УДК 517.982

©2009 р. І. В. Красікова

Запорізький національний університет

ДОСТАТНІ УМОВИ ВУЗЬКОСТІ ФУНКЦІОНАЛІВ НА ПРОСТОРІ L_∞

Добре відомо, що кожний компактний оператор, заданий на симетричному просторі функцій з абсолютно неперервною нормою є вузьким. З іншого боку, на просторі L_∞ існує не вузький лінійний неперервний функціонал. Ми встановлюємо достатні умови вузькості функціоналів з простору L_∞^*.

It is well known that every compact operator acting from a symmetric function space with an absolutely continuous norm is narrow. On the other hand, there exists a non-narrow linear continuous functional on the space L_∞. We find some sufficient conditions on a functional from L_∞^* to be narrow.

Вступ

Ми використовуємо стандартну термінологію і позначення з теорії банахових просторів [2] і теорії векторних ґраток [1]. В замітці банахів простір L_∞ розглядається над полем дійсних скалярів як банахова ґратка з порядком: $x \le y$, якщо $x(t) \le y(t)$ для майже всіх $t \in [0,1]$. Добре відомо, що ґратка L_∞ є порядково повною, тобто, кожна непорожня порядково обмежена множина має точні верхню і нижню межі, а порядково обмежені множини в цій ґратці збігаються з обмеженими відносно норми множинами.

Поняття вузького оператора було введемо А. Плічком і М. Поповим у 1990 р. в роботі [4]. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з додатною скінченною мірою. Нагадаємо, що банахів простір E класів еквівалентних вимірних функцій $x : \Omega \to \mathbb{R}$ називається *симетричним*, якщо:

(i) для кожного $y \in E$ з умови $|x(\omega)| \le |y(\omega)|$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ випливає $x \in E$ та $\|x\| \le \|y\|$;

(ii) з умов $y \in E$ та $d_{|x|}(t) = d_{|y|}(t)$ для всіх $t \ge 0$ випливає, що $x \in E$ та $\|x\| = \|y\|$, де

$$d_z(t) = \mu\{\omega \in \Omega : \, z(\omega) > t\}.$$

Кажуть, що норма $\|\cdot\|$ на симетричному просторі E *абсолютно неперервна*, якщо $\lim\limits_n \|\chi(A_n) \cdot x\| = 0$ для кожного $x \in E$ і кожної спадної послідовності вимірних множин $A_n \subseteq \Omega$ з порожнім перетином (через $\chi(A)$ ми позначаємо характеристичну функцію множини A).

Нехай E – симетричний банахів простір на просторі з безатомною мірою (Ω, Σ, μ); X – довільний банахів простір. Лінійний неперервний оператор $T : E \to X$ називається:

– вузьким, якщо для будь-яких $A \in \Sigma$ та $\varepsilon > 0$ існує елемент $x \in E$ такий, що $|x| = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ і $\|Tx\| < \varepsilon$;

– строго вузьким, якщо для довільної множини $A \in \Sigma$ існує $x \in E$ такий, що $|x| = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ і $Tx = 0$.

Якщо норма на E є абсолютно неперервною, то умова $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ в означенні вузького оператора може бути усунутою [4]. Нам невідомо, чи є ця умова також зайвою для операторів, визначених на просторі L_∞. В розділі 2 ми встановлюємо частковий результат в цьому напрямку, який буде використаний нижче.

Неважко довести, що кожний компактний оператор $T : E \to X$, заданий на симетричному банаховому просторі E з абсолютно неперервною нормою на просторі з безатомною мірою (Ω, Σ, μ), є вузьким [4] (згідно з [5], для кожного $A \in \Sigma$ система Радемахера $(r_n)_{n=1}^\infty$ в просторі $E(A) = \{x \in$

$E: \operatorname{supp} x \subseteq A\}$ слабко прямує до нуля, а отже, $(Tr_n)_{n=1}^{\infty}$ сильно прямує до нуля в X).

Проте компактний оператор (навіть, функціонал) на просторі L_∞ не зобов'язаний бути вузьким [3]. Наведемо відповідний приклад з [3]. Нехай $\overline{\mathcal{B}}$ – булева алгебра класів еквівалентних (тобто, міра Лебеґа симетричної різниці яких рівна нулю) борелівських підмножин відрізка $[0,1]$ і $\mathcal{U}$ – довільний ультрафільтр на $\overline{\mathcal{B}}$. Тоді лінійний функціонал $f_{\mathcal{U}}: E \to \mathbb{R}$, заданий формулою

$$f_{\mathcal{U}}(x) = \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A x d\mu, \qquad (1)$$

є обмеженим і невузьким. Реальна причина, через яку функціонал $f_{\mathcal{U}}$ не є вузьким, – це відсутність його порядково-нормованої неперервності, поняття, яке розглядається для відображень з векторної ґратки у нормований простір.

Кажуть, що напрямленість (x_α) у векторній ґратці E порядково збігається до елемента $x \in E$ (позначення: $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$), якщо існує напрямленість (y_α) в E (з тими самими індексами) така, що $|x_\alpha - x| \le y_\alpha$ для кожного α і $y_\alpha \downarrow 0$ (остання умова означає, що напрямленість (y_α) є незростаючою і $\inf\limits_\alpha y_\alpha = 0$). При цьому також кажуть, що напрямленість (x_α) є порядково збіжною в E, а елемент x є порядковою границею цієї напрямленості. Відображення $f: E \to X$ з векторної ґратки E в нормований простір X називається *порядково-нормовано неперервним*, якщо для довільної напрямленості (x_α) з E і довільного $x \in E$ з умови $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ випливає, що $\|f(x_\alpha) - f(x)\| \to 0$. Підмножина A векторної ґратки E називається порядково замкненою, якщо для довільної напрямленості (x_α) з A і довільного $x \in E$ з умови $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ випливає, що $x \in A$.

Нехай E – векторна ґратка і X – банахів простір. Лінійний оператор $T: E \to X$ називається *AM-компактним*, якщо порядково обмежені множини він переводить у відносно компактні підмножини простору X. Якщо E – банахова ґратка, то кожний AM-компактний оператор є обмеженим [3]. Крім того, кожний компактний оператор з банахової ґратки в банахів простір є AM-компактним, але навпаки не вірно.

Позитивний результат про вузькість AM-компактних операторів, заданих на просторі L_∞, одержано в [3]: для довільного банахового простору X кожний AM-компактний порядково-нормовано неперервний лінійний оператор $T: L_\infty(\mu) \to X$ є вузьким. Функціонал на L_∞, заданий формулою (1), є AM-компактним (як і будь-який інший обмежений функціонал) і не вузьким оператором, а отже, не є порядково-нормовано неперервним.

Дана замітка присвячена знаходженню інших достатніх умов вузькості лінійних неперервних функціоналів на просторі L_∞.

Через $\mathcal{B}$ ми позначаємо борелівську σ-алгебру підмножин відрізка $[0,1]$; через λ – міру Лебеґа на $\mathcal{B}$. Крім того, позначимо $\mathcal{B}^+ = \{A \in \mathcal{B}: \lambda(A) > 0\}$. Для довільної множини $A \in \mathcal{B}$ через $L_\infty(A)$ ми позначаємо підпростір L_∞, що складається з елементів $x \in L_\infty$ з носіями $\operatorname{supp} x \subseteq A$. Символом $B(X)$ ми позначаємо замкнену одиничну кулю банахового простору X. Підпростір Y лінійного простору X називається ко-скінченновимірним, якщо $\dim X/Y < \infty$, а корозмірністю Y називається розмірність фактор-простору X/Y.

Вузькість порядково-нормовано неперервних операторів, визначених на L_∞

Теорема 2.1. *Нехай X – банахів простір. Порядково-нормовано неперервний оператор $T: L_\infty \to X$ є вузьким тоді і тільки тоді, коли для довільних $A \in \mathcal{B}$ і $\varepsilon > 0$ існує $x \in L_\infty$ такий, що $|x| = \chi_A$ і $\|Tx\| < \varepsilon$.*

Іншими словами, для порядково-нормовано неперервного оператора $T: L_\infty \to X$ умову $\int\limits_{[0,1]} x\, d\lambda = 0$ в означенні вузького оператора можна усунути.

Для доведення нам потрібні дві леми. Доведення першої з них, фактично, запозичене з [4], а друга є, скоріше всього, добре відомим фактом.

Лема 2.2. *Нехай* X *– банахів простір і* $T : L_\infty \to X$ *– лінійний оператор. Нехай для довільних* $A \in \mathcal{B}$ *і* $\varepsilon > 0$ *існує* $x \in L_\infty$ *такий, що* $|x| = \chi_A$ *і* $\|Tx\| < \varepsilon$. *Тоді для довільних* $A \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ *і* $\varepsilon > 0$ *існує* $x \in L_\infty$ *такий, що* $|x| = \chi_A$, $\Big|\int\limits_{[0,1]} x\,d\lambda\Big| < 1/n$ *і* $\|Tx\| < \varepsilon$.

Доведення леми 2.2. Зафіксуємо $A \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Розіб'ємо множину A на n попарно неперетинних підмножин $A_1, A_2, ..., A_n$ однакової міри. Виберемо функції $x_k \in L_\infty$, $1 \le k \le n$ так, щоб $|x_k| = \chi(A_k)$ і $\|Tx_k\| < \varepsilon/n$. Покладемо $\alpha_k = \int\limits_{[0,1]} x_k d\lambda$. Оскільки

$$|\alpha_k| \le \frac{\lambda(A)}{n}$$

для кожного $1 \le k \le n$, то можна вибрати знаки $\theta_k = \pm 1$ так, щоб

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \theta_k \alpha_k\Big| \le \frac{\lambda(A)}{n}.$$

Тоді для

$$x = \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k$$

отримаємо $|x| = \chi(A)$, $\Big|\int\limits_{[0,1]} x\,d\lambda\Big| \le \frac{\lambda(A)}{n}$ і $\|Tx\| < \varepsilon$. $\square$

Лема 2.3. *Нехай* $0 \le u_n \in L_\infty$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\operatorname{supp} u_n) = 0$, *то* $\inf\limits_n u_n = 0$.

Доведення леми 2.3. Нехай $u \le u_n$ для кожного n. Доведемо, що $u \le 0$. Нехай, навпаки, це не так. Тоді існує вимірна множина $C \subseteq [0,1]$ додатної міри така, що $u(t) > 0$ для всіх $t \in C$. Отже, $u_i(t) > 0$ для майже всіх $t \in C$ і тому $C \subseteq \operatorname{supp} u_n$, звідки дістаємо, що $0 < \mu(C) \le \lambda(\operatorname{supp} u_n)$, – суперечність. $\square$

Доведення теореми 2.1. Очевидно, достатньо довести імплікацію лише в один бік. Зафіксуємо довільні $A \in \mathcal{B}$ і $\varepsilon > 0$. Використовуючи лему 2.1, для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо $x_n \in L_\infty$ з властивостями: $|x_n| = \chi(A)$, $\|Tx_n\| < \varepsilon/2$ і $\Big|\int\limits_{[0,1]} x_n\,d\lambda\Big| < 2^{-n}$. Покладемо

$$A_n^+ = \big\{t \in [0,1] :\ x_n(t) = 1\big\}$$

і $A_n^- = A \setminus A_n^+$. Таким чином, $x_n = \chi(A_n^+) - \chi(A_n^-)$ і $|\lambda(A_n^+) - \lambda(A_n^-)| \le 2^{-n}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\lambda(A_+) \ge \lambda(A_-)$ (в протилежному випадку замість x_n розглядатимемо $-x_n$). Виберемо довільно $A_n^0 \subseteq A_n^+$ так, щоб

$$\lambda(A_n^0) = \frac{1}{2}\Big(\lambda(A_n^+) - \lambda(A_n^-)\Big).$$

Покладемо

$$y_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in A_n^0 \\ x_n(t), & t \in [0,1] \setminus A_n^0 \end{cases}$$

і $z_n = x_n - y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного n будемо мати

$$|y_n| = \chi(A), \quad \int\limits_{[0,1]} y_n d\lambda = 0.$$

Доведемо, що $z_n \xrightarrow{\text{o}} 0$. Оскільки $\|z_n\| \le 2$, то існує $u_n = \sup\limits_{m \ge n} |z_m|$. Отже, $|z_n| \le u_n$, причому (u_n) – незростаюча послідовність. Залишається довести, що $\inf\limits_n u_n = 0$. Але це випливає з леми 2.3, адже

$$\lambda(\operatorname{supp} u_n) \le \sum_{m=n}^{\infty} \lambda(\operatorname{supp} z_m) =$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \lambda(A_n^0) \le \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-m+1}.$$

Таким чином, $z_n \xrightarrow{\text{o}} 0$. Оскільки оператор T є порядково-нормовано неперервним, то $\|Tz_n\| \to 0$. Отже, існує номер n такий, що $\|Tz_n\| < \varepsilon/2$. Тому

$$\|Ty_n\| \le \|Tx_n\| + \|Tz_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

Залишається нерозв'язаним питання, чи буде теорема 2.1 вірною, якщо зняти умову порядково-нормованої неперервності оператора T.

Проблема 1. *Нехай X – банахів простір і лінійний неперервний оператор $T : L_\infty \to X$ має таку властивість: для довільних $A \in \mathcal{B}$ і $\varepsilon > 0$ існує елемент $x \in L_\infty$ такий, що $|x| = \chi_A$ і $\|Tx\| < \varepsilon$. Чи зобов'язаний оператор T бути вузьким?*

Строго вузькі оператори і строго багаті підпростори

З поняттям вузького оператора тісно пов'язане поняття багатого підпростору. Нехай E – симетричний банахів простір на просторі з безатомною мірою (Ω, Σ, μ). Підпростір $F \subseteq E$ називається *багатим* (*строго багатим*), якщо фактор-відображення з E на E/F є вузьким (строго вузьким) оператором. Іншими словами, X є багатим, якщо для довільних $A \in \Sigma$ та $\varepsilon > 0$ існують елементи $x \in E$ та $y \in F$ такі, що $|x| = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ і $\|x - y\| < \varepsilon$. Аналогічно, підпростір $X \subseteq E$ є строго багатим, якщо для довільної множини $A \in \Sigma$ існує елемент $x \in F$ такий, що $|x| = \chi(A)$ і $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$.

Прикладом строго вузького оператора, визначеного на довільному симетричному просторі E на просторі з безатомною мірою (Ω, Σ, μ) з абсолютно неперервною нормою, є довільний функціонал $f \in E^*$ [4]. Отже, ядро лінійного неперервного функціонала на E є прикладом строго багатого підпростору. Нам невідомо, чи існує вузький функціонал на L_∞, який не є строго вузьким.

Теорема 3.1. *Нехай $X \subseteq L_\infty$ – підпростір. Наступні дві умови є достатніми для того, чтоб X був строго багатим підпростором.*

(i) $X \cap L_\infty(A) \neq \{0\}$ для довільного $A \in \mathcal{B}^+$;

(ii) X є слабко-* замкненою підмножиною простору L_∞.

Зауважимо, що умова (i) є, очевидно, і необхідною.

Доведення. Для довільної множини $A \in \mathcal{B}^+$ позначимо для зручності

$$L^0_\infty(A) = \Big\{x \in L_\infty(A) : \int\limits_{[0,1]} x\, d\lambda = 0\Big\},$$

а також $L^0_\infty = L^0_\infty\big([0,1]\big)$. Розглянемо множину

$$K_A = B\big(L^0_\infty(A)\big) \cap X.$$

З безатомності міри λ і умови (i) випливає, що $X \cap L_\infty(A)$ – нескінченновимірний підпростір простору $L_\infty(A)$. Оскільки $\dim L_\infty(A)/L^0_\infty(A) = 1 < \infty$, то $X \cap L^0_\infty(A) \neq \{0\}$, адже нескінченновимірний підпростір лінійного простору не може перетинатися по нулю з ко-скінченновимірним підпростором. Отже, $K_A \neq \{0\}$. З теореми Банаха-Алаоглу і умови (ii) випливає, що K_A – компакт в слабкій-* топології простору L_∞. Оскільки множина K_A є, очевидно, опуклою, згідно з теоремою Крейна-Мільмана, множина K_A має крайню точку $x \in K_A$. Для цієї точки умова $\int\limits_{[0,1]} x\, d\lambda = 0$ виконується, згідно з означенням множини K_A. Доведемо, що $|x| = \chi(A)$. Припустимо, що це не так. Тоді існують число $\delta > 0$ і множина $B \subseteq A$, $\lambda(B) > 0$ такі, що $-1 + \delta \le x(t) \le 1 - \delta$ для всех $t \in B$. Згідно з доведеною вище властивістю, існує $y \in K_B \backslash \{0\}$. Тоді точки $x \pm \delta y$ належать множині K_A. Але це суперечить тому, що x є крайньою точкою цієї множини. $\square$

Наслідок 3.2. *Нехай $f \in L^*_\infty$ – функціонал, ядро якого є слабко-* замкненою підмножиною простору L_∞. Тоді f – строго вузький функціонал.*

Для доведення наслідку досить зауважити, що умова (i) теореми 3.1 для ядра $\ker f$ виконується автоматично, оскільки ко-скінченновимірний підпростір зобов'язаний не по нулю перетинатися з довільним нескінченновимірним підпростором.

Для понять строго вузького оператора, багатого і строго багатого підпростору виникають питання, аналогічні проблемі 1, тобто, чи можна усунути умову $\int\limits_{[0,1]} x\,d\lambda = 0$ в цих означеннях? Цікаві також наступні часткові випадки цих питань. Чи можна усунути цю умову:

1. В означенні багатого підпростору для порядково замкненого підпростору?
2. В означенні строго вузького оператора для порядково-нормовано неперервного оператора?
3. В означенні строго багатого підпростору для порядково замкненого підпростору?

Коротке доведення вузькості порядково-нормовано неперервних функціоналів

Наступна теорема є частковим випадком теореми 5.1 (див. також теорему 5.2) з [3], проте її доведення значно простіше ніж у загальному випадку. Для спрощення формулювання теореми зауважимо, що у випадку, коли оператор набуває значення в одновимірному просторі, умова порядково-нормованої неперервності цього оператора рівносильна його порядковій неперервності, адже на числовій осі порядкова збіжність співпадає зі звичайною збіжністю.

Теорема 4.1. *Кожний порядково неперервний функціонал $f \in L_\infty$ є вузьким.*

Доведення. Нехай $f \in L_\infty$ – порядково неперервний функціонал. Зафіксуємо довільну множину $A \in \mathcal{B}$ і розглянемо числову функцію $\varphi : [0,1] \to \Big[0, \big|f\big(\chi(A)\big)\big|\Big]$, яка задається формулою

$$\varphi(t) = \Big|f\Big(\chi\big([0,t] \cap A\big)\Big)\Big|.$$

Доведемо неперервність φ. Нехай $t_0 \in [0,1]$ – довільна точка. Доведемо окремо неперервність φ в точці t_0 зліва і справа. Нехай $t_n \in [0,1]$ і $t_n \uparrow t_0$. Тоді

$$\chi\big([0,t_n] \cap A\big) \xrightarrow{\text{o}} \chi\big([0,t_0] \cap A\big),$$

оскільки, згідно з лемою 2.3,

$$\Big|\chi\big([0,t_0] \cap A\big) - \chi\big([0,t_n] \cap A\big)\Big| =$$

$$= \chi\big([t_n,t_0] \cap A\big) \downarrow 0.$$

З порядкової неперервності f випливає, що $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$. Аналогічно доводиться неперервність φ в точці t_0 зліва.

З неперервності φ випливає існування точки $t^* \in (0,1)$ такої, що $\varphi(t^*) = f\big(\chi(A)\big)/2$. Тоді для $x = \chi\big([0,t^*] \cap A\big) - \chi\big((t^*,1] \cap A\big)$ будемо мати $|x| = \chi(A)$ і $f(x) = 0$. Згідно з теоремою 2.1, f – вузький функціонал. $\square$

Автор висловлює подяку М. Попову за корисні зауваження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators. – Dordrecht: Springer, 2006. – XVI, 367 p.
2. Eds. Johnson W. B., Lindenstrauss J. Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol.I. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – X, 1005 p.
3. O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, M. M. Popov. A lattice approach to narrow operators // Positivity. – Online First. – 2008. – DOI 10.1007/s 11117-008-2193-z. – 37 p.
4. Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Diss. Math. (Rozpr. mat.) – 1990. – 306. – P. 1–85.
5. Rodin V. A., Semenov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. – 1975. – 1. – p. 207–222.