УДК 517.9

©2009 р. А.П. Креневич, В.В. Могильова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний університет харчових технологій, Київ

АСИМПТОТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Використовуючи метод послідовних наближень Пікара, отримано результати щодо існування і єдиності розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь в банаховому просторі. Встановлено достатні умови асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь відповідним звичайним диференціальним рівнянням.

Using Picard's method we obtain some results concerning sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of singular differential equations in a Banach space. Also, we find some sufficient conditions for the asymptotic equivalence of singular differential equations and the corresponding ordinary differential equations.

Вступ Розглядається банахів простір B – з нормою $\|\cdot\|$. В цьому просторі розглядається сингулярне диференціальне рівняння

$$d[x(t) - g(t, x(t))] = f(t, x(t))dt, \qquad (1)$$

$t \in [0, T]$, $x \in B$, $f(t, x), g(t, x)$ – деякі функції дійсної змінної t та $x (\in B)$ зі значеннями в B. Надалі ми будемо припускати, що $f(t, x)$ та $g(t, x)$ неперервні по змінній t.

У роботі досліджуються питання, пов'язані із поведінкою розв'язків рівняння (1) при $t \to \infty$. Перш за все виникає питання про існування розв'язків цього рівняння. Для даного класу рівнянь автору відома лише локальна теорема існування і єдиності, тому перший розділ роботи присвячений існуванню і єдиності розв'язків рівняння (1) на півосі.

У другому розділі для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь застосовано механізм відшукання звичайного диференціального рівняння, асимптотична поведінка розв'язків якого є подібною до поведінки розв'язків вихідного рівняння. Таким чином дослідження вихідного рівняння зводиться до дослідження простішого рівняння. Такі рівняння будуть називатися асимптотично еквівалентними. Зауважимо, що даний підхід, взагалі кажучи, не є новим. У [1] наведено теорему Левінсона, а в монографії [2] дана теорема узагальнюється на випадок банахового простору. У роботах автора [3-5] дане питання досліджено для стохастичних диференціальних рівнянь.

1. Існування і єдиність Спочатку отримаємо допоміжний результат. Розглянемо рівняння

$$x(t) = g(t, x(t)) + f(t), \qquad (2)$$

де $f(t)$ – деяка неперервна функція дійсної змінної t зі значеннями в B.

Теорема 1. *Нехай функція $g(t, x)$ задовольняє умовам*
а)існує додатна стала M_g, що для довільних $x \in B, t \in [0, T]$ виконується нерівність

$$\|g(t, x)\| \le M_g(1 + \|x\|), \qquad (3)$$

б)існує додатна стала $L_g < 1$, що для довільних $x, y \in B, t \in [0, T]$ виконується нерівність

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \le L_g\|x - y\|. \qquad (4)$$

Тоді рівняння (2) має єдиний неперервний на $[0, T]$ розв'язок.

Доведення. Для доведення теореми розглянемо банаховий простір B_T – неперервних на $[0,T]$ функцій $x(t)$ з нормою

$$\|x\|_{B_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\| < \infty.$$

У B_T введемо оператор Φ, що діє за правилом

$$(\Phi x)(t) = g(t, x(t)) + f(t).$$

Нерівність

$$\|(\Phi x)(t)\|_{B_T} \le \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\| + M_g(1 + \|x\|_{B_T})$$

показує, що простір B_T інваріантний по відношенню до перетворення Φ. Для довільних $x, y \in B_T$ розглянемо різницю

$$\|(\Phi x) - (\Phi y)\|_{B_T} =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \|g(t, x(t)) - g(t, y(t))\| \le$$

$$\le L_g \sup_{t\in[0,T]} \|x(t) - y(t)\| = L_g\|x(t) - y(t)\|_{B_T}.$$

За умовою теореми $L_g < 1$. Отже, оператор Φ є оператором стиску в B_T, а тому рівняння $x(t) = (\Phi x)(t)$ має єдиний розв'язок. Теорему доведено.

Повернемося до дослідження існування і єдиності розв'язків рівняння (1).

Теорема 2. *Припустимо, що функція $g(t,x)$ задовольняє умовам (3),(4) теореми 1, а функція $f(t,x)$ така, що*
а)існує додатна стала M_f, що для довільних $x \in B, t \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\|f(t,x)\| \le M_f(1 + \|x\|), \qquad (5)$$

б)існує додатна стала L_f, що для довільних $x, y \in B, t \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_f\|x - y\|. \qquad (6)$$

Тоді при довільній початковій умові

$$x(0) = x_0 \in B \qquad (7)$$

диференціальне рівняння (1) має на $[0,T]$ єдиний розв'язок.

Доведення. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 - g(0, x_0) + g(t, x(t)) + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau, \qquad (8)$$

котре, як легко бачити, еквівалентне диференціальному рівнянню (1) з початковою умовою (7).

Доведення теореми проведемо використовуючи метод послідовних наближень Пікара. Розглянемо наступну ітераційну схему

$$x_{n+1}(t) = x_0 - g(0, x_0) +$$

$$+ g(t, x_{n+1}(t)) + \int_0^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau, , n \ge 0, \qquad (9)$$

$$x_0(t) = x_0 - g(0, x_0).$$

З теореми 1 випливає, що рівняння (9) має єдиний розв'язок на $[0,T]$ відносно $x_{n+1}(t)$. Таким чином ітераційна схема є коректною.

Доведемо збіжність послідовності $x_n(t)$.

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le \|g(t, x_1(t))\| +$$

$$+ \int_0^t \|f(\tau, x_0(\tau))\|d\tau \le L_g\|x_1(t) - x_0(t)\| +$$

$$+ \|g(t, x_0(t))\| + \int_0^t \|f(\tau, x_0(\tau))\|d\tau.$$

Таким чином отримуємо

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le K_1(x_0),$$

де

$$K_1(x_0) = \frac{(M_g + M_f T)(1 + \|x_0(t)\|)}{(1 - L_g)}.$$

Далі, для $n \ge 1$

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \le L_g\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| +$$

$$+ L_f \int_0^t \|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)\|d\tau,$$

звідки

$$\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\| \le L\int\limits_0^t \|x_n(\tau)-x_{n-1}(\tau)\|d\tau,$$

де $L = L_f/(1-L_g)$. Таким чином, з останньої нерівності отримаємо

$$\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+1}(s)-x_n(s)\| \le$$

$$\le L\int\limits_0^t \sup_{s\in[0,\tau]}\|x_n(s)-x_{n-1}(s)\|d\tau.$$

Інтегруючи останню нерівність, отримаємо

$$\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+1}(s)-x_n(s)\| \le \frac{(LT)^n}{n!}K_1(x_0).$$

Таким чином зі збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{s\in[0,T]}\|x_{n+1}(s)-x_n(s)\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(LT)^n}{n!}K_1(x_0),$$

випливає рівномірна на $[0,T]$ збіжність послідовності $x_n(t)$ до деякого $x(t)$. Перейшовши до границі при $n\to\infty$ у рівності (9), переконуємося, що $x(t)$ є розв'язок задачі (1) з початковою умовою (7). Доведемо єдиність неперервного розв'язку задачі (1),(7). Нехай $x(t)$, $y(t)$ – два різних розв'язки рівняння (8). Оцінивши різницю між ними аналогічно до вищенаведених оцінок, отримаємо

$$\sup_{s\in[0,t]}\|x(s)-y(s)\| \le L\int\limits_0^t \sup_{s\in[0,\tau]}\|x(s)-y(s)\|d\tau,$$

З останньої нерівності та нерівності Гронуолла-Беллмана випливає

$$\sup_{s\in[0,T]}\|x(s)-y(s)\| = 0.$$

Теорему доведено.

2. Асимптотична еквівалентність

Розглядається $(H,(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ – сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. В H розглядається диференціальне рівняння

$$dx(t) = Ax(t)dt, \qquad (10)$$

де $t\in[0,\infty)$, $x(\cdot)\in H$, A – лінійний, обмежений оператор. Поруч із рівнянням (10) розглядається сингулярне диференціальне рівняння виду

$$d[y(t)-g(t,y(t))] = (A+R(t))y(t))dt, \qquad (11)$$

де $y(\cdot)\in H$, $R(t)$ – неперервна по t оператор-функція, обмежена на $[0,\infty)$, $g(t,x)$ – неперервна по t оператор-функція, така, що а)існує невід'ємна, обмежена при $t\ge 0$ функція $q(t)$, що для довільних $x\in H, t\ge 0$ виконується нерівність

$$\|g(t,x)\| \le q(t)(1+\|x\|), \qquad (12)$$

б)існує додатна стала $L_g<1$, що для довільних $x,y\in H, t\ge 0$ виконується нерівність

$$\|g(t,x)-g(t,y)\| \le L_g\|x-y\|. \qquad (13)$$

Очевидно, що при вищенаведених умовах кожне з рівнянь (10) та (11) при довільній початковій умові має єдиний на півосі $[0,\infty)$ розв'язок.

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ рівняння (11) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ рівняння (10), такий, що*

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-y(t)| = 0,$$

то рівняння (11) називається асимптотично еквівалентним рівнянню (10).

Наступна теорема є узагальненням теореми Левінсона (див., наприклад, [1,ст.159]) на випадок сингулярних диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі.

Теорема 3. *Нехай розв'язки рівняння (10) обмежені на $[0,\infty)$, причому спектр оператора A складається з двох спектральних множин [2, ст.32]*

$$\sigma(A) = \sigma_-(A)\bigcup\sigma_0(A),$$

таких, що $\sigma_-(A) \subset \{z \in \boldsymbol{C} | Re z < 0\}$*, а* $\sigma_0(A) \subset \{z \in \boldsymbol{C} | Re z = 0\}$.
Нехай

$$\int_0^\infty \big(q(t) + \|R(t)\|\big) dt < \infty, \qquad (14)$$

причому $q(t) \to 0, t \to \infty$. *Тоді рівняння (11) асимптотично еквівалентне рівнянню (10).*

Доведення. З умов теореми випливає, що розв'язок $y(t)$ рівняння (11) існує і єдиний на додатній півосі при початковій умові $y(0) = y_0$. Представимо його в інтегральній формі використовуючи, $X(t) = e^{At}$ – операторну експоненту [2, ст.41], що відповідає рівнянню (10).

$$y(t) = X(t)(y_0 - g(0, y_0)) + g(t, y(t)) + \\ + \int_0^t X(t-s) A g(s, y(s)) ds + \\ + \int_0^t X(t-s) R(s) y(s) ds. \qquad (15)$$

Враховуючи обмеженість розв'язків рівняння (10) на додатній півосі, їх представлення через операторну експоненту та користуючись теоремою Банаха-Штейнгауза [2, ст.21], отримаємо, що сукупність $X(t)$ є рівномірно обмеженою:

$$\|X(t)\| \le K_X,$$

де K_X незалежна від t додатна стала. Покажемо, що всі розв'язки $y(t)$ рівняння (11) будуть обмеженими на додатній півосі. Дійсно, з рівності (15) отримаємо нерівність

$$\|y(t)\| \le \|X(t)(y_0 - g(0, y_0))\| + \|g(t, y(t))\| + \\ + \int_0^t \|X(t-s) A g(s, y(s))\| ds + \\ + \int_0^t \|X(t-s) R(s) y(s)\| ds,$$

з якої, використовуючи лему Гронуолла-Беллмана, отримаємо, існування додатної сталої $\widetilde{K} \equiv \widetilde{K}(y_0)$, що

$$\|y(t)\| \le \widetilde{K}. \qquad (16)$$

Далі, враховуючи умови теореми та [2, ст.33], отримуємо, що H розкладається в пряму суму гільбертових підпросторів

$$H = H_- \oplus H_0 = P_- H \oplus P_0 H,$$

де H_- - інваріантний підпростір, що відповідає спектральній множині $\sigma_-(A)$, P_- – ортопроектор на H_-, H_0 - інваріантний підпростір, що відповідає спектральній множині $\sigma_0(A)$, P_0 – ортопроектор на H_0. Таким чином рівняння (10) еквівалентне системі двох незалежних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = A_- x_1, \frac{dx_2}{dt} = A_0 x_2, \qquad (17)$$

де $x_1 = P_- x, x_2 = P_0 x, A_- = P_- A, A_0 = P_0 A$.

Тоді $X(t)$ розпадається в пряму суму

$$X(t) = X_-(t) + X_0(t),$$

де

$$X_-(t) = e^{A_- t},\ X_0(t) = e^{A_0 t}.$$

Враховуючи еволюційну властивість операторної експоненти, перепишемо співвідношення (15) у наступному вигляді

$$y(t) = X(t) \Bigg[y_0 - g(0, y_0) + \\ + \int_0^\infty X_0(-\tau) A g(\tau, y(\tau)) d\tau + \\ + \int_0^\infty X_0(-\tau) R(\tau) y(\tau) d\tau \Bigg] + \\ + g(t, y(t)) - \int_t^\infty X_0(t-\tau) A g(\tau, y(\tau)) d\tau - \\ - \int_t^\infty X_0(t-\tau) R(\tau) y(\tau) d\tau +$$

$$+\int_0^t X_-(t-\tau)Ag(\tau,y(\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^t X_-(t-\tau)R(\tau)y(\tau)d\tau. \qquad (18)$$

Кожному розв'язку $y(t)$ рівняння (11) з початковою умовою $y(0)=y_0$ поставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ рівняння (10) з початковою умовою

$$x(0)=y_0-g(0,y_0)+\int_0^\infty X_0(-\tau)Ag(\tau,y(\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^\infty X_0(-\tau)R(\tau)y(\tau)d\tau. \qquad (19)$$

З того, що розв'язки рівняння (10) є обмеженими на додатній півосі, випливає рівномірна обмеженість на всій дійсній осі оператора $X_0(t)$ [2,ст.163-165]

$$\sup_{t\in(-\infty,+\infty)} \|X_0(t)\| \le K_{X_0}$$

З вище сказаного та з нерівності (16) отримуємо, що всі невласні інтеграли у рівності (19) збігаються.

Оскільки спектр оператора A_- лежить у лівій півплощині, то існує стала $\lambda>0$, така, що для всіх $t\ge 0$ виконується оцінка

$$\|X_-(t)\| \le e^{-\lambda t}.$$

Оскільки розв'язки $x(t)$ лінійного рівняння (10) і розв'язки $y(t)$ сингулярного рівняння (11) однозначно визначаються початковими умовами, то формула (19) встановлює однозначну відповідність між множиною розв'язків $\{y(t)\}$ рівняння (11) та множиною розв'язків $\{x(t)\}$ рівняння (10).

Оцінимо різницю між відповідними розв'язками

$$\|x(t)-y(t)\| \le \|g(t,y(t))\|+$$

$$+\int_t^\infty \|X_0(t-\tau)\|\cdot\|A\|\cdot\|g(\tau,y(\tau))\|d\tau+$$

$$+\int_t^\infty \|X_0(t-\tau)\|\cdot\|R(\tau)\|\cdot\|y(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_0^t \|X_-(t-\tau)\|\cdot\|A\|\cdot\|g(\tau,y(\tau))\|d\tau+$$

$$+\int_0^t \|X_-(t-\tau)\|\cdot\|R(\tau)\|\cdot\|y(\tau)\|d\tau \le$$

$$\le K_0 q(t)+K_2\int_t^\infty r(\tau)d\tau+K_1\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}r(\tau)d\tau,$$

де $r(\tau)\equiv\big(q(\tau)+\|R(\tau)\|\big)$, $K_0\equiv(1+\widetilde{K})$, $K_1\equiv\max\{\|A\|K_0,\widetilde{K}\}$, $K_2\equiv K_1K_{X_0}$.

Прямування до нуля перших двох доданків останньої нерівності очевидним способом отримується з умов теореми. Прямування до нуля третього доданку показано в [1, ст.164]. Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-y(t)\|=0.$$

Теорему доведено.

Висновки У роботі отримано результати щодо диференціальних рівнянь сингулярного типу. Для таких рівнянь отримано теорему існування і єдиності їх розв'язків на півосі, а також отримано умови асимптотичної еквівалентності даного класу рівнянь звичайним диференціальним рівнянням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М.:Наука, 1970. – 534 с.
3. *Креневич А.П.* Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // УМЖ.–2006.–58, №10.–С.1368–1384.
4. *Креневич А.П.* Асимптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто // Нелінійні коливання. Інститут математики НАН України.–2006.–9, №2.–С.213–220.
5. *Krenevych A.* Asymptotic Equivalence Of the solutions of The Linear Stochastic Ito Equations in the Hilbert space //Theory of Stochastic Processes.–2007.–13(29), №1–2.–P.103–109.