УДК 517.51

©2009 р. П.М. Дудницький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ТЕОРЕМА ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Доведено існування розв'язку багатоточкової задачі для імпульсної коливної системи і встановлено оцінку норми різниці розв'язків вихідної та усередненої задач.

We prove the existence of the solution of a multi-point problem for an oscillating equation system with impulses and obtain a norm estimate for the difference between solutions of the given and the averaging problems.

Метод усереднення дістав широке застосування при розв'язанні багатьох задач нелінійної механіки, в тому числі і для крайових задач [1]. У випадку нелінійних коливних систем з повільно-змінними частотами та імпульсною дією у фіксовані моменти часу деякі класи крайових задач досліджувались в роботах [2-5].

В даній статті при слабших припущеннях на праві частини рівнянь і більш загальних крайових умовах доведено існування розв'язку одної крайової задачі і встановлено оцінку норми різниці розв'язків вихідної та усередненої задач.

Розглянемо багаточастотну систему n+m дифференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу t_j

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon p(x,\varphi,\tau_j), \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_j), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}$, $\varphi \in R^m$, $\varepsilon t_j = \tau_j, j \in N, \tau \in I = [0, L]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ – малий параметр, $\mathcal{D}$ – обмежена відкрита область.

Вважатимемо, що вектор-функції $c(x,\varphi,\tau) = (a(x,\varphi,\tau), b(x,\varphi,\tau))$ і $r(x,\varphi,\tau) = (p(x,\varphi,\tau), q(x,\varphi,\tau))$, $(x,\varphi,\tau) \in G = D \times R^m \times I$, неперервні і мають неперервні і обмежені сталою C_1 частинні похідні першого порядку по всіх аргументах, 2π-періодичні по кожній компоненті вектора φ, розкладаються в рівномірно по φ збіжні в G ряди Фур'є

$$\sum_k c_k(x,\tau) \exp\{i(k,\varphi)\},$$

$$\sum_k r_k(x,\tau) \exp\{i(k,\varphi)\},$$

причому

$$\sum_{||k||>0} \frac{\|c_k(x,\tau)\|}{||k||^{\frac{1}{l+1}}} \leq C_1,$$

$$\sum_k ||k|| \|r_k(x,\tau)\| \leq C_1,$$

$$(x,\tau) \in \mathcal{D} \times I. \tag{2}$$

Тут i — уявна одиниця, (k,φ) — скалярний добуток в R^m, $\|k\| = \sqrt{(k,k)}$, норму матриці узгоджено з евклідовою нормою вектора, а $l \geq m$– фіксоване натуральне число.

Накладаємо умову на відрізку I

$$t_{j+1} = t_j + \theta(\varepsilon t_j), \quad j \in N. \tag{3}$$

Тут $\theta(\tau)$ – додатна функція, яка задовольняє умову $\theta(\tau) \in C_I^l$.

Нехай $\omega(\tau) \in C_I^l$,

$$det(W_l^T(\tau) W_l(\tau)) \neq 0,$$

де

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^g(\theta(\tau)\omega_\nu(\tau))}{d\tau^g} \right)_{g,\nu=1}^{l,m}, \quad \tau \in I, \tag{4}$$

$\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, W_l^T – транспонована матриця.

Задамо для (1) багатоточкові умови

$$\Phi(x|_{\tau=\tau^{(1)}}, \ldots, x|_{\tau=\tau^{(r)}}, \varphi|_{\tau=\tau^{(1)}}, \ldots \varphi|_{\tau=\tau^{(r)}}) = 0 \quad (5)$$

в яких $\Phi(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r)$ - (m+n)-вимірна вектор функція, яка неперервна і має рівномірно неперервні і обмежені сталою C_1 частинні похідні першого порядку по всіх аргументах в області $D^r \times R^{mr} \equiv G_1$, $0 \le \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \cdots < \tau^{(r)} \le L$, $r \ge 2$.

Запишемо відповідну (1) гладку усереднену по φ систему [6]

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta(\tau)}\bar{p}(\bar{x}, \tau),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta(\tau)}\bar{q}(\bar{x}, \tau), \quad (6)$$

і крайові умови:

$$\Phi(\bar{x}|_{\tau=\tau^{(1)}}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau^{(r)}}, \bar{\varphi}|_{\tau=\tau^{(1)}}, \ldots \bar{\varphi}|_{\tau=\tau^{(r)}}) = 0, \quad (7)$$

де $\bar{f}(x, \tau)$ позначає середнє по φ в кубі періодів 2π-періодичної по φ функції $f(x, \varphi, \tau)$:

$$\bar{f}(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(x, \varphi, \tau) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Якщо позначити через $(x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$ і $(\bar{x}(\tau, x^0), \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$ – розв'язки систем (1) і (6), які в момент часу $\tau = 0$ набувають значення (x^0, φ^0), то при зроблених припущеннях та при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ вірна оцінка похибки методу усереднення для початкової задачі [6]:

$$\|U(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \le C_2 \varepsilon^{\frac{1}{4l}} \quad (8)$$

$$\forall \tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де $U(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) = (x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^0)$, $\varphi(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$ - (n+m)-вимірний вектор.

Позначимо через $A(x^0, \varphi^0, \varepsilon)$ - (n+m)-вимірну квадратну матрицю

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p_j} \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0)}{\partial x^0} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial q_j} \int_0^{\tau^{(j)}} \Big(\frac{\partial \bar{b}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau)}{\partial \bar{x}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta(\tau)} \frac{\partial \bar{q}(\bar{x}(\tau, x^0), \tau)}{\partial \bar{x}} \Big) \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0)}{\partial x^0} d\tau, \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial q_j} \right).$$

Тут значення похідних $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p_j}$ і $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial q_j}$ функції $\Phi(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r)$ беруться при $p_\nu = \bar{x}(\tau^{(\nu)}, x^0)$, $q_\nu = \bar{\varphi}(\tau^{(\nu)}, x^0, \varphi^0, \varepsilon), \nu = \overline{1, r}$.

Теорема. Нехай:

1) виконуються умови (2) - (4);

2) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує розв'язок $(\bar{x}(\tau, x^0), \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$, $x^0 = x^0(\varepsilon)$, $\varphi^0 = \varphi^0(\varepsilon)$, усередненої задачі (6), (7), який лежить в $D \times R^m$ разом з деяким своїм ρ-околом для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

3) для даного розв'язку матриця $A(x^0(\varepsilon), \varphi^0(\varepsilon), \varepsilon) \equiv A(\varepsilon)$ невироджена, причому

$$\|A^{-1}(\varepsilon)\| \le C, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де C - додатна стала, незалежна від ε.

Тоді можна вибрати такі додатні сталі ε_1 і $\bar{C}$, що при $\varepsilon_0 \le \varepsilon_1$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує розв'язок $(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon))$ задачі (1), (5), який задовольняє нерівність

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^0)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) -$$

$$- \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \le \overline{C} \varepsilon^{\frac{1}{4l}}, \quad (9)$$

$\tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доведення. Розв'язок задачі (1), (5) будуємо у вигляді

$$(x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)) = (x(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon),$$

$$\varphi(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon)), \quad (10)$$

а невідомий $m + n$-вимірний вектор $z = (y, \psi)$ визначаємо із умов (5):

$$z = -A^{-1}(\varepsilon) \{ [\Phi(x(\tau^{(1)}, \varepsilon), \ldots, \varphi(\tau^{(r)}, \varepsilon)) -$$

$$- \Phi(\bar{x}(\tau^{(1)}, x^0 + y), \ldots, \bar{\varphi}(\tau^{(r)}, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon))] +$$

$$+ [\Phi(\bar{x}(\tau^{(1)}, x^0 + y), \ldots, \bar{\varphi}(\tau^{(r)}, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon)) -$$

$$- A(\varepsilon) z] \} \equiv N(z, \varepsilon).$$

Оскільки крива $\bar{x}(\tau, x^0(\varepsilon))$ лежить в D разом із своїм ρ-околом $\forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, то із усереднених рівнянь для повільних змінних випливає, що при $\|y\| < \rho_1 = \frac{1}{2} \rho e^{-LC_1(1+h)}$, $h = (\min\limits_{[0,L]} |\theta(\tau)|)^{-1}$, крива

$\bar{x}=\bar{x}(\tau,x^0+y)$ лежить в D разом із своїм $\frac{1}{2}\rho$-околом. Тому на підставі оцінки похибки методу усереднення (8) маємо, що

$$\|\Phi(x(\tau^{(1)},\varepsilon),\ldots,\varphi(\tau^{(r)},\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\Phi(\bar{x}(\tau^{(1)},x^0+y),\ldots,\bar{\varphi}(\tau^{(r)},x^0,\varphi^0,\varepsilon),\varepsilon)\|\leq$$
$$\leq 2rC_1C_2\varepsilon^{\frac{1}{4l}}.$$

Запишемо зображення

$$\bar{x}(\tau,x^0+y)=\bar{x}(\tau,x^0)+\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}y+P_1(y,\varepsilon)y$$

$$\bar{\varphi}(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon)=\bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)+\psi+$$
$$+\int\limits_0^\tau\left(\frac{\partial\bar{b}(\bar{x}(\bar{\tau},x^0),\tau)}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{\theta(\tau)}\frac{\partial\bar{p}(\bar{x}(\tau,x^0),\tau)}{\partial\bar{x}}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}d\tau\cdot y+P_2(y,\varepsilon)y.$$

Легко переконатися, що

$$P_1(y,\varepsilon)=\int\limits_0^1(\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0+ry)}{\partial x^0}-\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0})dr.$$

Із усереднених рівнянь для повільних змінних випливає, що $\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}$ рівномірно неперервна на множині $\tau\in[0,L]$, $\|x^0\|\leq\delta$, де δ- деяка стала, тому для довільного як завгодно малого $\mu>0$ можна вказати таке ρ_2, незалежить від ε, що

$$\|P_1(y,\varepsilon)\|<\mu_1$$

при $\|y\|\leq\rho_2<\rho_1$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Аналогічно показуємо, що для цього ж μ_1 існує таке ρ_3, незалежне від ε, що

$$\|P_2(y,\varepsilon)\|<\mu_1,$$

при $\|y\|\leq\rho_3$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

На підставі того, що частинні похідні першого порядку функції Φ рівномірно неперервні в G і обмежені, маємо, що для довільного як завгодно малого $\mu_2>0$ існують такі додатні сталі ρ_4 і C^*, незалежні від ε, що

$$\|\Phi(\bar{x}(\tau^{(1)},x^0+y),\ldots,\bar{\varphi}(\tau^{(r)},x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon),$$
$$\varepsilon)-A(\varepsilon)z\|\leq\mu_1\|z\|(2rC_1+C^*)$$

при $\|z\|\leq\rho_4$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Отже

$$\|N(z,\varepsilon)\|\leq\widetilde{C_1}(\varepsilon^{\frac{1}{4l}}+(\mu_1+\mu_2)\|z\|),$$

де $\widetilde{C_1}=C(2rC_1(C_2+1)+C^*)$.

Покладемо $\mu_1=\mu_2=\frac{1}{4}\widetilde{C_1}$, $\rho^*=\min(\rho_2,\rho_3,\rho_4)$.

Тоді для всіх $z\in K(\varepsilon)=\{z:z\in R^{n+m},\|z\|\leq 2\widetilde{C_1}\varepsilon^{\frac{1}{4l}}\}$ при $\varepsilon_0\leq(\frac{\rho^*}{2\widetilde{C_1}})^{4l}$ справедлива нерівність

$$\|N(z,\varepsilon)\|\leq 2\widetilde{C_1}\varepsilon^{\frac{1}{4l}}.$$

Отже, маємо відображення $N:K\to K$, яке неперервно по z. Тому згідно з теоремою Брауера [7] існує розв'язок $z^0(\varepsilon)=(y^0(\varepsilon),\psi^0(\varepsilon))\in K$ рівняння $z=N(z,\varepsilon)$. А значить існує розв'язок $(x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon))$ крайової задачі (1), (5), який визначається рівністю (10) при $y=y^0(\varepsilon)$, $\psi=\psi^0(\varepsilon)$. Нерівність (9) випливає з того, що

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,x^0)\|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{4l}}+\sup\|\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}\|\times$$
$$\times\|y^0(\varepsilon)\|\leq\widetilde{C}\varepsilon^{\frac{1}{4l}}$$
$$\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\|\leq[1+LC_1(1+\widetilde{C}_0^{-1})]\times$$
$$\times\sup\|\frac{\partial\ \bar{x}(\tau,x^0)}{\partial x^0}\|\|z^0(\varepsilon)\|\leq\underset{\sim}{C}\varepsilon^{\frac{1}{4l}}$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо розглянути частковий випадок крайових умов (5)

$$f(x|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,x|_{\tau=\tau^{(r)}})=0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{r}B_\nu(\bar{x}|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,\bar{x}|_{\tau=\tau^{(r)}})\bar{\varphi}|_{\tau=\tau^{(\nu)}}=$$
$$=g(x|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,\bar{x}|_{\tau=\tau^{(r)}}),$$

яких f і g – неперервно диференційовні в D^r відповідно n- і m- вимірні векторфункції, B_ν - сталі $m\times m$ - матриці, то якщо припустити, що рівняння

$$f(\bar{x}(\tau^{(1)},x^0),\ldots,\bar{x}(\tau^{(r)},x^0))=0,$$

має розв'язок x^0, для якого крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0)$ лежить в D $\forall \tau \in [0, L]$, то, очевидно, x^0 не залежить від ε. Тому, в цьому випадку, для виконання нерівності $\|A^{-1}(\varepsilon)\| \leq C = const$ досить припустити, що

$$det \sum_{j=1}^{r} B_j \neq 0, det \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f^0}{\partial p_j} \frac{\partial \bar{x}(\tau^{(j)}, x^0)}{\partial x^0} \neq 0,$$

де $\frac{\partial f^0}{\partial p_j}$ позначає значення частинних похідних функції $f(p_1, \ldots, p_r)$ по p_j при $p_\nu = \bar{x}(\tau^{(\nu)}, x^0), \nu = \overline{1, r}$.

Зауваження 2. Зроблених на систему (1) припущень замало для того, щоб відображення $N : K \to K$ було стискаючим і таким чином крайова задача (1), (5) мала б єдиний розв'язок. Як випливає з [4, с. 129], для доведення єдності розв'язку (1), (5) необхідно накласти більш сильне обмеження на гладкість правих частин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.— К.: Наукова думка, 2004.— 474 с.

2. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкової задачі з параметрами для коливної системи з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, N3. — С. 419— 423.

3. *Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Усереднення крайової задачі з інтегральними крайовими умовами і параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 228. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С. 96-107.

4. *Сопронюк Т.М., Дудницький П.М.* Багатоточкова задача з параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 191-192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С. 128-136.

5. *Дудницький П.М.* Усереднення крайової задачі з параметрами для коливної системи з імпульсною дією // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 239. Математика.— Чернівці: Рута, 2005.— С. 49-53.

6. *Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання. – 2006. – 9. – № 1. – С. 68-84.

7. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974. — 320 с.