \equiv w(t,\omega)$; D, L, G, $U(z)$ - різницеві оператори, що задані на просторі $\psi \in S_{[-h,0]}$ співвідношеннями

$$D\psi \equiv \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(-\tau_k),$$

$$L\psi \equiv \alpha\psi(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k \psi(-\tau_k), \tag{3}$$

$$G\psi \equiv f\psi(0) + \sum_{k=1}^{n} g_k \psi(-\tau_k),$$

$$U(z)\psi \equiv u_0(z)\psi(0) + \sum_{k=1}^{n} u_k(z)\psi(-\tau_k),$$

$$0 < \tau_1 < ... < \tau_n \le h.$$

Для НСДРР (1), (2) має місце теорема існування та єдиності [9] з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$ для якого існує $Ex^2(t) < \infty$.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу(НДДРР) [1], [10]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}\,dt \tag{4}$$

за початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), -h \le t \le 0. \tag{5}$$

Наведемо спочатку деякі твердження, які будуть потрібні для подальшого аналізу поведінку розв'язку задачі (1), (2).

Лема 1. [10]. Якщо

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| < 1. \tag{6}$$

то розв'язок $y(t) \equiv 0$ НДДРР (4), (5) є експоненціально стійким тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома

$$V(z) \equiv z\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-z\tau_k}\delta_k\right) - a - \sum_{l=1}^{n} e^{-z\tau_l} b_l \tag{7}$$

лежать в лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, тобто

$$\exists \rho > 0, \forall z \in C : V(z) = 0 \Rightarrow Rez < -\rho. \tag{8}$$

Розглянемо функцію Коші для рівняння (4) $X(t)$ як розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, -h \le t < 0, \\ 1, t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Нагадаємо, що вірне твердження [3, 10], щодо зображення функції Коші $X(t)$ за допомогою характеристичного квазіполінома:

Лема 2. [10] Функція Коші $X(t)$ обчислюється наступним чином

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Rez=\mu} e^{zt} V^{-1}(z) dz\,, \tag{10}$$

де $\mu > -\rho$.

Для здійснення подальшого дослідження доведемо твердження, яке подає розв'язок задачі (1), (2) за розв'язком задачі (4), (5) та $X(t)$:

Теорема 1. Розв'язок НСДРР (1), (2) має стохастичне інтегральне представлення

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t X(t-s) G x_s dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_Z X(t-s) U(z) x_s \widetilde{v}(dz, ds). \tag{11}$$

де $y(t)$ - розв'язок (4), (5), $X(t)$ задається рівністю (10).

Доведення. Враховуючи лінійність функціоналу D, отримаємо

$$Dx_t = Dy_t + \int\limits_0^t DX_{t-s} G x_s dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_Z DX_{t-s} U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, ds),$$

Обчислимо диференціал випадкового процесу Dx_t [6-10]:

$$dDx_t = dDy_t + d\int\limits_0^t DX_{t-s} G x_s dw(s) +$$

$$+ d\int\limits_0^t \int\limits_Z DX_{t-s} U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, ds) =$$

$$= Ly_t dt + DX_0 G x_t dw(t) + \int\limits_0^t d_t DX_{t-s} G x_s dw(s) +$$

$$+ \int\limits_Z DX_0 U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, dt) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_Z d_t DX_{t-s} U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, ds) =$$

$$= Ly_t dt + G x_t dw(t) + \int\limits_Z U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, dt) +$$

$$+ \int\limits_0^t (LX_{t-s} dt)\, G x_s dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_Z (LX_{t-s} dt)\, U(z) x_s d\widetilde{v}(dz, ds) =$$

$$= L\{y_t + \int_0^t X(t-s)Gx_s dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_Z X(t-s)U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, ds)\}dt + Gx_t dw(t)$$

$$+ \int_Z U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, dt) =$$

$$= Lx_t dt + Gx_t dw(t) + \int_Z U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, dt). \tag{12}$$

Тут використали формулу обчислення диференціала від інтегралу Іто та інтеграла за пуассоновою мірою, як функції верхньої межі, а також перестановку оператора L з операцією інтегрування, що обґрунтована лінійністю оператора L [2]. Таким чином, випадковий процес, який задано (11), задовольняє лінійне НСДРР (1). Теорема 1. доведена.

Означення 1. Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) назвемо експоненційно стійким, якщо існують сталі $M > 0$ і $c > 0$, такі що $\forall t \geq 0$ і $\forall \varphi \in \mathbf{C}([-h, 0])$

$$Ex^2(t) \leq Me^{-ct} E \left\| \varphi \right\|^2, \tag{13}$$

де $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-h \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$.

Обчислимо $Ex^2(t)$:

$$Ex^2(t) = E(y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_Z X(t-s)U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, ds))^2 =$$

$$= Ey^2(t) + \int_0^t X^2(t-s) \times$$

$$\times E\left[(Gx_s)^2 + \int_Z (U(z)x_s)^2 \Pi(dz) \right] ds.$$

Дане рівняння незручне для дослідження на стійкість в середньому квадратичному ($l.i.m.$) $x(t)$, оскільки права сторона рівняння містить не значення самої функції, а функціонал від x. Зробимо деякі перетворення, щоб зняти цю "незручність".

Припустимо, що P - деякий лінійний неперервний оператор, який застосуємо до рівняння (11):

$$Px_t = Py_t + \int_0^t PX_{t-s}Gx_s dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_Z PX_{t-s}U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, ds). \tag{14}$$

Обчислимо $E\left(Px_t\right)^2$:

$$E\left(Px_t\right)^2 = E(Py_t + \int_0^t PX_{t-s}Gx_s dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_Z PX_{t-s}U(z)x_s d\widetilde{v}(dz, ds))^2 =$$

$$= E\left(Py_t\right)^2 +$$

$$+ \int_0^t \left(PX_{t-s}\right)^2 E\left(Gx_s\right)^2 +$$

$$+ \int_0^t \left(PX_{t-s}\right)^2 \int_Z E\left(U(z)x_s\right)^2 \Pi(dz) ds. \tag{15}$$

Нехай $P = G$, тоді (15) перепишемо у вигляді

$$E\left(Gx_t\right)^2 = E\left(Gy_t\right)^2 + \int_0^t \left(GX_{t-s}\right)^2 \times$$

$$\times \left[E\left(Gx_s\right)^2 + \int_Z \left(U(z)x_s\right)^2 \Pi(dz) \right] ds. \tag{16}$$

Якщо $P = \int\limits_Z U(z)\widetilde{v}(dz, [0, t])$, тоді аналогічно отримаємо співвідношення

$$E\Big(\int\limits_Z (U(z)x_s)^2\,\Pi(dz)\Big) = E\Big(\int\limits_Z (U(z)y_s)^2\,\Pi(dz)\Big)+$$

$$+\int\limits_0^t\left(\int\limits_Z (U(z)X_s)^2\Pi(dz)\right)*$$

$$*\left[E\,(Gx_s)^2+\int\limits_Z (U(z)x_s)^2\,\Pi(dz)\right]ds. \quad (17)$$

Додамо функціональні рівняння (16) та (17):

$$E\,(Gx_t)^2+E\left(\int\limits_Z (U(z)x_s)^2\,\Pi(dz)\right)=$$

$$=E\,(Gy_t)^2+E\left(\int\limits_Z (U(z)y_t)^2\,\Pi(dz)\right)+$$

$$+\int\limits_0^t\left[(GX_{t-s})^2+\int\limits_Z (U(z)X_{t-s})^2\,\Pi(dz)\right]*$$

$$*\left[E\,(Gx_s)^2+E\int\limits_Z (U(z)x_s)^2\,\Pi(dz)\right]ds. \quad (18)$$

Введемо наступне позначення

$$R\psi_t\equiv(G\psi_t)^2+\int\limits_Z (U(z)\psi_t)^2\,\Pi(dz). \quad (19)$$

Зауважимо, що функціонал R не є лінійний. Рівність (18) можна переписати в наступному вигляді на розв'язках НСДРР

$$ERx_t=Ry_t+\int\limits_0^t RX_{t-s}ERx_s ds. \quad (20)$$

Дане рівняння, як відомо [9],є рівнянням відновлення. Тому можна стверджувати, що ERx_t поводить себе як експонента [9], а для асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ потрібно, щоб розв'язок поводив себе, як експонента у від'ємній степені.

Для подальшого розгляду доведемо факт, який пов'язує поведінку функціонала ERx_t з поведінкою $Ex^2(t)$.

Лема 3. При $R\neq 0$ мають місце наступні факти:

$$1. \lim_{t\to\infty} ERx_t=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} Ex^2(t)=0;$$

$$2. \lim_{t\to\infty} ERx_t=\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} Ex^2(t)=\infty.$$

Доведення. 1. Припустимо, $\lim\limits_{t\to\infty} Ex^2(t)=0$.

Тоді $\mathop{lim}\limits_{t\to\infty} E\,(Gx_t)^2=0$ і $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_Z (U(z)x_t)^2\,\Pi(dz)=0$.

Тобто $\lim\limits_{t\to\infty} ERx_t=0$.

Доведемо обернене твердження. Нехай $\lim\limits_{t\to\infty} ERx_t=0$. Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} Ex^2(t)=c>0$. Але при цьому припущенні отримуємо, що виконується хоча б одна з нерівностей $\mathop{lim}\limits_{t\to\infty} E\,(Gx_t)^2>0$ або $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_Z (U(z)x_t)^2\,\Pi(dz)>0$. Тобто $\lim\limits_{t\to\infty} ERx_t>0$. Прийшли до суперечності. Пункт 1 доведено.

Пункт 2 доводиться по аналогії.

Теорема 2. Нехай виконується умови (6) і (8) для коефіцієнтів лінійного НДДРР (4) і коренів його характеристичного квазіполінома (7). Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в $l.i.m.$ розв'язку (1), (2) є виконання інтегральної нерівності

$$B\equiv\int\limits_0^\infty RX_t dt<1, \quad (21)$$

Доведення. Оскільки (20) є рівняння відновлення [9], то слід використати для ього перетворення Лапласа [4]. Отримаємо наступне співвідношення

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt=\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERy_tdt+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-zt}\int\limits_0^t RX_{t-s}ERx_sdsdt=\int\limits_0^\infty e^{-zt}Ry_tdt+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt\int\limits_0^\infty e^{-zt}Rx_tdt. \qquad (22)$$

Перепишемо (22) у наступному вигляді

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt=\frac{\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERy_tdt}{\left(1-\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt\right)}. \qquad (23)$$

Нагадаємо, що оригінал перетворення Лапласа на безмежності поводить себе як експонента в степені λ_0, де λ_0 - полюс з найбільшою дійсною частиною перетворення Лапласа. Тобто для визначення поведінки в $l.i.m.$ ERx_t потрібно визначити дійсну частину λ_0. Не втрачаючи загальності припускаємо, що в записі (22) чи (23) $Imz=0$, тобто $z\in R^1$.

Пошук полюсів функції $\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt$ рівносильний пошуку нулів функції $1-\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt$. Тобто, потрібно розв'язати рівняння відносно z

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt=1. \qquad (24)$$

Функція $\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt$, як функція дійсного аргументу, є спадною.

Достатність. Припустимо, що виконується (21), тоді на основі вищесказаного:

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt<1,\forall z\ge 0.$$

Отже, функція $1-\int\limits_0^\infty e^{-zt}RX_tdt$ не має нулів при $z\ge 0$, що в свою чергу означає, що функція $\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt$ не має полюсів при невід'ємних значеннях z. Тоді всі полюси

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_tdt$$

знаходяться в області $z<0$. Тобто ERx_t, як оригінал перетворення Лапласа, поводить себе як експонента у від'ємній степені. А за лемою 3 матимемо [4]

$$\lim_{t\to\infty}Ex^2(t)=0.$$

Необхідність. Припустимо, що розв'язок (1), (2) асимптотично стійкий в середньому квадратичному. Тоді за лемою 3 $\lim\limits_{t\to\infty}ERx_t=0$. Припустимо, що умова (21) не виконується, тобто

$$\int\limits_0^\infty RX_tdt\ge 1.$$

А це на основі леми 3 та попередніх міркувань неможливо. Прийшли до суперечності, тобто виконується (21). Теорема 2. доведена.

Теорема 3. Нехай виконується умови (6) і (8) для коефіцієнтів НДДРР (4) і коренів його характеристичного квазіполінома (7). Тоді при $B>1$ буде мати місце наступний факт: в будь - якому околі нуля знайдеться початкова функція $\varphi(t)\in C([-h,0])$ така, що

$$\lim_{t\to\infty}Ex^2(t)=\infty. \qquad (25)$$

Доведення. Справді, припустимо, що виконується (25). Оскільки $\int\limits_0^\infty RX_tdt>1$ і $\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERX_tdt$, як функція дійсного аргументу, є спадною функцією, причому

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERX_t dt = 0.$$

Тому існує $z_0 > 0$ таке, що $\int\limits_0^\infty e^{-z_0 t}RX_t dt = 1$. Це ж в свою чергу означає згідно (23), що $\int\limits_0^\infty e^{-zt}ERx_t dt$ має полюси при $z > 0$ [4]. А це означає, що оригінал ERx_t поводить себе як експонента в додатній степені. На основі леми 3

$$\lim_{t\to\infty} Ex^2(t) = \infty.$$

Теорема 3 доведена.

Автори висловлюють вдячність за корисні поради та допомогу в роботі проф. Ясинському В.К.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально – дифференциальных уравнений. – М.:Наука, 1991. – 280 с.

2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа// Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1981. – Т.19. – С.55 – 126.

3. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально – разностные уралвнения – М.: Мир, 1967. – 545 с.

4. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

5. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – М:Физматизд, 1994. - Т.2 – 473 с.

6. *Малик І.В., Ясинський В.К.* Експоненціальна поведінка в середньому квадратичному розв'язку стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2008. № 8.- С. 22-27.

7. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально – функциональных уравнений . – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

8. *Царков Є.Ф., Малик І.В.* Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2008. № 7.- С. 52-57.

9. *Царков Є.Ф., Малик І.В.* Існування розв'язку стохастичного диференціально – функціональног рівнянь Вольтерівського типу// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць.Вип 421.Математика. – Чернівці: Рута , 2008. С. 112 - 120.

10. *Hale. J.* Theory of Functional Differential Equations (Springer, 1978).

11. *Gihman I.I., Skorohod A.V.* Stochastic Differential Equations (Springer, 1972).