УДК 517.51

©2009 р. **В.М. Косован, В.К. Маслюченко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАРІЗНО І СУКУПНО ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ДОВІЛЬНИХ ПІДМНОЖИНАХ $\mathbb{R}^n$

Наведено приклади нарізно поліноміальних функцій, заданих на підмножинах арифметичної площини $\mathbb{R}^2$, які не поліноміальні за сукупністю змінних і подана загальна теорема про поліноміальність нарізно поліноміальної функції $f\colon E\to\mathbb{R}$, де $E\subseteq\mathbb{R}^n$, яка застосовна у випадку, коли E – це область в $\mathbb{R}^n$.

Examples of separately polynomial functions defined on subsets of $\mathbb{R}^2$ which are not jointly polynomial are given. A general theorem on the polynomiality of a separately polynomial function $f\colon E\to\mathbb{R}$ where $E\subseteq\mathbb{R}^n$, which is usable when E is a domain in $\mathbb{R}^n$ is established.

1. Функція $f\colon E\to\mathbb{R}$, що задана на підмножині E простору $\mathbb{R}^n$, називається *поліноміальною*, якщо існує такий поліном

$$p(x)=p(x_1,\ldots,x_n)= \\ =\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N} a_{k_1,\ldots,k_n}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}= \\ =\sum_{|k|=0}^{m} a_k x^k$$

на просторі $\mathbb{R}^n$, що $p|_E=f$. Для точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ з $\mathbb{R}^n$ і довільного $j=1,\ldots,n$ визначимо відображення $q_{\hat{x}_j}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, покладаючи $q_{\hat{x}_j}(t)=(y_1,\ldots,y_n)$, де $y_k=x_k$ при $k\neq j$ і $y_j=t$, і множини $E_{\hat{x}_j}=q_{\hat{x}_j}^{-1}(E)$. Якщо $x\in E$, то $x_j\in E_{\hat{x}_j}$, бо $q_{\hat{x}_j}(x_j)=x$, отже, у цьому випадку $E_{\hat{x}_j}\neq\emptyset$ для кожного $j=1,\ldots,n$. Функція $f\colon E\to\mathbb{R}$ називається *нарізно поліноміальною*, якщо для кожної точки $x\in E$ і довільного $j=1,\ldots,n$ функції $f_{\hat{x}_j}=f\circ q_{\hat{x}_j}\colon E_{\hat{x}_j}\to\mathbb{R}$ є поліноміальними як функції однієї дійсної змінної. Щоб підкреслити різницю між поліноміальними та нарізно поліноміальними функціями, поліноміальну функцію $f\colon E\to\mathbb{R}$ називають ще *сукупно поліноміальною* або *поліноміальною за сукупністю змінних.* Сукупність усіх поліноміальних функцій $f\colon E\to\mathbb{R}$ ми позначатимемо символом $P(E)$, а нарізно поліноміальних – $S(E)$. Зрозуміло, що завжди $P(E)\subseteq S(E)$. Добре відомо (див., наприклад, [1, с. 63]), що $P(\mathbb{R}^n)=S(\mathbb{R}^n)$. У праці [2] у випадку $E=X_1\times\cdots\times X_n$ були вказані необхідні і достатні умови на числові множини X_1, …, X_n для того, щоб виконувалася рівність $P(E)=S(E)$. Природно поставити і загальну задачу: які необхідні і достатні умови повинна задовольняти множина $E\subseteq\mathbb{R}^n$ для того, щоб виконувалася рівність $P(E)=S(E)$? Ця загальна проблема виявилася значно складнішою і тут ми подамо лише перші результати, що отримані нами на шляху до її розв'язання. Вони були анонсовані в [3].

2. У випадку $n=2$ позначення спрощуються. Нехай $E\subseteq\mathbb{R}^2$ і $f\colon E\to\mathbb{R}$ – функція. Для кожного x з $\mathbb{R}$ ми розглядаємо *вертикальний x-переріз* $E^x=\{y\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in E\}$ *множини* E і для кожного y з $\mathbb{R}$ – *горизонтальний y-переріз* $E_y=\{x\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in E\}$ *множини* E. Для кожного точки $(x,y)\in E$ покладемо $f^x(y)=f_y(x)=f(x,y)$. Функція $f^x\colon E^x\to\mathbb{R}$ – це *вертикальних x-розріз функції* f, а $f_y\colon E_y\to\mathbb{R}$ – *горизонтальний y-розріз функції* f. Поліном p на площині $\mathbb{R}^2$ записується у вигляді: $p(x,y)=\sum\limits_{k,j=0}^{m} a_{kj}x^k y^j$.

З доведеної в [2] теореми випливає, що для множини $E=X\times Y\subseteq\mathbb{R}^2$ рівність $P(E)=S(E)$ виконується тоді і тільки тоді, коли одна з множин X чи Y скінченна або незліченна. Наш перший результат показує, що існують множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$, у яких всі вертикальні і горизонтальні перерізи E^x і E_y континуальні, але разом з тим $P(E) \neq S(E)$.

Теорема 1. *Нехай* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ і } y \geq 0 \quad \text{або} \quad x \leq 0 \text{ і } y \leq 0\}$ *і*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0 \text{ і } y \geq 0, \\ -xy, & x \leq 0 \text{ і } y \leq 0. \end{cases}$$

Тоді всі перерізи E^x *і* E_y *континуальні і* $f \in S(E) \setminus P(E)$.

Доведення. Ясно, що

$$E^x = \begin{cases} [0,+\infty), & x > 0, \\ \mathbb{R}, & x = 0, \\ (-\infty, 0], & x < 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що всі перерізи E^x континуальні, адже кожний невироджений проміжок на числовій осі $\mathbb{R}$ має потужність континууму. Так само влаштовані і горизонтальні перерізи E_y.

При $x > 0$ функція $f^x \colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ є лінійною з кутовим коефіцієнтом x, при $x = 0$ функція $f^x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нульова, а при $x < 0$ функція $f^x \colon (-\infty, +] \to \mathbb{R}$ є лінійною з кутовим коефіцієнтом $-x$. У кожному випадку виходить, що f^x – це поліноміальна функція. Теж саме справедливе і для функцій f_y, адже $f(x,y) = f(y,x)$. Таким чином, $f \in S(E)$.

Покажемо, що $f \notin P(E)$. Нехай, навпаки, існує поліном

$$p(x,y) = \sum_{k,j=0}^{m} a_{k,j} x^k y^j$$

на $\mathbb{R}^2$, для якого $p|_E = f$. Тоді

$$f(x,x) = p(x,x) = \sum_{k,j=0}^{m} a_{k,j} x^{k+j}$$

для кожного x з $\mathbb{R}$. Отже, функція $g(x) = f(x,x)$ є поліномом на $\mathbb{R}$, а значить, нескінченно диференційовною функцією. Але з означення функції f випливає, що

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Для такої функції $g'(x) = 2|x|$, а ця функція не диференційовна в точці 0. Отримана суперечність і завершує доведення.

Подібні приклади легко побудувати і таким чином. Беремо довільні непорожні відкриті множини G_1 і G_2 на площині $\mathbb{R}^2$, такі, що їх проекції на обидві вісі не перетинаються між собою, і будь-які два різних поліноми p_1 і p_2 на $\mathbb{R}^2$. Тоді функція $f \colon G_1 \cup G_2 \to \mathbb{R}$, для якої $f(x,y) = p_i(x,y)$ при $(x,y) \in G_i$ та $i = 1,2$ буде нарізно поліноміальною на множині $E = G_1 \cup G_2$, але $f \notin P(E)$. При цьому непорожні перерізи E^x і E_y континуальні. Приклад з теореми 1 цікавий ще й тим, що тут множина E зв'язна.

3. Покажемо тепер, що існують множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$, у яких всі перерізи E^x і E_y скінченні, але $P(E) \neq S(E)$.

Нехай $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільна бієкція і $E = Gr\, g = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ – її графік. Зрозуміло, що $E^x = \{g(x)\}$ і $E_y = \{g^{-1}(y)\}$ для довільних x і y з $\mathbb{R}$, отже, множини E^x і E_y одноточкові. Оскільки для кожної скінченної множини $A \subseteq \mathbb{R}$ будь-яка функція $h \colon A \to \mathbb{R}$ є поліноміальною (це випливає з інтерполяційної формули Лаґранжа), то у нашому випадку кожна функція $f \colon E \to \mathbb{R}$ є поліноміальною, тобто множина $S(E)$ збігається з множиною $\mathbb{R}^E$ усіх функцій $f \colon E \to \mathbb{R}$. Відображення $x \mapsto (x, g(x)) \colon \mathbb{R} \to E$ є бієкцією, тому потужність $|E|$ множини E – це потужність континууму $\mathfrak{c}$. Отже,

$$|S(E)| = |\mathbb{R}^E| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}$$

(тут $\mathfrak{a} = |\mathbb{N}|$, де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел).

З другого боку, множина $P(\mathbb{R}^2)$ всіх поліномів $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ має потужність $\mathfrak{c}$, бо континуальною буде навіть множина $C(\mathbb{R}^2)$ всіх неперервних функцій $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, адже кожна неперервна функція $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ цілком визначається своїм звуженням $f|_{\mathbb{Q}^2}$ на раціональну площину $\mathbb{Q}^2$, яка є зліченною. Тому $|P(E)| \leq \mathfrak{c}$ для довільної множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Насправді таки $|P(E)| = \mathfrak{c}$, бо всі константи на E є різними поліноміальними функціями, а їх уже континуум.

Таким чином, виходить, що для нашої множини $E = Gr\, g$ маємо, що $|S(E)| = \mathfrak{f}$ і $|P(E)| = \mathfrak{c}$. Але за теоремою Кантора $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, отже, $P(E) \neq S(E)$, більш того, $|S(E) \setminus P(E)| = \mathfrak{f}$. Таким чином, нами встановлена

Теорема 2. *Для кожної бієкції* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *і її графіка* $E = Gr\, g$ *маємо* $S(E) = \mathbb{R}^E$, $|S(E)| = 2^{\mathfrak{c}}$, $|P(E)| = \mathfrak{c}$ *і* $|S(E) \setminus P(E)| = 2^{\mathfrak{c}}$, *зокрема,* $S(E) \setminus P(E) \neq \varnothing$.

4. Тепер подамо один позитивний результат, але зразу для простору $\mathbb{R}^n$.

Множину $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ми називаємо P-*множиною*, якщо для довільного полінома $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ з умови $p|_E = 0$ випливає, що $p = 0$. Для P-множин E і тільки для них відображення $p \mapsto p|_E\colon P(\mathbb{R}^n) \to P(E)$ є бієктивним.

Можна довести, що у випадку $n = 1$ P-множини в $\mathbb{R}$ – це в точності нескінченні підмножини числової прямої. Для $n \geq 2$ це вже не так. Наприклад, множини $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ чи $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ є навіть континуальними, але жодна з них не є P-множиною в $\mathbb{R}^2$. Справді, многочлени $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$ і $r(x, y) = x - y$ ненульові, але $p|_{\{0\}\times\mathbb{R}} = 0$, $q|_{\mathbb{R}\times\{0\}} = 0$ і $r|_{\Delta} = 0$.

Відомо [2, теорема 8], що для нескінченних підмножин $X_1, \ldots, X_n$ числової прямої їх добуток $E = X_1 \times \cdots \times X_n$ є P-множиною в $\mathbb{R}^n$. Зокрема, P-множинами в $\mathbb{R}^n$ будуть довільні невироджені паралелепіпеди, а значить, і усі непорожні відкриті паралелепіпеди.

Теорема 3. *Нехай* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *і* $f: E \to \mathbb{R}$ *– функція, для якої існує сім'я* $(A_t : t \in E)$ *підмножин* A_t *множини* E, *що задовольняє умови:*

(i) $t \in A_t$ *для кожного* $t \in E$;

(ii) $f|_{A_t} \in P(A_t)$ *для кожного* $t \in E$;

(iii) для будь-яких точок t' *і* t'' *з* E *існують такі точки* $t_1, \ldots, t_m$ *з* E, *що* $t_1 = t'$, $t_m = t''$ *і для кожного* $k = 2, \ldots, m$ *перетин* $A_{t_{k-1}} \cap A_{t_k}$ *є* P*-множиною в* $\mathbb{R}^n$.

Тоді $f \in P(E)$.

Доведення. Згідно з умовою (ii) для кожного t з E існує такой поліном p_t: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що $p_t|_{A_t} = f|_{A_t}$. Будемо вважати, що $E \neq \varnothing$, бо для порожньої множини твердження очевидне. Зафіксуємо точку t_0 з E і поліном $p = p_{t_0}$ і покажемо, що $p|_E = f$.

Нехай t – довільна точка з E. За умовою (iii) існують такі точки $t_1, \ldots, t_m$ з E, що $t_1 = t_0$, $t_m = t$ і всі перетини $B_k = A_{t_{k-1}} \cap A_{t_k}$ при $k = 2, \ldots, m$ є P-множинами в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо поліноми $p = p_{t_0} = p_{t_1}, p_{t_2}, \ldots, p_{t_m} = p_t$. Для кожного $k = 2, \ldots, m$ маємо

$$p_{t_{k-1}}\Big|_{B_k} = f\Big|_{B_k} = p_{t_k}\Big|_{B_k}.$$

Оскільки B_k – це P-множини, то $p_{t_{k-1}} = p_{t_k}$ для кожного $k = 2, \ldots, m$, звідки випливає, що

$$p = p_{t_1} = p_{t_2} = \cdots = p_{t_m} = p_t,$$

отже, $p_t = p$. Зокрема, $f(t) = p_t(t) = p(t)$, адже $t \in A_t$ за умовою (i). Таким чином, справді $p|_E = f$, отже, $f \in P(E)$.

Нагадаємо, що *область* G у просторі $\mathbb{R}^n$ – це відкрита і зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^n$. З теореми 3 випливає

Теорема 4. *Нехай* G *– область в* $\mathbb{R}^n$. *Тоді* $P(G) = S(G)$.

Доведення. Розглянемо максимум норму $|x| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ на просторі $\mathbb{R}^n$ і для кожного $t \in \mathbb{R}^n$ кубічні δ-околи

$$U_\delta(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - t| < \delta\},$$

які ми будемо розглядати при $0 < \delta \leq +\infty$. Для кожної точки t з G можна знайти таке число $\delta_t \in (0, +\infty]$, що $U_{\delta_t}(t) \subseteq G$, причому, якщо $U_\delta(t) \subseteq G$, то $U_\delta(t) \subseteq U_{\delta_t}(t)$. Покладемо $A_t = U_{\delta_t}(t)$ для $t \in G$ і доведемо, що сім'я $(A_t : t \in G)$ має властивості (i) – (iii) з теореми 3 для будь-якої функції $f \in S(G)$.

Зрозуміло, що $t \in A_t \subseteq G$ для кожного $t \in G$. Далі, оскільки A_t – це відкритий непорожній паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$, то за теоремою 9 з [2] $P(A_t) = S(A_t)$. Але для функції $f \in S(G)$, зрозуміло, і звуження $f|_{A_t} \in S(A_t)$. Тому $f|_{A_t} \in P(A_t)$ для кожного $t \in E$, тобто виконується умова (ii).

Перевіримо умову (iii). Нехай t' і t'' – довільні точки з G. Послідовність точок t_1, ..., t_m з G, таку, що $t_1 = t'$, $t_m = t''$ і для кожного $k = 2, \ldots, m$ перетини $A_{t_{k-1}} \cap A_{t_k}$ є P-множинами назвемо P*-ланцюжком, що з'єднує* t' *з* t''. Щоб довести, що такий P-ланцюжок завжди існує, розглянемо множину

$$A = \{t \in G: \text{ існує } P\text{-ланцюжок}$$

$$t_1, \ldots, t_m \text{ в } G, \quad \text{що з'єднує } \ t' \text{ і } t\}.$$

Оскільки, очевидно $t' \in A$, то $A \neq \emptyset$. Покажемо, що A є відкритою і замкненою множиною в G.

Справді, нехай $t \in A$ і $t_1, \ldots, t_m$ – P-ланцюжок в G, який з'єднує t' з t. Розглянемо довільну точку $s \in A_{t_m} = A_t$ і множину A_s. Оскільки $s \in A_t \cap A_s$, то $A_t \cap A_s \neq \emptyset$, отже, $A_t \cap A_s$ – це непорожній відкритий паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$, який є P-множиною. Покладаючи $t_{m+1} = s$ ми одержимо відповідний P-ланцюжок t_1, ..., t_{m+1}, який з'єднує t' з s. Отже, $s \in A$, а значить, $A_t \subseteq A$. Але множина A_t є околом точки t в $\mathbb{R}^n$, а тому і A є околом точки t в $\mathbb{R}^n$, отже, множина A відкрита в $\mathbb{R}^n$, а значить, і в G.

Нехай $t \in \overline{A} \cap G$. Тоді $A_t \cap A \neq \emptyset$, отже, існує точка $s \in A_t \cap A$. Побудувавши P-ланцюжок t_1, ..., t_m, що з'єднує точку t' з точкою s і додавши до нього ще точку $t_{m+1} = t$, ми одержимо P-ланцюжок t_1, ..., t_{m+1}, що з'єднує t' з t. Отже, $t \in A$, а значить множина A замкнена в G.

Таким чином, A – це непорожня відкрита і замкнена частина зв'язної множини G. Тому $A = G$, зокрема $t'' \in A$, отже, і властивість (iii) виконується.

Тому, за теоремою 3 для будь-якої функції $f \in S(G)$ отримуємо, що $f \in P(G)$, отже, $P(G) = S(G)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bochnak J., Siciak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces // Stud. Math. – 1971. – **39**. – P. 59-76.

2. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66-74.

3. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізиу" (10-12 вересня 2008 року, Івано-Франківськ). Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2008. – С. 51.