УДК 517.98

©2009 р. М.І. Дмитришин

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника

# НАБЛИЖЕННЯ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ЛЕЖАНДРА

Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з диференціальними операторами Лежандра в гільбертовому просторі $L_2(a,b)$. Встановлено оцінки відстані від заданої функції в $L_2(a,b)$ до підпростору векторів експоненціального типу з фіксованим індексом.

We introduce approximation spaces associated with the Legendre differential operators in the Hilbert space $L_2(a,b)$. Besides, we establish estimates of the distance from a given function in $L_2(a,b)$ to a subspace of exponential type vectors with a fixed index.

**Вступ.** Постановка і розв'язання проблеми наближення елементів банахового простору векторами експоненціального типу замкненого оператора для деяких класів операторів міститься в [1 – 3]. У роботі [5] наведено застосування до згаданої проблеми поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова.

Пропонована робота присвячена проблемі найкращих наближень векторами експоненціального типу диференціальних операторів Лежандра в гільбертовому просторі $L_2(a,b)$. Для таких операторів підпростори векторів експоненціального типу складаються із цілих аналітичних функцій експоненціального типу, які задовольняють відповідні граничні умови.

Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з оператором Лежандра. Такі простори є підпросторами класичного простору Бєсова і їх можна розглядати як інтерполяційні простори між підпростором всіх векторів експоненціального типу і простором $L_2(a,b)$.

Оцінки мінімальної відстані від заданої функції в $L_2(a,b)$ до підпростору векторів експоненціального типу з фіксованим індексом представлено у вигляді нерівностей з використанням квазінорм відповідних апроксимаційних просторів.

**Означення та основні поняття.** Нехай $\Omega = (a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$ і функція $p(\xi) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $p(\xi) > 0$ $(\xi \in \Omega)$, $0 < C_a = \lim\limits_{\xi \downarrow a} \dfrac{p(\xi)}{\xi - a} < \infty$, $0 < C_b = \lim\limits_{\xi \uparrow b} \dfrac{p(\xi)}{b - \xi} < \infty$. Для $m = 1,2,\ldots$ і $s = 0,1,\ldots,m$ покладемо

$$B_{m,s}u = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m}\left(p^s(\xi)\frac{d^m u}{d\xi^m}\right) + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(\xi)\frac{d^j u}{d\xi^j}, \quad b_j(\xi) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{1}$$

з областю визначення $\mathcal{C}^1(B_{m,s}) = C^\infty(\overline{\Omega})$ при $s = m$ і $\mathcal{C}^1(B_{m,s}) = \big\{u \in C^\infty(\overline{\Omega})\colon u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0,\ldots,m-s-1\big\}$ для всіх $s = 0,1,\ldots,m-1$. Припустимо, що виконується умова $b_j(\xi) = O(p^{s-2m+j+1}(\xi))$ при $\xi \downarrow a$ і $\xi \uparrow b$.

Згідно з [7, теор. 7.5.1], оператор $B_{m,s}$, визначений формулою (1), має замикання $\overline{B}_{m,s}$ в $L_2(\Omega)$ і виконуються рівності

$$\mathcal{C}^1(\overline{B}_{m,s}) = \big\{u \in W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2s})\colon u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0,\ldots,m-s-1\big\}$$

для всіх $s = 0,1,\ldots,m-1$ і $\mathcal{C}^1(\overline{B}_{m,m}) = W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2m})$. Вище позначено

$$W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2s}) = \left\{u \in L_2(\Omega) : \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2s})} = \sum_{j=0}^{2m}\int_\Omega p^{2s}(\xi)\,|u^{(j)}(\xi)|^2\,d\xi < \infty\right\}.$$

Області визначення цілих степенів $\overline{B}^k_{m,s}$ позначимо $\mathcal{C}^k(\overline{B}_{m,s})$. Тоді

$$\mathcal{C}^{k+1}(\overline{B}_{m,s}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{B}_{m,s})\colon \overline{B}^k_{m,s}u \in \mathcal{C}^k(\overline{B}_{m,s})\},$$

$$\mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,s}) = \bigcap \{\mathcal{C}^k(\overline{B}_{m,s})\colon k \in \mathbb{N}\}.$$

Спектр оператора $\overline{B}_{m,s}$ складається із ізольованих власних значень і не має скінченних граничних точок. Тому, згідно з [4, теор. 1.1], виконується умова щільності $\overline{\mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,s})} = L_2(\Omega)$ і оператори $\overline{B}^k_{m,s}$, $(k \in \mathbb{N})$ замкнені в $L_2(\Omega)$.

Надалі використовуємо метод дійсної інтерполяції квазінормованих просторів [8, §3.11]. Нехай $0 < \vartheta < 1$ і $1 \le p \le \infty$ або $0 < \vartheta \le 1$ і $p = \infty$. Для пари квазінормованих просторів $\{X, |\cdot|_X\}$ $\{Y, |\cdot|_Y\}$ інтерполяційний простір визначається як підпростір

$$(X,Y)_{\vartheta,p} = \{u \in X + Y\colon |u|_{(X,Y)_{\vartheta,p}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|u|_{(X,Y)_{\vartheta,p}} = \Big(\int_0^\infty \left[\tau^{-\vartheta}K(\tau,u;X,Y)\right]^p \frac{d\tau}{\tau}\Big)^{1/p}$$

при $p < \infty$ і $|u|_{(X,Y)_{\vartheta,p}} = \sup\limits_{0<\tau<\infty} \tau^{-\vartheta}K(\tau,u;X,Y)$ при $p = \infty$, $K(\tau,u;X,Y) = \inf\limits_{u=x+y} \big(|x|_X + \tau\,|y|_Y\big)$.

**Підпростори векторів експоненціального типу.** Нехай $0 < t < \infty$. Розглянемо простір

$$\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s}) = \Big\{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,s})\colon \|u\|_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} < \infty\Big\},$$

з нормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \Big\|\big(\overline{B}_{m,s}/t\big)^k u\Big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

Слідуючи [6], елементи простору $\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$ назвемо векторами експоненціального типу оператора $\overline{B}_{m,s}$. Очевидно, якщо $\tau > t$, то $\|u\|_{\mathcal{E}^\tau_2(\overline{B}_{m,s})} \le \|u\|_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})}$ і $\|u\|_{L_2(\Omega)} \le \|u\|_{\mathcal{E}^t_2}$, $u \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$. Таким чином, простори $\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$ є інваріантними відносно $\overline{B}_{m,s}$ і виконуються неперервні вкладення

$$\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s}) \subset L_2(\Omega),\ \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s}) \subset \mathcal{E}^\tau_2(\overline{B}_{m,s}),\ \tau > t.$$

**Лема 1.** *Простори $\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$ повні і функція*

$$|u|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \inf\{t > 0\colon u \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})\}$$

*на просторі $\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}) = \bigcup_{t>0} \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$ є квазінормою, причому*

$$|u+v|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} \le |u|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} + |v|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})},\ u,v \in \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}).$$

**Доведення.** Із нерівності

$$\|u\|_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} \ge \big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k u\big\|_{L_2(\Omega)},\ u \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$$

безпосередньо випливає: якщо $\{u_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — послідовність Коші в $\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$, то $\{u_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ і $\{(\overline{B}_{m,s}/t)^k u_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — послідовності Коші в $L_2(\Omega)$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $L_2(\Omega)$ повний, то існують такі $u, v \in L_2(\Omega)$, що $u_n \to u$ і $(\overline{B}_{m,s}/t)^k u_n \to v$ за нормою $L_2(\Omega)$. Графік оператора $\overline{B}^k_{m,s}$ є замкненим підпростором в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, тому $v = (\overline{B}_{m,s}/t)^k u$ і $u \in \mathcal{C}^k(\overline{B}_{m,s})$. Оскільки це виконується для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$, то $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,s})$. Отже, $(\overline{B}_{m,s}/t)^k u_n \to (\overline{B}_{m,s}/t)^k u$ за нормою $L_2(\Omega)$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $\{u_n\}$ — послідовність Коші, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, що $\|u_n - u_m\|_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} < \varepsilon$ для всіх $n, m \ge n_\varepsilon$. Звідси отримуємо $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_n - u_m)\big\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ і $n, m \ge n_\varepsilon$. Оскільки $(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_n - u_m) \to 0$ і $(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u - u_m) \to 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$, то існує таке $m_{\varepsilon,k} \ge n_\varepsilon$, що $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_m - u_n)\big\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/2^k$ і $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u - u_m)\big\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/2^k$ для всіх $m \ge m_{\varepsilon,k}$. Тоді $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k u\big\|_{L_2(\Omega)} \le \big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k u_{n_\varepsilon}\big\|_{L_2(\Omega)} + \big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_m - u_{n_\varepsilon})\big\|_{L_2(\Omega)} + \big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u - u_m)\big\|_{L_2(\Omega)}$ і $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k u\big\|_{L_2(\Omega)} < \big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k u_{n_\varepsilon}\big\|_{L_2(\Omega)} + 2\varepsilon/2^k$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Як наслідок,

$$\|u\|^2_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} \le 2\,\|u_{n_\varepsilon}\|^2_{\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})} + 32\varepsilon^2/3,$$

отже, $u \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$. Крім цього, маємо $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_n - u)\big\| \le$

$\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_{m_{\varepsilon,k}}-u)\big\|$ + $\big\|(\overline{B}_{m,s}/t)^k(u_n-u_{m_{\varepsilon,k}})\big\|$ і $\|u_n-u\|_{\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})}\le 4\varepsilon/\sqrt{3}$ для всіх $n\ge n_\varepsilon$. Таким чином, простори $\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})$ повні.

Покладемо $r(u)=\inf\big\{t>0\colon u\in\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})\big\}$. Для будь-яких $u,v\in\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$ і $\varepsilon>0$ значення $\|u\|_{\mathcal{E}_2^{r(u)+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}$, $\|v\|_{\mathcal{E}_2^{r(v)+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}$ є скінченними і виконуються нерівності

$$\|u+v\|_{\mathcal{E}_2^{r+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}\le\|u\|_{\mathcal{E}_2^{r+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}+$$
$$+\|v\|_{\mathcal{E}_2^{r+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}\le\|u\|_{\mathcal{E}_2^{r(u)+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})}+\|v\|_{\mathcal{E}_2^{r(v)+\varepsilon}(\overline{B}_{m,s})},$$

де $r=\max\{r(u),r(v)\}$. Звідси випливає

$$r(u+v)\le r+\varepsilon\le r(u)+r(v)+\varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon$ довільне, то $r(u+v)\le r(u)+r(v)$ для всіх $u,v\in\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$. Очевидно, $r(u)=r(-u)$ для всіх $u\in\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$.

Для $0<t<\infty$ розглянемо простір

$$\mathcal{E}_2^t(\Omega)=\Big\{u\in C^\infty(\overline{\Omega}):\exists c=c(u,t),\ \sup_{\xi\in\Omega}|u^{(k)}(\xi)|\le ct^k,\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\}$$

і утворимо об'єднання $\mathcal{E}(\Omega)=\bigcup_{t>0}\mathcal{E}_2^t(\Omega)$. В [6] показано, що простір $\mathcal{E}(\Omega)$ співпадає з простором цілих аналітичних функцій експоненціального типу, тобто, цілих функцій, для яких існують такі $c>0$ і $t$, що

$$|u(z)|\le c\,e^{t\|z\|}\ \text{для всіх}\ z\in\mathbb{C}.$$

**Лема 2.** *Справедливі наступні вкладення*

$$\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})\subset\Big\{u\in\mathcal{E}(\Omega)\colon(\overline{B}^k_{m,s}u)^{(j)}(a)=(\overline{B}^k_{m,s}u)^{(j)}(b)=0,j=0,\dots,m-s-1,\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\}$$

*для всіх* $s=0,1,\dots,m-1$ *і* $\mathcal{E}(\overline{B}_{m,m})\subset\mathcal{E}(\Omega)$.

**Доведення.** Для $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ і довільного $\varepsilon>0$, застосовуючи [7, лема 7.3.1/1], отримуємо

$$\int_\Omega\big[|(p^su^{(m)})^{(m)}|^2+|u|^2\big]\,d\xi\sim\int_\Omega\big[p^{2s}|u^{(2m)}|^2+|u|^2\big]\,d\xi,$$

$$\Big\|\sum_{j=0}^{2m-1}b_j(\xi)u^{(j)}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}=\int_\Omega\Big|\sum_{j=0}^{2m-1}b_j(\xi)u^{(j)}(\xi)\Big|^2d\xi\le c\int_\Omega\sum_{j=0}^{2m}p^{2\max(0,\,s-2m+j)}(\xi)(\varepsilon|u^{(j)}(\xi)|^2+c(\varepsilon)|u(\xi)|^2)\,d\xi\le c_1\Big(\varepsilon\|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\,p^{2s})}+c(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big).$$

Звідси маємо

$$\|B_{m,s}u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\sim\|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\,p^{2s})}.$$

За індукцією отримуємо

$$\|B^k_{m,s}u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\sim\|u\|^2_{W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2ks})}.\quad(2)$$

Зокрема, $\mathcal{C}^1(\overline{B}^k_{m,s})=\overline{\mathcal{C}^1(B^k_{m,s})}$ є замикання $\mathcal{C}^1(B^k_{m,s})$ в $W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2ks})$. Згідно з [7, теор. 7.3.2/1], при $j=m-[(s+1)/2]-1$ справедливі неперервні вкладення $W_2^m(\Omega;\,p^s)\subset C^j(\overline{\Omega})$, тому

$$\mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,s})=\Big\{u\in C^\infty(\overline{\Omega})\colon\big(\overline{B}^k_{m,s}u\big)^{(j)}(a)=\big(\overline{B}^k_{m,s}u\big)^{(j)}(b)=0,j=0,\dots,m-s-1,k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$
$$\mathcal{C}^\infty(\overline{B}_{m,m})=C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Отже, для всіх $s=0,1,\dots,m-1$ маємо

$$\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})=\Big\{u\in C^\infty(\overline{\Omega})\colon\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}t^{-2k}\|\overline{B}^k_{m,s}u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}<\infty,\big(\overline{B}^k_{m,s}u\big)^{(j)}(a)=\big(\overline{B}^k_{m,s}u\big)^{(j)}(b)=0,\ j=0,\dots,m-s-1,\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$

$$\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,m})=\Big\{u\in C^\infty(\overline{\Omega}):\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}t^{-2k}\|\overline{B}^k_{m,m}u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}<\infty\Big\}.$$

Покладаючи $0\in\rho(\overline{B}_{m,s})$, де $\rho(\overline{B}_{m,s})$ — резольвентна множина оператора $\overline{B}_{m,s}$, із (2) отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}t^{-2k}\|\overline{B}^k_{m,s}u\|^2_{L_2(\Omega)}\ge\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=0}^{2km}\nu^{-2k}\|u^{(j)}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де $\nu>0$ не залежить від $k$. Звідси для всіх $s=0,1,\ldots,m-1$ маємо

$$\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})\subset\Big\{u\in\mathcal{E}(D)\colon(\overline{B}_{m,s}^{\,k}u)^{(j)}(a)=(\overline{B}_{m,s}^{\,k}u)^{(j)}(b)=0,j=0,\ldots,m-s-1,\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$
$$\mathcal{E}(\overline{B}_{m,m})\subset\mathcal{E}(D),$$

де $\mathcal{E}(D)=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_2^{\nu}(D)$ і $\mathcal{E}_2^{\nu}(D)=\Big\{u\in C^{\infty}(\overline{\Omega}):\|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(D)}=\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum\limits_{j=0}^{2km}\nu^{-2k}\|u^{(j)}\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}\Big\}$.

Покажемо, що простір $\mathcal{E}(D)$ співпадає з простором $\mathcal{E}(\Omega)$.

Згідно з лемою Соболєва при $s>n/2$

$$\sup_{\xi\in\Omega}|u(\xi)|\leq c\max_{k\leq s}\|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\sup_{\xi\in\Omega}|u^{(k)}(\xi)|\leq c\max\{1,\nu,\ldots,\nu^s\}\times$$
$$\times\nu^k\|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(D)}\leq c_0\nu^k$$

для $u(\xi)\in\mathcal{E}_2^{\nu}(D)$ і всіх $k\in\mathbb{Z}_+$. Отже, $\mathcal{E}_2^{\nu}(D)\subset\mathcal{E}_2^{\nu}(\Omega)$ і $\mathcal{E}(D)\subset\mathcal{E}(\Omega)$.

Навпаки, нехай $u\in\mathcal{E}_2^{\nu}(\Omega)$. Тоді $\|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}\leq c_2\nu^k$ і $\sum\limits_{j=0}^{2km}\|u^{(j)}\|_{L_2(\Omega)}\leq c_3(2\nu)^k$. Із нерівності

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=0}^{2km}(4\nu)^{-2k}\|u^{(j)}\|^2_{L_2(\Omega)}\leq\frac{4}{3}\sup_k\frac{\sum\limits_{j=0}^{2km}\|u^{(j)}\|^2_{L_2(\Omega)}}{(2\nu)^{2k}}$$

випливає $u\in\mathcal{E}_2^{4\nu}(D)$ і $\mathcal{E}(\Omega)\subset\mathcal{E}(D)$.

**Апроксимаційні простори векторів експоненціального типу.** Визначимо функціонал

$$E(t,u;\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega))=\inf\Big\{\big\|u-u^0\big\|_{L_2(\Omega)}:u^0\in\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),\ \big|u^0\big|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})}<t\Big\},\ u\in L_2(\Omega).$$

Для пар чисел $0<\alpha<\infty$ і $0<\tau\leq\infty$ або $0\leq\alpha<\infty$ і $\tau=\infty$ розглянемо апроксимаційні простори

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})=\Big\{u\in L_2(\Omega):\ |u|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}<\infty\Big\},$$

породжені функціоналом $E$, де, відповідно до [8, лема 7.1.6], функція

$$|u|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}=\left(\int_0^{\infty}\big[t^{\alpha}E(t,u;\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega))\big]^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}$$

при $0<\tau<\infty$ і

$$|u|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}=\sup_{t>0}t^{\alpha}E(t,u;\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega))$$

при $\tau=\infty$ є квазінормою на $\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$.

**Теорема 1.**. *Справедливі наступні вкладення*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})\subset\Big\{u\in B^{\alpha}_{2,\tau}(\Omega)\colon(\overline{B}_{m,s}^{\,k}u)^{(j)}(a)=(\overline{B}_{m,s}^{\,k}u)^{(j)}(b)=0,j=0,\ldots,m-s-1,k\in\mathbb{Z}_+\Big\}\tag{3}$$

*для всіх* $s=0,1,\ldots,m-1$ *і*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,m})\subset B^{\alpha}_{2,\tau}(\Omega),\tag{4}$$

*де* $B^{\alpha}_{2,\tau}(\Omega)$ *— простір Бєсова.*

**Доведення.** Застосовуючи [7, теор. 4.2.2], з класичних нерівностей Бернштейна і Джексона у формі, що представлена в [8, §7.2], для $s\in\mathbb{N}$ отримуємо

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)}\leq c_s\,|u|^s_{\mathcal{E}(\Omega)}\,\|u\|_{L_2(\Omega)},\ u\in\mathcal{E}(\Omega),\tag{5}$$

$$E(t,u;\mathcal{E}(\Omega),L_2(\Omega))\leq c_st^{-s}\|u\|_{W_2^s(\Omega)},\quad u\in W_2^s(\Omega),\tag{6}$$

де $E(t,u;\mathcal{E}(\Omega),L_2(\Omega))=\inf\Big\{\big\|u-u^0\big\|_{L_2(\Omega)}\colon u^0\in\mathcal{E}(\Omega),\big|u^0\big|_{\mathcal{E}(\Omega)}<t\Big\}$, $u\in L_2(\Omega)$.

Норма простору $W_2^s(\Omega)$ задається рівністю

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)}=\inf_{g|_{\Omega}=u,g\in W_2^s(\mathbb{R})}\|g\|_{W_2^s(\mathbb{R})}.$$

Простори $\mathcal{E}(D)$ і $\mathcal{E}(\Omega)$ наділено відповідно квазінормами

$$|u|_{\mathcal{E}(D)}=\|u\|_{L_2(\Omega)}+\inf\big\{t>0\colon u\in\mathcal{E}_2^t(D)\big\},$$
$$|u|_{\mathcal{E}(\Omega)}=\inf_{g|_{\Omega}=u,g\in\mathcal{E}(\mathbb{R})}|g|_{\mathcal{E}(\mathbb{R})},$$

де $|g|_{\mathcal{E}(\mathbb{R})} = \|g\|_{L_2(\mathbb{R})} + \sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp}\widehat{g}\}$, $\operatorname{supp}\widehat{g}$ — носій перетворення Фур'є $\widehat{g}$ функції $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ і $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ — простір цілих аналітичних функцій експоненціального типу, що належать $L_2(\mathbb{R})$.

Із (5), (6) і [8, теор. 7.1.7] отримуємо

$$\|u\|^{1/(s+1)}_{W_2^s(\Omega)} \le c_s\, |u|^{1-1/(s+1)}_{\mathcal{E}(\Omega)}\, \|u\|^{1/(s+1)}_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{E}(\Omega), \tag{7}$$

$$K(t,u;\mathcal{E}(\Omega),L_2(\Omega)) \le \le c_s\, t^{1/(s+1)} \|u\|^{1/(s+1)}_{W_2^s(\Omega)}, u \in W_2^s(\Omega), \tag{8}$$

де $K(t,u;\mathcal{E}(\Omega),L_2(\Omega)) = \inf\limits_{u=u^0+u^1} \big(|u^0|_{\mathcal{E}(\Omega)} + t\,\|u^1\|_{L_2(\Omega)}\big)$, $u^0 \in \mathcal{E}(\Omega)$, $u^1 \in L_2(\Omega)$.

Застосовуючи лему 2 і теорему Пелі-Вінера, отримуємо еквівалентність

$$\inf_{g|_\Omega = u, g\in\mathcal{E}(\mathbb{R})} \sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp}\widehat{g}\} \sim \inf\{t > 0\colon u \in \mathcal{E}_2^t(D)\}$$

для всіх $u \in \mathcal{E}(D)$. Таким чином, із (7), (8) отримуємо

$$\|u\|^{1/(s+1)}_{W_2^s(\Omega)} \le c_s\, |u|^{1-1/(s+1)}_{\mathcal{E}(D)}\, \|u\|^{1/(s+1)}_{L_2(\Omega)}, u \in \mathcal{E}(D),$$

$$K(t,u;\mathcal{E}(D),L_2(\Omega)) \le c_s\, t^{1/(s+1)} \|u\|^{1/(s+1)}_{W_2^s(\Omega)}, u \in W_2^s(\Omega),$$

де $K(t,u;\mathcal{E}(D),L_2(\Omega)) = \inf\limits_{u=u^0+u^1} \big(|u^0|_{\mathcal{E}(D)} + t\,\|u^1\|_{L_2(\Omega)}\big)$, $u^0 \in \mathcal{E}(D)$, $u^1 \in L_2(\Omega)$.

Визначимо простір

$$\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(D) = \Big\{u \in L_2(\Omega) : |u|_{\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \big(t^\alpha E(t,u;\mathcal{E}(D),L_2(\Omega))\big)^\tau \frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau} < \infty\Big\},$$

де $E(t,u;\mathcal{E}(D),L_2(\Omega)) = \inf\Big\{\|u - u^0\|_{L_2(\Omega)}\colon u^0 \in \mathcal{E}(D), |u^0|_{\mathcal{E}(D)} < t\Big\}$. Використовуючи [8, теор. 3.11.5-6, 7.1.7], [7, теор. 2.4.2/2], отримуємо

$$\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(D) = \Big(\big(\mathcal{E}(D),\, L_2(\Omega)\big)_{1/(\alpha+1),\tau(\alpha+1)}\Big)^{\alpha+1} = \Big(\Big(L_2(\Omega),\, \big[W_2^s(\Omega)\big]^{1/(s+1)}\Big)_{\alpha(s+1)/s(\alpha+1),\tau(\alpha+1)}\Big)^{\alpha+1} \big(L_2(\Omega),\, W_2^s(\Omega)\big)_{\alpha/s,\tau} = B^\alpha_{2,\tau}(\Omega).$$

Звідси і з леми 2 отримуємо (3)-(4).

**Найкращі наближення векторами експоненціального типу.** Розглянемо проблему найкращих наближень довільної функції з $L_2(\Omega)$ функціями $\overline{B}_{m,s}$-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})$ з фіксованим індексом. Для цього оцінимо відстань

$$d(t,u) = \inf\Big\{\big\|u - u^0\big\|_{L_2(\Omega)} : u^0 \in \mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})\Big\}$$

між деякою функцією $u \in L_2(\Omega)$ і підпростором $\mathcal{E}_2^t(\overline{B}_{m,s})$.

**Теорема 2.**. *Для кожної пари індексів $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau \le \infty$ або $0 \le \alpha < \infty$ і $\tau = \infty$ існують такі постійні $c_1(\alpha,\tau)$ і $c_2(\alpha,\tau)$, що*

$$|u|_{B^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})} \le c_1 |u|^\alpha_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), \tag{9}$$

$$d(t,u) \le c_2\, t^{-\alpha}\, |u|_{B^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}, u \in B^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s}). \tag{10}$$

**Доведення.** Нехай $\big[\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})\big]^\vartheta$ — простір $\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$, наділений квазінормою $|u|^\vartheta_{\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}$, $u \in \mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$. Згідно з [8, теор. 7.1.7], при $\vartheta = 1/(\alpha+1)$ і $\tau = g\vartheta$ простір $\big[\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})\big]^\vartheta$ є інтерполяційним між $\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$ і $L_2(\Omega)$, тобто

$$\big[\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})\big]^\vartheta = \big(\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\big)_{\vartheta,g} \tag{11}$$

(з точністю до еквівалентності норм). Як наслідок,

$$\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}) \subset \big[\mathcal{B}^\alpha_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})\big]^\vartheta \subset L_2(\Omega).$$

В силу [8, теор. 3.11.4(b)], для деякої постійної $c(\vartheta,g)$ отримуємо

$$|u|_{\left(\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega)\right)_{\vartheta,g}} \le c|u|^{1-\vartheta}_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} \|u\|^\vartheta_{L_2(\Omega)},$$

де $u \in \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$. Із цієї нерівності та ізоморфізму (11) випливає існування такої постійної $c_1(\alpha,\tau)$, що виконується нерівність (9).

Застосовуючи [8, теор. 3.11.4(a)], для деякої постійної $c(\vartheta,g)$ маємо

$$K\left(t,u;\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega)\right) \le c\,t^\vartheta |u|_{\left(\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}),L_2(\Omega)\right)_{\vartheta,g}},$$

де $u \in \big(\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\big)_{\vartheta,g}$. Отже, відповідно до ізоморфізму (11) існує така постійна $c_0(\alpha,\tau)$, що

$$K\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) \le c_0\, t^{\vartheta} |u|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})},$$

де $u \in \mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$. Покладемо

$$K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) = \inf_{u=u^0+u^1} \max\left\{ \left|u^0\right|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})}, t\left\|u^1\right\|_{L_2(\Omega)} \right\},$$

$u^0 \in \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})$, $u^1 \in L_2(\Omega)$. Оскільки $K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) \le K\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right)$, то

$$t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) \le c_0 |u|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}, \tag{12}$$

де $u \in \mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$. Згідно з [8, лема 7.1.2], для будь-якого $t > 0$ існує таке $s > 0$, що

$$K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) = s,$$
$$E(s+0, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)) \le s/t.$$

Для будь-якого $s_1 > 0$ існує таке $t > 0$, що $s_1 \le K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right) = s$. Якщо $u$ фіксоване, то функція $E(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega))$ незростаюча, отже, $E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)) \le E(s_1 + 0, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)) \le s_1/t$.
Звідси маємо $[E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega))]^{\vartheta} \le t^{-\vartheta} {s_1}^{\vartheta} \le t^{-\vartheta} s_1 s^{\vartheta-1}$. Тому $s^{1-\vartheta}\left[E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega))\right]^{\vartheta} \le t^{-\vartheta} s_1 \le t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)\right)$. Враховуючи (12), отримуємо

$$s^{1-\vartheta}[E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega))]^{\vartheta} \le c_0 |u|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}.$$

Покладаючи $\alpha = (1-\vartheta)/\vartheta$, маємо

$$s^{\alpha} E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega)) \le c_0^{1/\vartheta} |u|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})}, \tag{13}$$

де $u \in \mathcal{B}^{\alpha}_{2,\tau}(\overline{B}_{m,s})$.

Якщо $|u^0|_{\mathcal{E}(\overline{B}_{m,s})} = r\,(u^0) + \|u^0\|_{L_2(\Omega)} < s$, то $r\,(u^0) < s - \|u^0\|_{L_2(\Omega)}$, де покладено $r(u^0) = \inf\left\{t > 0\colon u^0 \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})\right\}$. Тому $u^0 \in \mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s})$ для такого $t > 0$, що $r\,(u^0) < t < s - \|u^0\|_{L_2(\Omega)}$. Оскільки $\mathcal{E}^t_2(\overline{B}_{m,s}) \subset \mathcal{E}^s_2(\overline{B}_{m,s})$, то $u^0 \in \mathcal{E}^s_2(\overline{B}_{m,s})$. Таким чином, виконується нерівність

$$d(s, u) \le E(s, u; \mathcal{E}(\overline{B}_{m,s}), L_2(\Omega))), \ u \in L_2(\Omega). \tag{14}$$

Покладаючи $c_2 = c_0^{1/\vartheta}$ в (13) і враховуючи (14), отримуємо (10).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Горбачук М.Л., Горбачук В.І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, № 5. – С. 616–628.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Операторный подход к вопросам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – Т.9, № 6. – С. 90–108.

3. *Горбачук М.Л.* Ознаки повноти множини цілих векторів експоненціального типу необмеженого оператора // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 7–11.

4. *Горбачук В.И, Князюк А.В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Усп. мат. наук. – 1989. – Т.44, № 3. – С. 55-91.

5. *Дмитришин М.І., Лопушанський О.В.* Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах // Доп. НАН України. – 2007. – № 12. – С. 16–22.

6. *Радыно Я.В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т.21, № 9. – С. 1559-1569.

7. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1995.

8. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation Spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1976.