УДК 517.51

©2009 р. Карлова О.О.

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича

ПРО ПРОДОВЖЕННЯ ДІЙСНОЗНАЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлюються необхідні і достатні умови можливості продовження обмеженої неперервної функції до функції першого класу Бера, а також досліджується можливість продовження функцій з z-вкладених підмножин топологічних просторів.

Necessary and sufficient conditions for the extendibility of bounded continuous function to the Baire-one function are established. The extendibility of functions defined on z-embedded sets of topological spaces is investigated.

1. Вступ. Нехай X – топологічний простір. Символом $C(X)$ ($C^*(X)$) ми будемо позначати сукупність усіх (обмежених) неперервних дійснозначних функцій на X. Через $B_1(X)$ ($B_1^*(X)$) ми позначаємо сукупність усіх (обмежених) дійснозначних функцій першого класу Бера на X, тобто поточкових границь неперервних функцій.

Множина A називається C_δ-*множиною* (Z_σ-*множиною*) в X, якщо $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ ($A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$), де U_n (F_n) – функціонально відкрита (замкнена) множина в X для кожного $n \in \mathbb{N}$.

О. Календа та Дж. Спурний [1] встановили наступні необхідні і достатні умови продовження функції першого класу Бера до функції першого класу Бера на топологічному просторі.

Теорема А* [1, Proposition 7]. *Нехай X – топологічний простір, E – довільна підмножина простору X. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) кожну функцію $f \in B_1^*(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$;

(ii) для будь-яких диз'юнктних C_δ-множин A та B в E існують диз'юнктні C_δ-множини A_1 та B_1 в X, такі, що

$$A = A_1 \cap E, \quad B = B_1 \cap E.$$

Теорема А [1, Proposition 8]. *Нехай X – топологічний простір, E – довільна підмножина простору X. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) кожну функцію $f \in B_1(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$;

(ii) (1) *для будь-якої C_δ-множини A в E існує C_δ-множина A_1 в X, така, що $A = E \cap A_1$;*
(2) *для будь-якої C_δ-множини D в X, диз'юнктної з E, існує C_δ-множина H в X, така, що $E \subseteq H \subseteq X \setminus D$.*

Наступний результат з [1] містить деякі приклади топологічних просторів і їх підпросторів, які задовольняють умови теореми А.

Теорема Б. *Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$ і виконується одна з наступних умов:*

(i) E – функціонально відкрита в X;

(ii) X – цілком регулярний, E – ліндельофовий G_δ-підпростір простору X;

(iii) X – цілком регулярний, E – ліндельофовий спадково берівський підпростір простору X;

(iv) X – досконало нормальний, E – множина типу G_δ в X.

Тоді кожну функцію $f \in B_1(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$.

Відповідь на наступне питання, сформульоване в [1], поки що невідома.

Питання 1 [1, Question 3]. *Нехай X – нормальний простір, E – C_δ-множина в X і $f \in B_1(E)$. Чи можна функцію f продовжити до функції $g \in B_1(X)$?*

Зауважимо, що відповідь на це питання невідома, навіть, якщо f – неперервна функція.

Питання 2. *Нехай X – нормальний простір, E – C_δ-множина в X і $f \in C(E)$. Чи можна функцію f продовжити до функції $g \in B_1(X)$?*

В цій статі ми встановлюємо необхідні і достатні умови можливості продовження обмеженої неперервної функції до функції першого класу Бера, а також досліджуємо можливість продовження функцій з z-вкладених підмножин топологічних просторів.

2. Продовження неперервних функцій до функцій першого класу Бера. Система $\mathcal{F}$ дійснозначних функцій на множині X називається *замкненим L-конусом* ([2, c. 70]), якщо вона задовольняє такі умови:

(i) $f+g$, αf, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ належать до $\mathcal{F}$ для будь-яких функцій $f,g \in \mathcal{F}$ і числа $\alpha > 0$;

(ii) $\mathcal{F}$ містить всі сталі функції;

(iii) $\mathcal{F}$ замкнена відносно взяття рівномірної границі.

Ми кажемо, що множина A є *$\mathcal{F}$-відокремною від множини B*, якщо існує $f \in \mathcal{F}$, таке, що $f(A)=0$ і $f(B)=1$.

Нам буде потрібний наступний результат (див. [2, Theorem 3.2]).

Теорема 2.1. *Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{F}$ – замкнений L-конус, h_1, h_2 – обмежені дійснозначні функції на X, такі, що $h_1(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) існує $g \in \mathcal{F}$, таке, що
$$h_1(x) \le g(x) \le h_2(x)$$
для всіх $x \in X$;

(ii) з того, що $a<b$ випливає, що множина $h_2^{-1}((-\infty,a])$ є $\mathcal{F}$-відокремною від множини $h_1^{-1}([b,+\infty))$ для будь-яких чисел a і b.

Використовуючи міркування, аналогічні доведенню теореми А *, встановимо наступний результат.

Теорема 2.2. *Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) кожну функцію $f \in C^*(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$;

(ii) для будь-яких диз'юнктних функціонально замкнених множин A та B в E існують диз'юнктні C_δ-множини A_1 та B_1 в X, такі, що $A = A_1 \cap E$, $B = B_1 \cap E$.

Доведення. *(i) $\Longrightarrow$ (ii).* Нехай A та B – диз'юнктні функціонально замкнені в E множини. Тоді існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = f^{-1}(1)$. Нехай $g \in B_1(X,\mathbb{R})$ – продовження функції f. Покладаючи $A_1 = g^{-1}(0)$ і $B_1 = g^{-1}(1)$, ми отримаємо диз'юнкті C_δ-множини в X, такі, що $A = A_1 \cap E$ і $B = B_1 \cap E$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Нехай f – неперервна обмежена функція на E. Покладемо

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in E, \\ \inf f(E), & \text{якщо } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in E, \\ \sup f(E), & \text{якщо } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

Тоді $h_1(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$.

Зафіксуємо числа $a<b$. Без обмеження загальності можемо вважати, що
$$\inf f(E) \le a < b \le \sup f(E).$$
Позначимо
$$A = h_2^{-1}((-\infty,a]),\ B = h_1^{-1}([b,+\infty)).$$
Тоді $A = f^{-1}((-\infty,a])$, а $B = f^{-1}([b,+\infty))$, звідки випливає, що множини A та B є диз'юнктними функціонально замкненими в E. Згідно з умовою (ii) існують диз'юнктні C_δ-множини A_1 та B_1 в X, такі, що $A = A_1 \cap E$, $B = B_1 \cap E$. З [1, Proposition 2] випливає, що існує функція $h \in B_1(X)$, така, що $A_1 = h^{-1}(0)$, а $B_1 = h^{-1}(1)$, тобто,

множина A_1 є $\mathcal{F}$-відокремною від множини B_1, де $\mathcal{F}$ – замкнений L-конус функцій першого класу Бера. Оскільки $A \subseteq A_1$, а $B \subseteq B_1$, то множина A є $\mathcal{F}$-відокремною від множини B. Згідно з теоремою 2.1, існує функція $g \in B_1(X)$, така, що

$$h_1(x) \leq g(x) \leq h_2(x)$$

для всіх $x \in X$. Тоді функція g є шуканим продовженням функції f. ♢

Твердження 2.3. Нехай X – досконало нормальний простір, $E \subseteq X$ і $f \in C(E)$. Тоді існує функція $g \in B_1(X)$, яка є продовженням f.

Доведення. Нехай $f \in C(E)$. Згідно з [3, с. 405] існує G_δ-множина $\tilde{E} \supseteq E$ в X і існує функція $\tilde{f} \in C(\tilde{E})$, така, що $\tilde{f}|_E = f$. Тоді, згідно з теоремою Б(iv), існує $g \in B_1(X)$, таке, що $g|_E = f$. ♢

Підмножина E топологічного простору X називається z-вкладеною в X [4], якщо для кожної функціонально замкненої в E множини F існує функціонально замкнена в X множина F_1, така, що $F = F_1 \cap E$.

Наведемо деякі приклади z-вкладених множин.

Твердження 2.4. *Нехай:*

(1) X – досконало нормальний простір, $E \subseteq X$ – довільна підмножина;

(2) X – нормальний простір, E – замкнена в X;

(3) X – цілком регулярний, E – ліндельофова.

Тоді E – z-вкладена в X.

Доведення. Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$ і F – функціонально замкнена підмножина множини E.

(1) Існує замкнена в X множина F_1, така, що $F = E \cap F_1$. Оскільки простір X досконало нормальний, то множина F_1 є функціонально замкненою в X.

(2) Оскільки множина F функціонально замкнена в E, то існує функція $f \in C(E)$, така, що $F = f^{-1}(0)$. Згідно з теоремою Тітце-Урисона [3, с. 116] для функції f існує продовження $g \in C(X)$. Тоді $F_1 = g^{-1}(0)$ є функціонально замкненою в X множиною і $F = E \cap F_1$.

(3) Розглянемо функціонально відкриту в E множину $U = E \setminus F$. Тоді існує відкрита в X множина G, така, що $U = E \cap G$. Оскільки простір X цілком регулярний, то множину G можна зобразити у вигляді $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, де G_i – функціонально відкриті множини в X. Множина U є типу F_σ в E, тому, згідно з [3, с. 292], множина U ліндельофова. Тоді з покриття $\mathcal{G} = (G_i : i \in I)$ множини U можна виділити зліченне підпокриття $\mathcal{U}$. Тоді множина $U_1 = \cup \mathcal{U}$ є функціонально відкритою в X як зліченне об'єднання функціонально відкритих множин. Покладемо $F_1 = X \setminus U_1$. Тоді множина F_1 є функціонально замкненою в X множиною і $F = E \cap F_1$. ♢

Твердження 2.5. *Нехай X – топологічний простір і E – z-вкладена в X. Тоді:*

(i) кожну функцію $f \in C^*(E)$ можна продовжити до $g \in B_1(X)$;

(ii) якщо E – множина типу C_δ, то кожну функцію $f \in B_1(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$.

Доведення. (i). Перевіримо умову (ii) теореми 2.2. Нехай A та B – диз'юнктні функціонально замкнені множини в E. Оскільки множина E є z-вкладеною, то існують функціонально замкнені в X множини $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$, такі, що $A = E \cap \tilde{A}$ і $B = E \cap \tilde{B}$. Покладемо $C = \tilde{A} \cap \tilde{B}$. Тоді множина C є функціонально замкненою в X, а множини $A_1 = A \setminus C$ та $B_1 = B \setminus C$ будуть диз'юнктними типу C_δ в X, причому $A = E \cap A_1$ і $B = E \cap B_1$.

(ii). Легко бачити, що виконуються умови (i) та (ii) теореми А. ♢

Функція $f : X \to Y$ називається C_δ-вимірною, якщо прообраз довільної відкритої (замкненої) в Y множини є множиною типу C_δ (F_σ) в X.

Зауважимо, що кожна C_δ-вимірна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде функцією першого класу Бера [5]. Обернене твердження, взагалі кажучи, не вірне, як показує наступний приклад.

Приклад 2.6. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Відомо, що $f \in B_1(\mathbb{R})$. Але прообраз замкненої множини $\{0\}$ – це множина ірраціональних чисел, яка не є множиною типу F_σ. Таким чином, функція f не є C_δ-вимірною.

Твердження 2.7. *Нехай X – топологічний простір, E – C_δ-множина в X, такі, що будь-яку функцію $f \in C(E)$ можна продовжити до C_δ-вимірної функції g на X. Тоді кожну функцію $f \in B_1(E)$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X)$.*

Доведення. Оскільки множина E є типу C_δ в X, то умова (ii)(2) теореми A виконується автоматично. Перевіримо умову (ii)(1) теореми А.

Нехай U – функціонально відкрита в E множина і $f : E \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, така, що $U = f^{-1}((0,1])$. Тоді існує C_δ-вимірна функція $g : X \to \mathbb{R}$, така, що $g|_E = f$. Покладемо $U_1 = g^{-1}((0,1])$. Тоді множина U_1 є типу C_δ в X і $U = U_1 \cap E$.

Нехай тепер A – C_δ-множина в E. Тоді $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, де U_n – функціонально відкрита в E множина для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для кожного n виберемо C_δ- множину V_n в X, таку, що $U_n = E \cap V_n$. Позначимо $A_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Тоді множина A_1 є типу C_δ в X і $A = A_1 \cap E$. ♢

Зауважимо, що не кожну неперервну функцію, визначену на C_δ-множині, можна продовжити до C_δ-вимірної функції на весь простір X (навіть, якщо простір X метризовний).

Приклад 2.8. Нехай $E = \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ і $X = \mathbb{R}$. Занумеруємо довільним чином раціональні числа $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для довільного $x \in X$ покладемо $h(x) = \sum\limits_{r_n < x} \frac{1}{2^n}$ і $f = h|_E$. Тоді $f \in C(E)$, але не існує C_δ-вимірного продовження функції f на X.

Будь-яке продовження g функції f на простір X буде розривним в кожній точці множини $\mathbb{Q}$, а тому не може бути C_δ-вимірною функцією, адже множина точок розриву кожної C_δ-вимірної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є ніде не щільною в $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kalenda, O., Spurný, J.* Extending Baire-one functions on topological spaces // Topol. Appl. 149 (2005), 195 - 216.

2. *Lukeš J., Malý J., Zajíček.* Fine topology methods in real analysis and potential theory, Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag. – 1986.

3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

4. *Blair R., Hager A.* Extension of zero-sets and of real-valued functions // Math. Z. – **136**. – 1974. – P. 41-52.