УДК 517.9

©2009 р. І.І. Король

Ужгородський національний університет

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Одержано критерій існування розв'язків нетерової крайової задачі для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією загального вигляду у припущенні, що вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми.

We obtain a criterion for existence of solutions of Noetherian boundary value problem for a degenerate system of ordinary differential equations with impulse effect of general form in case when degenerate system of differential equations can be reduced to central canonical form.

Розглянемо питання існування розв'язків виродженої лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом:

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [a,b] \setminus \tau_i, \tag{1}$$

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \tag{2}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha_0, \tag{3}$$

де $\tau_0 = a < \tau_1 < \cdots < \tau_p < b = \tau_{p+1}$ – фіксовані моменти часу; $A(t)$, $B(t)$ – $(n \times n)$-вимірні матриці з дійсними неперервними на $[a,b]$ компонентами, $det B(t) = 0$; $f(t)$ – n-вимірна неперервна на $[a,b]$ функція; ℓ – m_0-вимірний лінійний вектор-функціонал, $\ell : C^1[a,b] \to \mathbb{R}^{m_0}$; α_0 – m_0-вимірний дійсний сталий вектор; N_i, M_i – прямокутні $(m_i \times n)$-вимірні дійсні матриці, $1 \le m_i \le n$.

Стосовно системи (1) припускаємо, що вона за допомогою невиродженого лінійного перетворення може бути приведена до центральної канонічної форми [1].

Під розв'язком задачі (1)-(3) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $[a,b] \setminus \{\tau_i\}$, $i = \overline{1,p}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ x_i(t), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1), імпульсні умови (2) та крайові умови (3). Будемо вважати функції $x_j(t)$ визначеними і неперервними на відповідних замкнених інтервалах $x_j(t) \in C[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0,p}$, $x_j(\tau_j) = x_j(\tau_j + 0) = \lim\limits_{t \to \tau_j + 0} x_j(t)$, і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i - 0} x_{i-1}(t), \ i = \overline{1,p}.$$

Згідно [1] загальний розв'язок сингулярної системи (1) має вигляд

$$\begin{gathered} x(t, c_0) = x_0(t, c_0) = X_{n-s}(t) c_0 + \\ + \int_a^t X_{n-s}(t) Y^*_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ -\Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \tfrac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^*(t) f(t), \end{gathered} \tag{4}$$

де $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ – фундаментальні $(n \times (n-s))$-вимірні матриці, стовпці яких є розв'язками відповідно однорідної виродженої системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{5}$$

та спряженої до (5) системи

$$\frac{d}{dt} B^*(t) y = -A^*(t) y;$$

c_0 – $(n-s)$-вимірний вектор-стовпчик довільних сталих; $R(t) = \Big(\Psi^*(t) L(t) \Phi(t)\Big)^{-1}$,

$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$ – лінійний оператор:

$$L : (C^1[a,b], \mathbb{R}^n) \to (C^1[a,b], \mathbb{R}^n);$$

$rank B(t) = n - q = const\ \forall t \in [a,b]$; матриця $B(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з q ланцюжків завдовжки s_j, $j = \overline{1,q}$, $q = max s_j$; $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ – $n \times s$-вимірні матриці, які складаються з векторів, що утворюють жорданові набори відповідно матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і транспонованої матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$, $L^*(t) = A^* + \frac{d}{dt}B^* y$:

$$\Phi(t) = \Big[\varphi_1^{(1)}(t), \cdots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \cdots,$$
$$\cdots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \cdots, \varphi_q^{(1)}(t), \cdots, \varphi_q^{(s_q)}(t)\Big],$$

$$\Psi(t) = \Big[\psi_1^{(1)}(t), \cdots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \cdots,$$
$$\cdots, \psi_2^{(s_2)}(t); \cdots, \psi_q^{(1)}(t), \cdots, \psi_q^{(s_q)}(t)\Big].$$

Після дії імпульсного збурення в точці $t = \tau_1$ продовжимо розв'язок $x(t) = x_0(t, c_0)$ вигляду (4) з інтервалу $t \in [\tau_0, \tau_1]$ на $(n-s)$-параметричний розв'язок $x_1(t)$:

$$x_1(t) = x_1(t, c_1) = X_{n-s}(t)c_1 +$$
$$+ \int_{\tau_1}^{t} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\sigma)f(\sigma)d\sigma -$$
$$-\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t)\right)\Psi^*(t)f(t),\ c_1 \in \mathbb{R}^{n-s}; \tag{6}$$

який визначений на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$. Зв'язок між ними визначається умовою (2) при $i = 1$. Беручи до уваги неперервність функції $x_1(t) = x_1(t, c_1)$ в точці $t = \tau_1$, можемо записати умову (2) в цій точці наступним чином:

$$M_1 x_1(\tau_i) + N_1 x_0(\tau_i) = \alpha_1. \tag{7}$$

Підставляючи (4), (6) в (7), одержимо лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$\widetilde{M}_1 c_1 + \widetilde{N}_1 c_0 = \alpha_1 + M_1\gamma_1 - N_1 F_1,$$

де через $\widetilde{M}_i$, $\widetilde{N}_i$ для кожного $i = \overline{1,p}$ будемо позначати $(m_i \times (n-s))$-вимірні матриці, а через F_i, γ_i – n-вимірні вектори:

$$\widetilde{M}_i = M_i X_{n-s}(\tau_i), \quad \widetilde{N}_i = N_i X_{n-s}(\tau_i),$$

$$\gamma_i = \Phi(\tau_i) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\tau_i)\Psi^*(\tau_i)f(\tau_i),$$

$$F_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_{n-s}(\tau_i)Y_{n-s}^*(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \gamma_i.$$

Оскільки на кожному з інтервалів $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ розв'язок визначається за формулою

$$x(t) = x_i(t, c_i) = X_{n-s}(t)c_i +$$
$$+ \int_{\tau_i}^{t} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \tag{8}$$
$$-\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t)\right)\Psi^*(t)f(t),\ c_i \in \mathbb{R}^{n-s};$$

то аналогічним чином одержимо, що в кожній точці імпульсу $t = \tau_i$ відповідні $(n-s)$-вимірні вектори довільних сталих c_{i-1}, c_i повинні задовольняти рівняння

$$\widetilde{M}_i c_i + \widetilde{N}_i c_{i-1} = \alpha_i + M_i\gamma_i - N_i F_i. \tag{9}$$

З аддитивності лінійного функціоналу випливає, що

$$\ell x(\cdot) = \sum_{j=0}^{p} \ell_j x_j(\cdot, c_j),$$

де

$$\ell_0 x(\cdot) : C^1[\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^{m_0},$$
$$\ell_i x(\cdot) : C^1(\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}^{m_0},\ i = \overline{1,p}.$$

Таким чином, крайову умову (2) можемо записати у вигляді

$$\sum_{j=0}^{p} \ell_j x_j(\cdot, c_j) = \alpha_0. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язки $x_j(t)$ вигляду (4), (8) у крайову умову (10), одержимо:

$$G_0 c_0 + \ldots + G_p c_p = \alpha_0 -$$

$$-\sum_{j=0}^{p}\ell_j\left(\int_{\tau_j}^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\right. \tag{11}$$

$$\left.-\Phi(\cdot)\left(\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(\cdot)\right)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right),$$

де $G_j=\ell_jX_{n-s}(\cdot)$, $j=\overline{0,p}$. Об'єднуючи (11) з (9) при всіх $i=\overline{1,p}$, одержимо систему матричних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} G_0c_0+\ldots+G_pc_p=\alpha_0- \\ -\sum\limits_{j=0}^{p}\ell_j\left(\int\limits_{\tau_j}^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\right. \\ \left.-\,\Phi(\cdot)\left(\sum\limits_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(\cdot)\right)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right), \\ \widetilde{N}_1c_0+\widetilde{M}_1c_1=\alpha_1+M_1\gamma_1-N_1F_1, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \widetilde{N}_pc_{p-1}+\widetilde{M}_pc_p=\alpha_p+M_p\gamma_p-N_pF_p, \end{cases}$$

яку можемо записати у вигляді

$$Dc=\alpha+\beta, \tag{12}$$

де D – $\big(m\times(p+1)(n-s)\big)$-вимірна матриця, $m=\sum\limits_{j=0}^{p}m_j$, а c, α і β – m-вимірні стовпці:

$$D=\begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & \cdots & G_{p-1} & G_p \\ \widetilde{N}_1 & \widetilde{M}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{N}_2 & \widetilde{M}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \widetilde{N}_p & \widetilde{M}_p \end{pmatrix},$$

$$c=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_p \end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_p \end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=0}^{p}\ell_j\left(\int\limits_{\tau_j}^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\right. \\ \left.-\Phi(\cdot)\left(\sum\limits_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(\cdot)\right)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right) \\ M_1\gamma_1-N_1F_1 \\ \cdots \\ M_p\gamma_p-N_pF_p \end{pmatrix}.$$

Згідно [2], необхідною і достатньою умовою сумісності лінійної неоднорідної алгебраїчної системи (12) є умова ортогональності

$$P_{D^*_v}(\alpha+\beta)=0, \tag{13}$$

і у випадку її виконання розв'язки системи (12) мають вигляд

$$c^*=c^*(\xi)=P_{D_u}\xi+D^+(\alpha+\beta),\quad \xi\in\mathbb{R}^u,$$

де $c^*=col(c^*_0(\xi),\cdots,c^*_p(\xi))\in\mathbb{R}^{(p+1)(n-s)}$, а через P_{D_u} позначено $\big((p+1)(n-s)\times u\big)$-вимірну матрицю, $u=(p+1)(n-s)-r$, $r=rankD\le min\big((p+1)(n-s),m\big)$, яка складається з лінійно незалежних стовпців $\big((p+1)(n-s)\times(p+1)(n-s)\big)$-вимірної матриці P_D, яка є ортопроектором з простору $R^{(p+1)(n-s)}$ на нуль простір $Ker(D)$ матриці D:

$$P_D:R^{(p+1)(n-s)}\to Ker(D),$$
$$Ker(D)=P_DR^{(p+1)(n-s)},$$

причому стовпці матриці P_{D_u} утворюють повний базис ядра $Ker(D)$. Через $P_{D^*_v}$ будемо позначати $(v\times m)$-вимірну матрицю, $v=m-r$, рядками якої є лінійно незалежні рядки матриці P_{D^*}, яка, в свою чергу, є ортопроектором з простору R^m на нуль простір $Ker(D^*)$ матриці D^*:

$$P_{D^*}:R^m\to Ker(D^*),$$
$$Ker(D^*)=P_{D^*}R^m,$$

причому рядки матриці $P_{D^*_v}$ утворюють повний базис ядра матриці D^*.

Таким чином, можемо сформулювати основний результат.

Теорема 1. *Розв'язки виродженої лінійної системи* (1) *з імпульсною дією* (2), *які задовольняють крайову умову* (3), *існують тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (13). *При цьому задача* (1)-(3) *має* u *-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t) = x(t,\xi) = \begin{cases} x_0(t, c_0^*(\xi)), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ x_i(t, c_i^*(\xi)), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases}$$

де $i=\overline{1,p}$ *,* $c_j^*(\xi) \in \mathbb{R}^{n-s}$ *,* $\xi \in \mathbb{R}^u$ *,* $j = \overline{0,p}$ *,*

$$\begin{gathered} x_j(t,\xi) = X_{n-s}(t)c_j^*(\xi) + \\ + \int\limits_{\tau_j}^{t} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \\ -\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \tfrac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^*(t)f(t). \end{gathered} \tag{14}$$

Якщо вироджена імпульсна крайова задача (1)-(3) не має розв'язків, то за допомогою керування імпульсами та крайовими умовами її завжди можна зробити розв'язною. Наступне твердження вказує значення α, при яких вироджена крайова задача (1)-(3) при будь-яких $f(t)$ буде розв'язною.

Теорема 2. *Для довільної функції* $f(t) \in C[a,b]$ *вироджена крайова задача* (1)-(3), *буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\alpha = Q^+ Q\beta,$$

де $Q = P_{D_v^*}$.

Доведення можна провести подібно до доведення теореми 2 [3].

Зауваження 1. У некритичному [2] випадку – коли $P_{D^*} = 0$, тобто відповідна однорідна крайова задача (при $f(t) \equiv 0$, $\alpha = 0$)) має тільки тривіальний розв'язок, тоді при довільних значеннях $f(t)$, α_j, $j = \overline{0,p}$ крайова задача (1)-(3) має u-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду (14).

Зауваження 2. Аналогічні задачі розглядалися в працях багатьох авторів. Порівняємо одержані результати з деякими раніше відомими.

Так, для виродженої диференціальної системи у випадку відсутності імпульсних збурень маємо, що $D = \ell X_{n-s}(\cdot)$ є $(m_0 \times (n-s))$-вимірною матрицею: $D = \sum\limits_{j=0}^{p} G_j$ і отримуємо результат, одержаний в [3].

При $B(t) = E$ отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду з імпульсною дією, яка була детально розглянута в багатьох роботах. Зокрема, в [4-6] досліджені імпульсні системи коли M_i є n-вимірними одиничними матрицями, а N_i – невироджені матриці, в [7] – лінійна двоточкова крайова задача з одним імпульсом, який задається невиродженими матрицями, в [8] – коли матриці N_i є виродженими. Нарешті, одержані в даній роботі результати аналогічні до одержаних в [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа., 2000. – 294 с.

2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., А.А.Самойленко.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.– К.:IM НАН України, 1995.–318с.

3. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені крайові задачі// Нелінійні коливання. – 2007.– 10, №3. – С. 303–312.

4. *Самойленко А.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– К.: Вища школа, 1987.–288с.

5. *A.A.Boichuk, A.M.Samoilenko* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.

6. А.А.Бойчук, Хращевская Р.Ф. Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием// Укр. мат. журн.– 1993.– **45**, № 2.– С. 221–225.

7. Каранджулов Л.И. Структура общего решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с помощью полуобратных матриц// Укр. мат. журн.– 1993.– **45**, № 5.– С. 616–625.

8. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием //Укр. мат. журн.–1996.– **48**, № 5.– С. 588–594.

9. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями// Нелінійні коливання. – 2007. – 10, №1. – С. 51–65.