УДК 517.929

©2009 р. І.М. Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМИ

Доведено нові теореми обґрунтування методу усереднення за всіма швидкими змінними інтегральної крайової задачі з параметрами для багаточастотної нелінійної системи з перетвореним аргументом. Встановлено якісні оцінки відхилень розв'язків вихідної та усередненої задач.

We prove some new theorems concerning verification of the averaging method with respect to all fast variables for an integral boundary value problem with parameters for a multi-frequenting nonlinear system with a transformed variable. Besides, qualitative estimates for the difference between solutions of the given and the averaging systems are obtained.

1. Постановка задачі та основні припущення. Розглянемо багаточастотну нелінійну коливну систему диференціальних рівнянь із загаюваннями

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \mu, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \mu, \varepsilon) \tag{2}$$

та інтегральними крайовими умовами

$$\int_0^{\nu_1} \xi^{(1)}(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \mu, \varepsilon)\, d\tau = \gamma_1\ , \ldots, \\ \int_0^{\nu_q} \xi^{(q)}(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \mu, \varepsilon)\, d\tau = \gamma_q, \tag{3}$$

$$\int_0^L [A_1(\tau)\,\varphi + A_2(\tau)\,\varphi_\theta + \\ + \eta(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \mu, \nu, \varepsilon)]\, d\tau = g. \tag{4}$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset R^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \subset R^m$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$, λ, θ – сталі з інтервала $(0,1)$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $L = const > 0$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ – малий параметр; $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in B_1 \subset R^s$ і $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_q) \in B_2 \subset R^q$ – невідомі параметри; D, B_1, B_2 – обмежені області. Сумарний розмір вектор-функцій $\xi^{(j)}, j = \overline{1, q}$, дорівнює $n + s + q$. $a, b, \xi^{(1)}, ..., \xi^{(q)}, \eta$ належать певним класам гладких і 2π–періодичних по φ, φ_Δ функцій на множинах $G_1 = [0, L] \times D \times D \times B_1 \times (0, \varepsilon_0]$ і $G_2 = [0, L] \times D \times D \times B_1 \times B_2 \times (0, \varepsilon_0]$; $\gamma_1, ..., \gamma_q, g$ – сталі вектори відповідних розмірів. Вважатимемо також, що $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ – неперервні на $[0, L]$ $m \times m$ матриці, які задовольняють умову

$$\det A \neq 0, \tag{5}$$

де $A = \int_0^L (A_1(\tau) + A_2(\tau))\, d\tau$.

Для системи (1), (2) характерні резонансні явища, які значно ускладнюють її дослідження [1,2]. На відміну від резонансних систем без запізнення [1], для (1), (2) умова резонансу в точці $\tau \in [0, L]$ враховує запізнення в швидких змінних [3] і набуває вигляду [4]

$$\gamma_{kl}(\tau) = (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\theta\tau))\,\theta = 0,$$

де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в R^n, $\|k\| + \|l\| \neq 0$, $\|k\| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_m|$, k, l – вектори з цілочисельними координатами.

Інтегральні крайові задачі без параметрів для (1), (2) розглядалися в [4, 5]. В [6] досліджувалась інтегральна крайова задача з параметрами для імпульсної багаточастотної нелінійної коливної системи.

Для розв'язання задачі (1) – (4), тобто для знаходження невідомих векторів μ, ν і розв'язку x, φ системи (1), (2), які задовольняють крайові умови (3), (4), використаємо метод усереднення за всіма швидкими змінними.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

1) Існує таке ціле $p \geq 2m$, що $\omega_j(\tau) \in C^{p-1}([0,L])$, $j = \overline{1,m}$, і для $\tau \in [0,L]$

$$\det(V^T(\tau)V(\tau)) \geq c = const > 0,$$

де $V(\tau)$ – матриця порядку $p \times 2m$ з елементами $V_{ij}(\tau) = \dfrac{d^{i-1}}{d\tau^{i-1}}\omega_j(\tau)$, $V_{i\,m+j}(\tau) = \dfrac{d^{i-1}}{d\tau^{i-1}}(\theta\omega_j(\theta\tau))$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,p}$. У випадку $p = 2m$ умова полягає у відмінності від нуля на $[0,L]$ визначника Вронського порядку $2m$ для системи функцій $\{\omega(\tau), \theta\,\omega(\theta\tau)\}$.

2) Вектор-функції $F(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon) = \{a(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon), b(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon), \xi^{(1)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon), \ldots, \xi^{(q)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)\}$ та $\eta(\tau,x,z,u,v,\mu,\nu,\varepsilon)$ 2π-періодичні за кожною змінною u_ν, v_ν, $\nu = \overline{1,m}$, і $F \in C^2_{\tau,x,z,\mu,\varepsilon}(G_1,\sigma_1)$, $\eta \in C^1_{\tau,x,z,\mu,\varepsilon,\nu}(G_2,\sigma_1)$.

3) Для коефіцієнтів Фур'є $F_{kl}(\tau,x,z,\mu,\varepsilon)$ і $\eta_{kl}(\tau,x,z,\mu,\nu,\varepsilon)$ функцій $F(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)$ та $\eta(\tau,x,z,u,v,\mu,\nu,\varepsilon)$ відповідно виконуються нерівності

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}(\|k\|+\|l\|)\sup_{G_1}\|F_{kl}\| +$$
$$+\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}(\|k\|+\|l\|)^{-1}\left[\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau}\right\| +\right.$$
$$+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial z}\right\| +$$
$$+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial \tau\partial\mu}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial \tau\partial x}\right\| +$$
$$+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial \tau\partial z}\right\| + \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x\partial z_i}\right\| +\right.$$
$$+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z\partial x_i}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x\partial x_i}\right\| +$$
$$\left.\left.+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z\partial z_i}\right\|\right)\right] \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\left[(\|k\|+\|l\|)\sup_{G_2}\|\eta_{kl}\| +\right.$$
$$+(\|k\|+\|l\|)^{-1}\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \tau}\right\| +\right.$$
$$+\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial x}\right\| + \sup_{G_2}\left\|\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial z}\right\| +$$
$$\left.\left.+\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \mu}\right\|\right)\right] \leq \sigma_1.$$

2. Усереднення крайової задачі. Розглянемо відповідну (1) – (4) усереднену за швидкими змінними задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu), \tag{6}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu), \tag{7}$$

$$\int_0^{\nu_1}\bar{\xi}^{(1)}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu)\,d\tau = \gamma_1, \ldots, \qquad \int_0^{\nu_q}\bar{\xi}^{(q)}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu)\,d\tau = \gamma_q, \tag{8}$$

$$\int_0^L [A_1(\tau)\,\bar{\varphi} + A_2(\tau)\,\bar{\varphi}_\theta + \bar{\eta}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu,\nu)]d\tau = g, \tag{9}$$

де

$$\bar{F}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu) = F_0(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu,0) =$$
$$=(2\pi)^{-2m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}F(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,u,v,\mu,0)du_1\ldots dv_m,$$

$$\bar{\eta}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu,\nu) = \eta_0(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,\mu,\nu,0) =$$
$$=(2\pi)^{-2m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}F(\tau,\bar{x},\bar{x}_\lambda,u,v,\mu,\nu,0)du_1\ldots dv_m.$$

Задача (6) – (9) значно простіша ніж (1) – (4), оскільки не містить у вектор-функціях

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\xi}^{(1)}$, …, $\bar{\xi}^{(q)}$, $\bar{\eta}$ швидких змінних. Крім того, (6), (8) та (7), (9) – дві окремі задачі. Перша – для знаходження $\bar{x}$, друга – $\bar{\varphi}$.

Виконання умов **1)** – **3)** дає змогу для осциляційного інтеграла

$$I_{kl}(\tau,\bar{s},\varepsilon)=\int_0^\tau f_{kl}(s,\varepsilon)\exp\Big\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{s}}^{s}\gamma_{kl}(z)dz\Big\}ds$$

одержати оцінку [1,4]

$$\|I_{kl}(\tau,\bar{s},\varepsilon)\|\le\sigma_0\varepsilon^\beta\Big(\sup_{G_3}\|f_{kl}(\tau,\varepsilon)\|+ \\ +(\|k\|+\|l\|)^{-1}\sup_{G_3}\Big\|\frac{df_{kl}}{d\tau}(\tau,\varepsilon)\Big\|\Big) \tag{10}$$

для всіх $\tau\in[0,L]$, $\bar{s}\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, де $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, $G_3=[0,L]\times(0,\varepsilon_1]$, $\beta=\frac{1}{2p}$.

На підставі оцінки (10) в [4] одержано оцінку похибки методу усереднення для початкової задачі без параметрів. Як і в [4] легко перевірити, що при зроблених припущеннях справедлива нерівність при досить малому ε_0

$$\|U(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)\|+\Big\|\frac{\partial U(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)}{\partial x^\circ}\Big\|+ \\ +\Big\|\frac{\partial U(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)}{\partial \varphi^\circ}\Big\|+ \\ +\Big\|\frac{\partial U(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)}{\partial \mu^\circ}\Big\|\le\sigma_2\varepsilon^\beta, \tag{11}$$

де $U(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon) = (x(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,x^\circ\!,\mu^\circ)) +(\varphi(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon))$, а $\big(x(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon),\ \varphi(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)\big)$ і $\big(\bar{x}(\tau,x^\circ\!,\mu^\circ),\varphi(\tau,x^\circ\!,\varphi^\circ\!,\mu^\circ\!,\varepsilon)\big)$ – розв'язки відповідно систем (1), (2) і (6), (7), які при $\tau=0$ набувають значень (x°,φ°), $\sigma_2{=}const{>}0$.

Дослідимо далі відхилення розв'язків вихідної та усередненої крайових задач.

Лема 1. *Нехай:*

а) виконується припущення (5)*;*

б) для деяких $\rho_1>0,\ \rho_2>0,\ \rho_3>0$ *існує єдиний розв'язок* $x^\circ,\mu^\circ,\nu^\circ$ *системи рівнянь* (6)*, в якій* $\bar{x}=\bar{x}(\tau,x^\circ,\mu^\circ)$*;*

в) крива $\bar{x}=\bar{x}\,(\tau,x^\circ,\mu^\circ)$ *для всіх* $\tau\in[0,L]$ *лежить в* $D\subset R^n$, $D\ne\varnothing$, *разом зі своїм* ρ_1 *– околом,* $B_{\rho_2}(\mu^\circ)\subset B_1$, $B_{\rho_3}(\nu^\circ)\subset B_2$, $B_{\rho_2}(\mu^\circ)$ *та* $B_{\rho_3}(\nu^\circ)$ *– відкриті кулі в* R^s *та* R^q *радіусів* ρ_2 *та* ρ_3 *з центрами в точках* μ° *і* ν° *відповідно.*

Тоді задача (6) – (9) *має єдиний розв'язок* $\{\bar{x}\,(\tau,x^\circ,\mu^\circ)\,,\bar{\varphi}\,(\tau,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)\,,\mu^\circ,\nu^\circ\}$.

Доведення. Справді,

$$\bar{x}(\tau,x^\circ,\mu^\circ)=x^\circ+ \\ +\int_0^\tau\bar{a}\,(t,\bar{x}(t,x^\circ,\mu^\circ),\bar{x}(\lambda t,x^\circ,\mu^\circ),\mu^\circ)\,dt, \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}(\tau,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ,\varepsilon)=\varphi^\circ+\int_0^\tau\Big(\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+ \\ +\bar{b}\,(t,\bar{x}(t,x^\circ,\mu^\circ),\bar{x}(\lambda t,x^\circ,\mu^\circ),\mu^\circ)\Big)dt, \tag{13}$$

а φ° обчислюємо із крайової умови (9)

$$\varphi^\circ{=}\Big(\int_0^L(A_1(\tau)+A_2(\tau))\,d\tau\Big)^{-1}\Big[g- \\ -\int_0^L\Big(A_1(\tau)\bar{\varphi}(\tau,x^\circ,0,\mu^\circ,\varepsilon)+ \\ +A_2(\tau)\bar{\varphi}(\theta\tau,x^\circ,0,\mu^\circ,\varepsilon)+ \\ +\bar{\eta}\big(\tau,\bar{x}(\tau,x^\circ\!,\mu^\circ),\bar{x}(\lambda\tau,x^\circ\!,\mu^\circ),\mu^\circ\!,\nu^\circ\big)\Big)d\tau\Big].$$

Із інтегральних рівнянь (12), (13) для розв'язку усередненої задачі (6) – (9) та леми Гронуолла-Беллмана одержуємо правильність наступної леми.

Лема 2. *Нехай виконується припущення* **2)**. *Тоді при досить малому* $\varepsilon_0>0$ *для всіх* $\tau\in[0,L]$, $x^\circ\in D$, $\varphi^\circ\in R^m$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *справедливі оцінки*

$$\Big\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{x}_\lambda}{\partial x^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{x}_\lambda}{\partial\mu^\circ}\Big\|+ \\ +\Big\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial x^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{x}_\lambda}{\partial x^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\mu^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{x}_\lambda}{\partial\mu^\circ\partial\tau}\Big\|+ \\ +\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial x^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu^\circ}\Big\|+\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial\mu^\circ}\Big\|+ \\ +\Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\theta}{\partial x^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\mu^\circ\partial\tau}\Big\|+\Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\theta}{\partial x^\circ\partial\tau}\Big\|\le\sigma_3,$$

$$\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varphi^\circ}\Big\|=\Big\|\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial\varphi^\circ}\Big\|=1,\ \Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\varphi^\circ\partial\tau}\Big\|=\Big\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\theta}{\partial\varphi^\circ\partial\tau}\Big\|=0$$

зі сталою $\sigma_3 = (1+\lambda)\sigma_1 + 2\exp\{L\sigma_1(1+\lambda^{-1})\}(1+\sigma_1(5+\lambda+L(1+\theta+\sigma_1+\theta\sigma_1)))$.

3. Оцінка похибки методу усереднення.

Позначимо

$$P_1^j \equiv \left(\int\limits_0^{\nu_j}\Big[\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\bar x}\cdot\frac{\partial\bar x(M_\tau^\circ)}{\partial x^\circ}+ +\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\bar x_\lambda}\cdot\frac{\partial\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ)}{\partial x^\circ}\Big]d\tau;\right.$$

$$\left.\int\limits_0^{\nu_j}\Big[\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\bar x}\cdot\frac{\partial\bar x(M_\tau^\circ)}{\partial\mu^\circ}+ +\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\bar x_\lambda}\cdot\frac{\partial\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ)}{\partial\mu^\circ}+\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\mu^\circ}\Big]d\tau\right),$$

$$P_2^j\equiv\left(\bar\xi^{(j)}\big(\nu_j^\circ,\bar x(\nu_j^\circ,x^\circ,\mu^\circ),\bar x(\lambda\nu_j^\circ,x^\circ,\mu^\circ),\mu^\circ\big)\right),$$

$$Q\equiv\begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & 0 & \dots & 0\\ P_1^2 & 0 & P_2^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1^q & 0 & 0 & \dots & P_2^q\end{pmatrix},$$

$$\tilde\xi^{(j)}\equiv\xi^{(j)}(\nu_j,x(\nu_j,\varepsilon),x(\lambda\nu_j,\varepsilon),\varphi(\nu_j,\varepsilon),\varphi(\theta\nu_j,\varepsilon),\mu,\varepsilon)- -\bar\xi^{(j)}(\nu_j,x(\nu_j,\varepsilon),x(\lambda\nu_j,\varepsilon),\mu,\varepsilon).$$

Тут $j=\overline{1,q}$, $M_\tau^\circ\equiv(\tau,x^\circ,\mu^\circ)$, $M_{\lambda\tau}^\circ\equiv(\lambda\tau,x^\circ,\mu^\circ)$, $K^\circ\equiv(\tau,\bar x(M_\tau^\circ),\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ),\mu^\circ)$.

Теорема 1. *Нехай:*

- *а) виконуються умови* **1)** – **3)** *та умови лем 1 і 2;*
- *б)* $\det Q\neq 0$;
- *в)* $\sup\limits_{\substack{u,\,v\in R^m\\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}}\left\|Q^{-1}\Lambda\right\|=c_\circ<1$,

де $\Lambda\equiv\left(\tilde\xi_\circ^{(1)}\ \tilde\xi_\circ^{(2)}\ \dots\ \tilde\xi_\circ^{(q)}\right)^T$, $\tilde\xi_\circ^{(j)}\equiv\tilde\xi^{(j)}\big(\nu_j^\circ, x(\nu_j^\circ,\varepsilon),x(\lambda\nu_j^\circ,\varepsilon),u,v,\mu,\varepsilon\big)$, $j=\overline{1,q}$.

Тоді можна вибрати такі сталі $\tilde\varepsilon_\circ>0$, $\tilde c>0$, *що для кожного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\circ]$, $\varepsilon_\circ<\tilde\varepsilon_\circ$ *задача* (1) – (4) *має единий розв'язок* $\{x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\nu(\varepsilon)\}$, *який задовольняє нерівність*

$$\begin{gathered}\|x(\tau,\varepsilon)-\bar x(\tau,x^\circ,\mu^\circ)\|+\\ +\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar\varphi(\tau,x^\circ,\varepsilon^\circ,\mu^\circ,\varepsilon)\|+\\ +\|\mu(\varepsilon)-\mu^\circ\|+\|\nu(\varepsilon)-\nu^\circ\|\le\tilde c\varepsilon^\beta\end{gathered}\tag{14}$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_\circ]$.

Доведення. Розв'язок задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered}\big\{x(\tau,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h,\varepsilon),\\ \varphi(\tau,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h,\varepsilon),\\ \mu^\circ+h,\nu^\circ+d\big\},\end{gathered}$$

де $y\in R^n,\psi\in R^m,h\in B_1,d\in B_2$. Для знаходження y,ψ,h,d скористаємось крайовими умовами.

З j-го рівняння, $j=\overline{1,q}$, крайової умови (3), одержимо рівність

$$P_1^j\cdot\begin{pmatrix}y\\ h\end{pmatrix}+P_2^jd_j=P^j,$$

в якій

$$\begin{aligned}P^j\equiv-\Bigg[&\int\limits_0^{\nu_j}\Big(\xi^{(j)}(\tau,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\mu,\varepsilon)-\bar\xi^{(j)}(\tau,x,x_\lambda,\mu)\Big)d\tau+\\ &+\int\limits_0^{\nu_j}\Big(\bar\xi^{(j)}(\tau,x,x_\lambda,\mu)-\bar\xi^{(j)}(\tau,\bar x,\bar x_\lambda,\mu)\Big)d\tau+\\ &+\int\limits_0^{\nu_j}X_1^{(j)}(\tau,y,h)\,d\tau+\\ &+y\int\limits_{\nu_j^\circ}^{\nu_j^\circ+d_j}\left(\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\bar x(M_\tau^\circ)}{\partial x^\circ}+ +\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ)}{\partial x^\circ}\right)d\tau+\\ &+h\int\limits_{\nu_j^\circ}^{\nu_j^\circ+d_j}\left(\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\bar x(M_\tau^\circ)}{\partial\mu^\circ}+ +\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ)}{\partial\mu^\circ}+\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial\mu^\circ}\right)d\tau+\\ &+\int\limits_{\nu_j^\circ}^{\nu_j^\circ+d_j}\bar\xi^{(j)}(K^\circ)\,d\tau-\\ &-d_j\bar\xi^{(j)}(\nu_j^\circ,\bar x(\nu_j^\circ,x^\circ,\mu^\circ),\bar x(\lambda\nu_j^\circ,x^\circ,\mu^\circ),\mu^\circ)\Bigg],\end{aligned}\tag{15}$$

$$X_1^{(j)}(\tau,y,h)\equiv$$
$$\equiv\bar\xi^{(j)}\big(\tau,\bar x(\tau,x^\circ+y,\mu^\circ+h),\bar x(\lambda\tau,x^\circ+y,\mu^\circ+h),\mu^\circ+h\big)-$$
$$-\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)-\Big(\frac{\partial\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\bar x\left(M_\tau^\circ\right)}{\partial x^\circ}+$$
$$+\frac{\partial\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial\bar x\left(M_{\lambda\tau}^\circ\right)}{\partial x^\circ}\Big)y-$$
$$-\Big(\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x}\frac{\partial\bar x(M_\tau^\circ)}{\partial\mu^\circ}+\frac{\partial\bar\xi^{(j)}(K^\circ)}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\bar x(M_{\lambda\tau}^\circ)}{\partial\mu^\circ}+$$
$$+\frac{\partial\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)}{\partial\mu^\circ}\Big)h-\frac{\partial\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)}{\partial x}X_2(\tau,y,h)-$$
$$-\frac{\partial\bar\xi^{(j)}\left(K^\circ\right)}{\partial x_\lambda}X_2(\lambda\tau,y,h),$$

$$X_2(\tau,y,h)\equiv\bar x(\tau,x^\circ+y,\mu^\circ+h)-$$
$$-\bar x\left(M_\tau^\circ\right)-\frac{\partial\bar x\left(M_\tau^\circ\right)}{\partial x^\circ}y-\frac{\partial\bar x\left(M_\tau^\circ\right)}{\partial\mu^\circ}h.$$

Позначимо

$$z\equiv\left(\begin{array}{ccc}y & h & d\end{array}\right)^T,\ P\equiv col\left(P^1,P^2,\ldots,P^q\right).$$

Тоді для знаходження z одержимо відображення

$$z=Q^{-1}P=M(z,\psi,\varepsilon). \tag{16}$$

Дослідимо відображення $M(z,\psi,\varepsilon)$ на стиск. Для цього спочатку оцінимо $\|M(z,\psi,\varepsilon)\|$. Використовуючи оцінки (10), (11) та лему 2, одержимо оцінку

$$\left\|P^j\right\|\le\sigma_6^j\varepsilon^\beta+\sigma_5^j\|z\|+\sigma_7^j\,\|z\|^2, \tag{17}$$

в якій $\sigma_5^j=L\sigma_4$, $\sigma_4=\sigma_1(3+4\sigma_3(1+2\sigma_1))$, $\sigma_6^j=2\sigma_0\sigma_1+2L\sigma_1\sigma_2+L\sigma_1+c_1$, $\sigma_7^j=4\sigma_3\sigma_1+\sigma_1$. Скористаємось означенням відображення $M(z,\psi,\varepsilon)$ (16) та оцінкою (17). Маємо

$$\|M(z,\psi,\varepsilon)\|\le\sigma_6\varepsilon^\beta+\sigma_5\|z\|+\sigma_7\,\|z\|^2, \tag{18}$$

де $\sigma_5=Lq\sigma_5$, $\sigma_6=\left\|Q^{-1}\right\|q\sigma_6^j$, $\sigma_7=\|Q^{-1}\|\,q\sigma_7^j$.

З (18) випливає, що M відображає множину

$$K_1=\left\{z|z\in R^{n+s}\times(0,L)^q,\ \|z\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta\right\}$$

в себе при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\circ]$, $\varepsilon_\circ<\varepsilon_\circ^{(1)}\le\min\left\{(4\sigma_6\sigma_5)^{-p},(\sigma_6)^{-p},\left(8\sigma_6^2\sigma_7\right)^{-2p}\right\}$.

Вивчимо далі поведінку похідної відображення $\partial M(z,\psi,\varepsilon)/\partial z$. Зобразимо її у вигляді

$$\frac{\partial M(z,\psi,\varepsilon)}{\partial z}=Q^{-1}\frac{\partial P}{\partial z}=Q^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P^1}{\partial z}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial P^q}{\partial z}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

причому $\partial P^j/\partial z$ обчислюються з рівності (15).

Для похідної $\dfrac{\partial P^j}{\partial z}$ з рівності (15) одержимо оцінку

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial P^j}{\partial z}\right\|\le\sigma_8^j\varepsilon^\beta+\sigma_9^j\cdot\|z\|+\\ +\left\|\tilde\xi^{(j)}(\tau,x|_{\tau=\nu_j^0},x_\lambda|_{\tau=\nu_j^0},\varphi,\varphi_\theta,\mu,\varepsilon)\right\|\end{gathered} \tag{20}$$

зі сталими $\sigma_8^j=4L\sigma_1\sigma_3(1+\sigma_2(1+\sigma_1))+2\sigma_0\sigma_1\sigma_3(1+\sigma_1)(4+2\lambda+L+\sigma_1+L\sigma_1)+\sigma_0\sigma_1(\sigma_1+\sigma_3)(1+\lambda)+\sigma_0\sigma_1^2\sigma_3(1+\theta)+2L\sigma_1\sigma_2+L\sigma_1+\sigma_0\sigma_1(1+\sigma_1)+\sigma_1(1+2\sigma_2)+8L\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_9^j=4\sigma_1^2+2\sigma_1+2\sigma_1\sigma_3+L\sigma_1(1+2\sigma_1)+2\sigma_1\sigma_3(1+\sigma_1)(2\sigma_3(1+\sigma_1)+1)+\sigma_4$.

Із зображення (19), використовуючи нерівність (20), маємо

$$\left\|\frac{\partial M(z,\psi,\varepsilon)}{\partial z}\right\|\le\sigma_8\varepsilon^\beta+\sigma_9\cdot\|z\|+c_0,$$

де $\sigma_8=\left\|Q^{-1}\right\|q\sigma_8^j$, $\sigma_9=\left\|Q^{-1}\right\|q\sigma_9^j$.

Оскільки $\|z\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta$, то

$$\left\|\frac{\partial M(z,\psi,\varepsilon)}{\partial z}\right\|\le\sigma_8\varepsilon^\beta+2\sigma_9\sigma_6\varepsilon^\beta+c_0\le\sigma_{10}\varepsilon^\beta+c_0<1$$

при $z\in K_1$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $\psi\in R^m$, де $\sigma_{10}=\sigma_8+2\sigma_6\sigma_9$, $\varepsilon_0=\min\left\{\varepsilon_0^{(1)};\varepsilon_0^{(2)}\right\}$, $\varepsilon_0^{(2)}<\left(\dfrac{1-c_0}{\sigma_{10}}\right)^p$.

Таким чином, існує єдиний розв‘язок $z=z(\psi,\varepsilon)\in K_1$ рівняння (16), який можна визначити як границю при $i\to\infty$ послідовних наближень

$$z_{i+1}(\psi,\varepsilon)=M(z_{i+1}(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon),\ z_0=0,\ i\ge0. \tag{21}$$

Оцінимо далі норму похідної $\left\|\frac{\partial z_{i+1}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|$ величиною

$$\left\|\frac{\partial z_{i+1}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|\le\left\|\frac{\partial M\left(z_i(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon\right)}{\partial z}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial z_i(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|+$$

$$+\|Q^{-1}\|\sum_{j=1}^{q}\left\|\int_0^{\nu_j}\left(\frac{\partial\xi^{(j)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^{(j)}}{\partial\varphi_\theta}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\psi}\right)d\tau\right\|.$$

Оскільки

$$\left\|\int_0^{\nu_j}\frac{\partial\xi^{(j)}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,d\tau\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^{\nu_j}\frac{\partial\xi^{(j)}}{\partial\varphi}\cdot\left(\frac{\partial(\varphi-\bar\varphi)}{\partial\psi}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\psi}\right)\,d\tau\right\|\le$$

$$\le L\sigma_1\sigma_2\varepsilon^\beta+2\sigma_1\sigma_0\varepsilon^\beta,$$

то з нерівності

$$\left\|\frac{\partial z_{i+1}(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|\le\left(\sigma_{10}\varepsilon^\beta+c_0\right)\left\|\frac{\partial z_i(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|+\sigma_{11}\varepsilon^\beta$$

одержуємо правильність оцінки

$$\left\|\frac{\partial z_i(\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}\right\|\le2\sigma_{11}\varepsilon^\beta,\ (\varphi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0],\,i\ge0 \tag{22}$$

зі сталою $\sigma_{11}=\left\|Q^{-1}\right\|\cdot(4\sigma_1q\sigma_0+L\sigma_1\sigma_2)$.

Нерівність (22) веде до виконання умови Ліпшиця для граничної функції $z(\psi,\varepsilon)$

$$\left\|z\left(\psi^{(1)},\varepsilon\right)-z\left(\psi^{(2)},\varepsilon\right)\right\|\le2\sigma_{11}\varepsilon^\beta\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|, \tag{23}$$

де $\psi^{(1)}\in R^m$, $\psi^{(2)}\in R^m$.

Для знаходження ψ скористаємось крайовими умовами (4), (9). Маємо

$$\psi=-\left(\int_0^L\left(A_1(\tau)+A_2(\tau)\right)\,d\tau\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^L\left(A_1(t)\Delta\varphi+A_2(t)\Delta\varphi_\theta\right)\,dt+\right.$$

$$+\int_0^L\left(\left(A_1(\tau)+A_2(\tau)\right)\int_0^\tau\left(b-\bar b\right)dt\right)d\tau+$$

$$\left.+\int_0^L\left(\eta-\bar\eta^\circ\right)\,dt\right)\equiv N\big(z(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon\big). \tag{24}$$

Тут $\Delta\varphi=\varphi(t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)-\bar\varphi(t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)$, $\Delta\varphi_\theta=\varphi(\theta t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)-\bar\varphi(\theta t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)$, $b=b(t,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\mu,\varepsilon)$, $\bar b^\circ=\bar b(t,\bar x^\circ,\bar x^\circ_\lambda,\mu^\circ)$, $\eta=\eta(t,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\mu,\nu,\varepsilon)$, $\bar\eta^\circ=\bar\eta(t,\bar x^\circ,\bar x^\circ_\lambda,\mu^\circ,\nu^\circ)$, $\varphi=\varphi(t,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h)$, $\varphi_\theta=\varphi(\theta t,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h)$, $x=x(t,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h)$, $x_\lambda=x(\lambda t,x^\circ+y,\varphi^\circ+\psi,\mu^\circ+h)$, $\mu=\mu^\circ+h$, $\nu=\nu^\circ+d$, $\bar x^\circ=\bar x(t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)$, $\bar x^\circ_\lambda=\bar x(\lambda t,x^\circ,\varphi^\circ,\mu^\circ)$.

Враховуючи, що $\|z\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta$, для $\|N\left(z(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon\right)\|$ одержимо оцінку

$$\|N(z(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon)\|\le\sigma_{12}\varepsilon^\beta \tag{25}$$

для всіх $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, де ε_0 – досить мале, $\sigma_{12}=\left\|\left(\int_0^L\left(A_1(\tau)+A_2(\tau)\right)d\tau\right)^{-1}\right\|\cdot(\sigma_1+2L\sigma_2\sigma_1+4L^2\sigma_1^2(1+2\sigma_3(1+\sigma_1))\sigma_6+\sigma_0\sigma_1(1+2\sigma_1)+\sigma_1(1+2\sigma_2+4\sigma_6))$.

Таким чином, для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ N відображає множину $K_2=\left\{\psi|\psi\in R^m,\|\psi\|\le c_9\varepsilon^\beta\right\}$ в себе.

Для встановлення стиску відображення N оцінимо різницю

$$\left\|N(z(\psi^{(1)},\varepsilon),\psi^{(1)},\varepsilon)-N(z(\psi^{(2)},\varepsilon),\psi^{(2)},\varepsilon)\right\|\le$$

$$\le\left\|\left(\int_0^L\left(A_1(\tau)+A_2(\tau)\right)\,d\tau\right)^{-1}\right\|\times$$

$$\times\left(\left\|\int_0^L\left(A_1(\tau)+A_2(\tau)\right)\int_0^\tau\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\,dt\,d\tau\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\int_0^L\left(\eta^{(1)}-\eta^{(2)}\right)\,dt\right\|\right), \tag{26}$$

де $b^{(i)}=b(t,x^{(i)},x^{(i)}_\lambda,\varphi^{(i)},\varphi^{(i)}_\theta,\mu^{(i)},\varepsilon)$, $\eta^{(i)}=\eta(t,x^{(i)},x^{(i)}_\lambda,\varphi^{(i)},\varphi^{(i)}_\theta,\mu^{(i)},\nu^{(i)},\varepsilon)$,
$x^{(i)}=x(\tau,x^\circ+y^{(i)},\varphi^\circ+\psi^{(i)},\mu^\circ+h^{(i)},\varepsilon),\varphi^{(i)}=\varphi(\tau,x^\circ+y^{(i)},\varphi^\circ+\psi^{(i)},\mu^\circ+h^{(i)},\varepsilon),y^{(i)}=y(\psi^{(i)},\varepsilon),h^{(i)}=h(\psi^{(i)},\varepsilon)$, $\mu^{(i)}=\mu^\circ+h^{(i)}$,

$\nu^{(i)}=\nu^\circ + d(\psi^{(i)},\varepsilon),\ \ i=\{1,2\}, \psi^{(1)}\in R^m, \psi^{(2)}\in R^m$.

Використовуючи нерівність (23), встановимо допоміжні оцінки

$$\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\| \le$$
$$\le\left(2\sup\left\|\frac{\partial\,(x-\bar{x})}{\partial x^0}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^0}\right\|\right)\left\|y^{(1)}-y^{(2)}\right\|+$$
$$+2\sup\left\|\frac{\partial\,(x-\bar{x})}{\partial\psi}\right\|\cdot\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|+$$
$$+\left(2\sup\left\|\frac{\partial\,(x-\bar{x})}{\partial\mu^0}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu^0}\right\|\right)\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|\le$$
$$\le\sigma_{13}^{(1)}\varepsilon^\beta\cdot\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|, \tag{27}$$
$$\left\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right\| \le$$
$$\le\left(2\sup\left\|\frac{\partial\,(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial x^0}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^0}\right\|\right)\left\|y^{(1)}-y^{(2)}\right\|+$$
$$+\left(2\sup\left\|\frac{\partial\,(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\psi}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\psi}\right\|\right)\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|+$$
$$+\left(2\sup\left\|\frac{\partial\,(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\mu^0}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu^0}\right\|\right)\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|\le$$
$$\le\sigma_{13}^{(2)}\cdot\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|, \tag{28}$$

в яких $\sigma_{13}^{(1)} = 2\sigma_6\left(4\sigma_2+(1+\sigma_1)\sigma_3\right)+2\sigma_2$, $\sigma_{13}^{(2)}=2\sigma_2+2\sigma_6(4\sigma_2+(1+\sigma_1)L\sigma_3)+1$.

Скориставшись оцінками (27), (28), (10), нерівність (26) набуде вигляду

$$\left\|N(z(\psi^{(1)},\varepsilon),\psi^{(1)},\varepsilon)-N(z(\psi^{(2)},\varepsilon),\psi^{(2)},\varepsilon)\right\|\le$$
$$\le\sigma_{14}\varepsilon^\beta\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|$$

зі сталою $\sigma_{14}=\sigma_1(1+\sigma_1)(\sigma_1\sigma_0(\sigma_{13}^{(2)}(2+5\sigma_1)+2\sigma_1\sigma_{13}^{(1)}+4\sigma_1\sigma_{11})+2L\sigma_1(\sigma_{13}^{(1)}+\sigma_{11}))$.

Остання оцінка дозволяє записати нерівність

$$\begin{gathered}\left\|N(z(\psi^{(1)},\varepsilon),\psi^{(1)},\varepsilon)-N(z(\psi^{(2)},\varepsilon),\psi^{(2)},\varepsilon)\right\|\le\\ \le\frac{1}{2}\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|\end{gathered} \tag{29}$$

при $\varepsilon_0\le(2\sigma_{14})^{-p}$.

Із нерівностей (25), (29) згідно принципу стислих відображень випливає існування єдиного розв'язку $\psi=\psi^\circ(\varepsilon)\in K_2$ рівняння (24), тобто існування єдиного розв'язку $\big\{x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\nu(\varepsilon)\big\} = \big\{x\big(\tau,x^\circ+y(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^\circ+\psi^\circ(\varepsilon),\mu^\circ+h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\big), \varphi\big(\tau,x^\circ+y(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^\circ+\psi^\circ(\varepsilon),\mu^\circ+h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\big), \mu^\circ+h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \nu^\circ+d(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon)\big\}$ крайової задачі (1) – (4), для якого

$$\|z\left(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon\right)\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta,\ \|\psi^\circ(\varepsilon)\|\le\sigma_{12}\varepsilon^\beta \tag{30}$$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Покажемо, що виконується нерівність (14). Скористаємось інтегральними зображеннями розв'язків відповідних задач та одержаними нерівностями (30). Будемо мати

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,x^\circ,\mu^\circ)\|\le$$
$$\le\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,x^\circ+y,\mu^\circ+h)\|+$$
$$+\|\bar{x}(\tau,x^\circ+y,\mu^\circ+h)-\bar{x}(\tau,x^\circ,\mu^\circ)\|\le$$
$$\le(\sigma_2+2\sigma_6(1+L\sigma_1(1+2c_6(1+\sigma_1))))\,\varepsilon^\beta,$$
$$\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,x^\circ,\varepsilon^\circ,\mu^\circ,\varepsilon)\|\le$$
$$\le(\sigma_2+\sigma_3+2L\sigma_1\sigma_6(1+2\sigma_3(1+\sigma_1)))\,\varepsilon^\beta,$$
$$\|\mu(\varepsilon)-\mu^\circ\|=\|h\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta,$$
$$\|\nu(\varepsilon)-\nu^\circ\|=\|d\|\le2\sigma_6\varepsilon^\beta.$$

Очевидно, що із наведених вище оцінок випливає справедливість (14) зі сталою $\tilde{c}=2\sigma_2+6\sigma_6+\sigma_3+4L\sigma_1\sigma_6(1+2\sigma_3(1+\sigma_1))$.

Нарешті, обмеження $2\tilde{c}\le\min\{\rho_1,\rho_2,L\}$ забезпечує належність кривої $x=x(\tau,\varepsilon)$ і точок $\mu(\varepsilon)$ та $\nu(\varepsilon)$ відповідно множинам D,B_1,B_2 для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорему доведено.

Зауваження. Умова **2)** накладає занадто жорсткі вимоги на функції $a(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)$, $b(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)$, $\xi^{(1)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)$, $\ldots$, $\xi^{(q)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)$. Для виконання *теореми 1* досить вимагати існування та неперервності лише перших похідних від цих функцій, тобто виконання умови **4)**:

4) Виконується умова **2)**, крім припущення $F\in C^2_{\tau,x,z,\mu,\varepsilon}(G_1,\sigma_1)$. Функція $F\in C^1_{\tau,x,z,\mu,\varepsilon}(G_1,\sigma_1)$, а $\dfrac{\partial\xi^{(j)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\xi^{(j)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\xi^{(j)}(\tau,x,z,u,v,\mu,\varepsilon)}{\partial\mu}$, $j=$

$\overline{1,q}$, одностайно по ε рівномірно неперервні по τ, x, z, u, v, μ на множині G_1 і задовольняють умову Ліпшиця по ε зі сталою B.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі умови теореми 1, крім припущення* **2)**, *і припущення* **4)**.

Тоді можна вибрати такі сталі $\tilde{\varepsilon}^* > 0$, $\tilde{c}^* > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\circ]$, $\varepsilon_\circ < \tilde{\varepsilon}^*$ *задача* (1) – (4) *має єдиний розв'язок* $\{x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon), \mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)\}$, *який задовольняє нерівність*

$$\begin{gathered} \|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^\circ, \mu^\circ)\| + \\ + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, x^\circ, \varepsilon^\circ, \mu^\circ, \varepsilon)\| + \\ + \|\mu(\varepsilon) - \mu^\circ\| + \|\nu(\varepsilon) - \nu^\circ\| \le \tilde{c}^* \varepsilon^\beta \end{gathered} \tag{31}$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_\circ]$.

Доведення. Для доведення теореми скористаємось методикою, яка була використана в *теоремі 1.*

Розв'язок задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered} \{x(\tau, x^\circ + y, \varphi^\circ + \psi, \mu^\circ + h, \varepsilon), \\ \varphi(\tau, x^\circ + y, \varphi^\circ + \psi, \mu^\circ + h, \varepsilon), \mu^\circ + h, \nu^\circ + d\}, \end{gathered}$$

де $y \in R^n, \psi \in R^m, h \in B_1, d \in B_2$.

Оскільки функції $\dfrac{\partial \xi^{(j)}(\tau, x, z, u, v, \mu, \varepsilon)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \xi^{(j)}(\tau, x, z, u, v, \mu, \varepsilon)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial \xi^{(j)}(\tau, x, z, u, v, \mu, \varepsilon)}{\partial \mu}$, $j = \overline{1,q}$, одностайно по ε рівномірно неперервні по τ, x, z, u, v, μ на множині G_1, то із означення функції $\bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)$ випливає, що і функції $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial \mu}$, $j = \overline{1,q}$, також одностайно по ε рівномірно неперервні по τ, x, z, μ на множині G_1, тобто для довільного числа $\delta_1 > 0$ існує таке число $\delta_2^*(\delta_1)$, що для всіх $(\tau_1, x_1, z_1, \mu_1), (\tau_2, x_2, z_2, \mu_2) \in [0, L] \times D \times D \times B_1$ із того, що $\|(\tau_1, x_1, z_1, \mu_1) - (\tau_2, x_2, z_2, \mu_2)\| < \delta_2^*$, одержуємо нерівності

$$\left\| \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_1, x_1, z_1, \mu_1)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_2, x_2, z_2, \mu_2)}{\partial x} \right\| < \delta_1,$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_1, x_1, z_1, \mu_1)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_2, x_2, z_2, \mu_2)}{\partial z} \right\| < \delta_1,$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_1, x_1, z_1, \mu_1)}{\partial \mu} - \frac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau_2, x_2, z_2, \mu_2)}{\partial \mu} \right\| < \delta_1,$$

причому $\delta_2^*(\delta_1)$ вибране найменшим серед таких чисел для функцій $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial \bar{\xi}^{(j)}(\tau, x, z, \mu)}{\partial \mu}$, $j = \overline{1,q}$.

Для знаходження y, h, d в *теоремі 1* було одержано відображення (16) $M(z, \psi, \varepsilon)$ множини K_1 в себе при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^{(1)}$. Покажемо, що відображення $M(z, \psi, \varepsilon)$ є стискаючим.

Аналогічно як і в попередній теоремі одержимо нерівність

$$\begin{gathered} \left\| \frac{\partial P^j}{\partial z} \right\| \le \tilde{\sigma}_8^j \varepsilon^\beta + \tilde{\sigma}_9^j \cdot \|z\| + \tilde{\sigma}_{10}^j \delta_1 + \\ + \left\| \tilde{\xi}^{(j)}(\tau, x|_{\tau=\nu_j^0}, x_\lambda|_{\tau=\nu_j^0}, \varphi, \varphi_\theta, \mu) \right\|, \end{gathered} \tag{32}$$

де $\tilde{\sigma}_8^j = 2L\delta_1\sigma_2(1 + 2\sigma_3(1+\sigma_1)) + \sigma_0\sigma_1\sigma_3(7 + 3\lambda + 4L + 2\sigma_1 + 2L\sigma_1) + \sigma_0\sigma_1^2\sigma_3(1+\theta) + 2L\sigma_1\sigma_2 + L\sigma_1 + \sigma_0\sigma_1(1+\sigma_1) + \sigma_1(1+2\sigma_2) + 8L\sigma_2\sigma_1$, $\tilde{\sigma}_9^j = 4\sigma_1^2 + 2\sigma_1 + 2\sigma_1\sigma_3 + L\sigma_1(1+2\sigma_1) + \sigma_4$, $\tilde{\sigma}_{10}^j = 2L\sigma_3 + L + 2L\sigma_1\sigma_3$.

Із рівності (19), використовуючи оцінку (32), маємо

$$\left\| \frac{\partial M(z, \psi, \varepsilon)}{\partial z} \right\| \le \tilde{\sigma}_8 \varepsilon^\beta + \tilde{\sigma}_9 \cdot \|z\| + \tilde{\sigma}_{10}\delta_1 + c_0,$$

в якій $\tilde{\sigma}_8 = \left\|Q^{-1}\right\| q \tilde{\sigma}_8^j$, $\tilde{\sigma}_9 = \left\|Q^{-1}\right\| q \tilde{\sigma}_9^j$, $\tilde{\sigma}_{10} = (2Lc_6 + L + 2L\sigma_1 c_6)q$.

Оскільки $\|z\| \le 2\sigma_6\varepsilon^\beta$, то

$$\left\| \frac{\partial M(z, \psi, \varepsilon)}{\partial z} \right\| \le \tilde{\sigma}_8 \varepsilon^\beta + 2\tilde{\sigma}_9\sigma_6\varepsilon^\beta + \tilde{\sigma}_{10}\delta_1 + c_0 < 1$$

при $z \in K_1$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\psi \in R^m$, де $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_0^{(1)}; \varepsilon_0^{(2)}; \varepsilon_0^{(3)}\right\}$, $\varepsilon_0^{(2)} < \left(\dfrac{1 - c_0}{2(\tilde{\sigma}_8 + 2\tilde{\sigma}_9\sigma_6)}\right)^p$, із сталою $\varepsilon_0^{(3)} \le \min\left\{\left(\frac{\delta_2^*}{6\sigma_6 c_6(1+\sigma_1)}\right)^p; \left(\frac{\delta_2^*}{2\sigma_6}\right)^p\right\}$, що забезпечує належність розв'язку $\bar{x}(\tau, x^\circ + y, \mu^\circ + h)$

допустимій множині, а також точки z множині K_1. Також виберемо $\delta_1 = \dfrac{1-c_0}{2\tilde{\sigma}_{10}}$.

Таким чином, існує єдиний розв‘язок $z = z(\psi, \varepsilon) \in K_1$ рівняння (16), який можна визначити як границю при $i \to \infty$ послідовних наближень (21).

Далі аналогічно як і в *теоремі 1* із використанням крайових умов (4), (9) знаходимо єдиний розв'язок $\{x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon), \mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)\} = \{x\big(\tau, x^\circ + y(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^\circ + \psi^\circ(\varepsilon), \mu^\circ + h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \varepsilon\big), \varphi\big(\tau, x^\circ + y(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \varphi^\circ + \psi^\circ(\varepsilon), \mu^\circ + h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \varepsilon\big), \mu^\circ + h(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon), \nu^\circ + d(\psi^\circ(\varepsilon),\varepsilon)\}$ крайової задачі, для якого виконується умова (31). Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.

2. *Бигун Я.Й., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 1999. **35**, N 1. – С.8–14.

3. *Петришин Р.І., Данилюк І.М.* Усереднення крайової задачі для багаточастотної системи з відхиленим аргументом // Нелінійні коливання.–2007.– **10**, N 4.– С.519–527.

4. *Бігун Я.Й.* Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, N 3. – С.291–299.

5. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2005. – **269**. – С.5–10.

6. Петришин Р.І., Сопронюк Т.М. Усереднення крайової задачі з інтегральними крайовими умовами і параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2004. – **228**. – С.96–107.