УДК 519.6

©2009 р. С. О. Камаєва

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МЕТОД ПОБУДОВИ БАЗИСУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ В АНТИПРИЗМІ

Побудовано базис інтерполяції в антипризмі з подальшим дослідженням стаціонарного фізичного поля.

The base of interpolation in antiprism with further exploration of stationary physical field is constructed.

Постановка проблеми. Інтерес до просторових фігур людина виявляє протягом всього свого життя. В дитинстві велика увага приділяється кубикам, що використовуються як іграшки, в зрілому віці – різноманіттю многогранних форм, що знаходять широке застосування як в науці, так і в природі. Серед них особливе місце посідають антипризми, що утворюють важливий клас напівправильних многогранників. Відомо, що в деяких випадках вони є найефективнішими серед просторових тіл. Підтвердженням цьому може служити, наприклад, задача Томсона. Тому їх вивчення є актуальним.

Аналіз попередніх публікацій, постановка задачі. В евклідовому просторі R^3 існує 13 напівправильних многогранників і дві нескінченні серії – призми і антипризми, відкриття яких належить Архімеду і внаслідок чого вони носять назву архімедових тіл. Праця Архімеда, на жаль, не збереглась до наших днів. Виною цьому, як вважається, була пожежа Александрійської бібліотеки. Проте існування рукопису Архімеда підтверджується посиланням на нього в роботах інших вчених, зокрема, математика Паппа, що жив в III ст. н.е. Велика заслуга в розвитку теорії многогранників належить Йоганну Кеплеру (1571-1630), який першим опублікував повний список 13 архімедових тіл і дав їм ті назви, під якими вони відомі і понині. Цій теорії присвячено багато робіт і інших вчених, серед яких треба згадати Платона, Евкліда, Леонардо да Вінчі, Ейлера, Гаусса, Коші, Федорова, Кокстера, Білінські та багато інших. Але, на жаль, антипризми залишилися поза увагою. Так, наприклад, в роботі [1], в якій наведено 75 моделей многогранників, антипризми, за зізнанням автора, не розглядаються. В роботі [2] "скручені" призми вводяться як приклад, а в [3] дається тільки їхнє визначення та зображення.

Мета статті. Розробити метод побудови базису інтерполяції в антипризмі з вузлами інтерполяції в її вершинах з подальшим дослідженням стаціонарного поля.

Основна частина. Як відомо, антипризма – напівправильний многогранник, у якого дві паралельні грані – рівні між собою правильні n-кутники, а решта $2n$ граней – правильні трикутники (рис. 1) [3]. Побудуємо базис в антипризмі з n-кутною основою. Насамперед визначимо координати її вершин (x_k, y_k, z_k), $k=\overline{1,2n}$. Введемо декартову систему координат так, щоб початок координат містився в центрі антипризми, а вісь Oz проходила перпендикулярно до її основ. Напрям осей Ox та Oy вибирається з міркувань зручності.

Аплікати вершин нижньої основи:

$$z_k = -\frac{H}{2}, \quad k=\overline{1,n},$$

де H – висота антипризми.

Координати x_k та y_k можна знайти, використовуючи теорію комплексних чисел, а саме добування кореня n-го степеня із комплексного числа.

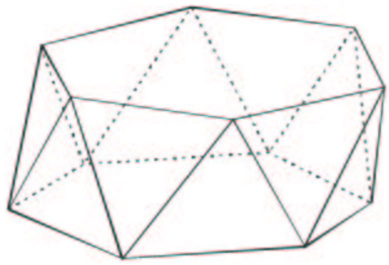

Рис. 1. Зображення антипризми.

Для верхньої основи $z_k = \frac{H}{2}$, $k = \overline{n+1, 2n}$ а координати x_k, y_k отримуються з попередніх поворотом системи координат навколо осі Oz на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{n}$.

Знайдемо висоту антипризми H в залежності від сторони основи a. Використовуючи теорему Піфагора, маємо:

$$H = \sqrt{l^2 - (r - r)^2},$$

де l – довжина апофеми бокової грані, r, R – радіуси кіл вписаного в n-кутник та описаного навколо нього.

Враховуючи, що

$$l = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ а } R - r = a\frac{1 - \cos\varphi}{2\sin\varphi},$$

запишемо:

$$H = a\frac{\sqrt{2 + 2\cos\varphi - 4\cos^2\varphi}}{2\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Зрозуміло, що висота антипризми залежить від того, який n-кутник лежить в її основі та яка довжина його сторони a. Проте існують задачі, зокрема задача Томсона [4], коли антипризма розглядається вписаною в сферу. Тоді накладається додаткова умова:

$$\frac{1}{4}H^2 + R^2 = R^2_{c\phi}, \qquad (2)$$

де $R_{c\phi}$ – радіус сфери.

При вписуванні в одну і ту ж сферу сталого радіуса $R_{c\phi}$ антипризм з різними основами висота $H \to 0$ при $n \to \infty$. Дійсно, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ та враховуючи, що $a = 2R\sin\varphi$, отримаємо:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\varphi\to 0)}} H = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\varphi\to 0)}} a\frac{\sqrt{2 + 2\cos\varphi - 4\cos^2\varphi}}{2\sin\varphi} = 0.$$

Коли H стає нескінченно малою величиною, якою можна знехтувати, замість просторового тіла доцільно розглядати плоску фігуру у формі правильного n-кутника.

Маючи всі необхідні величини, перейдемо до побудови базису в антипризмі. Ми будемо використовувати геометричний та ймовірнісно-геометричний підходи конструювання функцій форми, що зарекомендували себе як прості та ефективні способи побудови базису в n-кутниках та n-кутних призмах. Суть геометричного підходу полягає у виборі композиції з поверхонь в рамках інтерполяційної гіпотези типу Лагранжа. Зазначимо, що завдяки цьому підходу вдається побудувати базис на будь-якому n-кутнику, зокрема на гексагоні та октагоні [5, 6], в той час як традиційним способом це зробити неможливо в силу виродженості СЛАР. При ймовірнісно-геометричному моделюванні використовується поняття геометричної ймовірності, як відношення відповідних мір [7].

Функція форми $N_k(x, y, z)$ для вузла k (вершини антипризми) матиме вигляд:

$$N_k(x, y, z) = F_k(x, y) \cdot S(z), \qquad (3)$$

де $F_k(x, y)$ – функція форми для вузла k в n-кутній основі антипризми, як у двовимірному елементі,

$$S(z) = \begin{cases} \frac{1}{H}\left(\frac{H}{2} - z\right), & (k = \overline{1, n}) \\ \frac{1}{H}\left(\frac{H}{2} + z\right), & (k = \overline{n+1, 2n}). \end{cases}$$

При цьому важливо зберігати ваговий баланс у антипризмі:

$$\sum_{k=1}^{2n} N_k(x, y, z) = 1.$$

Неважко бачити, що якщо функція $F_k(x, y)$ є гармонічною за диференціальним критерієм Лапласа в двовимірному просторі, то функція $N_k(x, y, z)$ є гармонічною в просторі тривимірному.

Існування базису в антипризмі дає можливість розв'язувати різні граничні задачі. Зокрема, в рамках температурної задачі можна знайти температурне поле антипризми. При цьому розглянемо дискретний аналог задачі Діріхле для рівняння Лапласа, коли задані постійні значення температури T_k, $(k=\overline{1,2n})$ в усіх її вершинах. Розв'язок $T(x,y,z)$ знаходимо, як математичне сподівання відомих граничних значень:

$$T(x,y,z)=\sum_{k=1}^{2n} N_k(x,y,z)\cdot T_k. \qquad (4)$$

Проілюструємо даний метод на прикладах.

Приклад 1. Розглянемо антипризму з трикутною основою. Приймемо висоту антипризми $H=2$, тоді згідно (1) $a=\sqrt{6}$ (рис. 2). Неважко бачити, що її можна вписати в сферу з радіусом $R_{сф}=\sqrt{3}$.

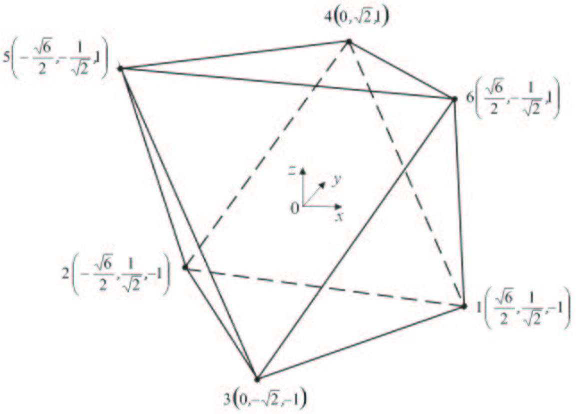

Рис. 2. Антипризма з трикутною основою.

З використанням ймовірнісно-геометричного підходу на двовимірних скінченних елементах трикутної форми [7] та формули (3), базисна функція для вузла 1 матиме вигляд:

$$N_1(x,y,z)=\frac{mes\ D_1}{mes\ D}\cdot\frac{1}{2}(1-z),$$

де

$mesD=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ – площа основи 1-2-3,

$mes\ D_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ – площа області, сприятливої для вузла 1 в основі 1-2-3.

Дана функція задовольняє інтерполяційну гіпотезу типу Лагранжа та є гармонічною за диференціальним критерієм Лапласа.

Решта функцій отримується аналогічним чином. При цьому в антипризмі зберігається ваговий баланс:

$$\sum_{k=1}^{6} N_k(x,y,z)=1.$$

При відомих постійних значеннях температури у вузлах антипризми T_1-T_6 значення температури в будь-якій довільно вибраній точці $A(x,y,z)$ знайдемо за формулою (4):

$$T(x,y,z)=\sum_{k=1}^{6} N_k(x,y,z)\cdot T_k.$$

Приклад 2. Розглянемо антипризму з чотирикутною основою (рис. 3). Знайдемо, які повинні бути висота антипризми H та сторона основи a, щоб дану антипризму можна було вписати в ту саму сферу з радіусом $R_{сф}=\sqrt{3}$. В результаті нескладних перетворень формул (1), (2) запишемо співвідношення між a та $R_{сф}$:

$$a=\frac{4\sin\varphi}{\sqrt{6+2\cos\varphi-4\cos^2\varphi}}R_{сф}.$$

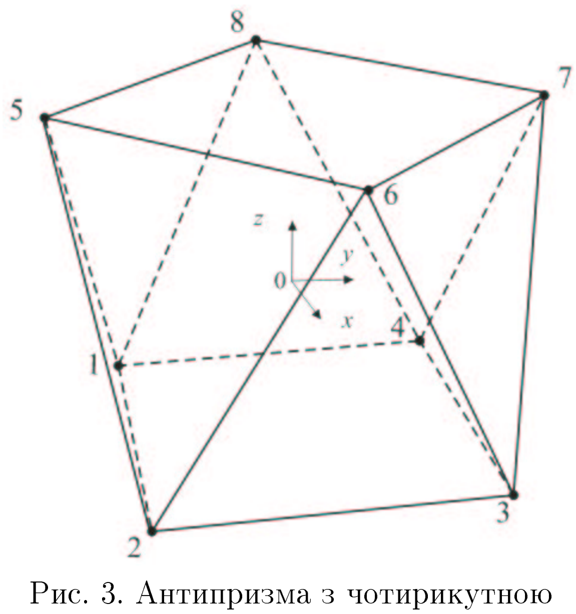

Рис. 3. Антипризма з чотирикутною основою.

При $R_{сф} = \sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})}$. Тоді згідно з (1) $H = 2\sqrt{\frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)}$.

Згідно з введеною системою координат (рис. 3), запишемо координати характерних вершин антипризми:

$$1\left(-\sqrt{\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})}; -\sqrt{\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})}; -\sqrt{\frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)}\right),$$

$$5\left(0; -\sqrt{\frac{6}{7}(4-\sqrt{2})}; -\sqrt{\frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)}\right).$$

Використовуючи базисні функції на мультиплексі та формулу (3), функція форми для вузла 1 матиме вигляд:

$$N_1(x,y,z) = \frac{7\left(\sqrt{\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})} - x\right)}{24(4-\sqrt{2})\sqrt{\frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)}} \times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})} - y\right)\left(\sqrt{\frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)} - z\right).$$

Зазначимо, що дана функція задовольняє інтерполяційну гіпотезу типу Лагранжа та є гармонічною за диференціальним критерієм Лапласа.

Решта функцій отримується аналогічним чином.

Як і в попередньому прикладі в антипризмі зберігається ваговий баланс.

При відомих вузлових температурах $T_1 - T_8$ значення температури в будь-якій довільно вибраній точці $A(x,y,z)$ знайдемо за формулою (4):

$$T(A) = \sum_{k=1}^{8} N_k(x,y,z) \cdot T_k.$$

Зауважимо, що представлений метод легко поширюється і на антипризми з іншими основами.

Висновки і перспективи подальших досліджень. В даній роботі вперше розроблено метод побудови базису в антипризмі з n-кутною основою. Завдяки цьому вдається розв'язувати різні крайові задачі в даному тілі. Запропонований підхід не потребує нанесення сітки в області антипризми та дозволяє знайти значення досліджуваної неперервної величини, зокрема температури, в довільно вибраній точці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Веннинджер М.* Модели многогранников. Пер. с англ. В.В. Фирсова. – М.: Мир, 1974. – 236 с.

2. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия: Учеб. Пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 672 с.

3. Математическая энциклопедия. М. 1977. Издательство "Советская энциклопедия". Т.1, С. 297. Антипризма.

4. *Андреев Н.Н., Юдин В.А.* Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое просвещение (третья серия). 1997. Вып. 1. – С. 115-121.

5. *Хомченко А.Н., Моісеєнко С.В.* Геометричне моделювання гексагональних базисів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С.37-43.

6. *Камаєва С.О., Хомченко А.Н.* Побудова функцій фоми на восьмикутному скінченному елементі // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. – 2008.-№ 2(31). – С. 216-220.

7. *Хомченко А.Н.* О вероятностном построении базисных функций МКЭ. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, № 5264.