УДК 817.954

©2008 р. О.Н. Вітюк, А.В. Михайленко

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Знайдено умови існування та єдиності роз'вязку крайової задачі для діфференціального рівняння порядку $1+\alpha,\ 0<\alpha<1$.

Conditions for the existence and uniqueness of a solution of boundary value problem for a differential equation of order $1+\alpha,\ 0<\alpha<1$ are obtained.

Задача Штурма - Ліувілля для диференціонального рівняння, яке містить дробову похідну Рімана - Ліувілля порядку $\alpha\in(0;1)$, розглянуто в [1], а різницевий метод її розв'язання в [2, 3].

В даній роботі отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння порядку $1+\alpha,\ 0<\alpha<1$.

Нехай $J=[0;a]$. $C(J),\ (AC(J))$ - простір неперервних (абсолютно неперервних) функцій $f:J\to R$. $I_0^\beta f(x),\ D_0^\beta f(x),\beta>0$ - відповідно, інтеграл та похідна Рімана - Ліувілля порядку β, а саме [4]

$$I_0^\beta f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}f(t)dt,$$

$$D_0^\beta f(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_0^x (x-t)^{n-\beta-1}f(t)dt,$$

де $\Gamma(\cdot)$ - гама - функція Ейлера, $n=[\beta]+1$.

Зокрема для $0<\alpha<1$ і $\beta=1+\alpha$, якщо $f_{1-\alpha}(x)=I_0^{1-\alpha}f(x)$, то $D_0^\alpha f(x)=f'_{1-\alpha}(x)$,

$$D_0^{1+\alpha}f(x)=$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\int_0^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt=f''_{1-\alpha}(x).$$

Крім того,

$$I_0^1 f(x)=\int_0^x f(t)dt,\ I_0^0 f(x)=f(x).$$

Розглянемо крайову задачу

$$D_0^{1+\alpha}\ y(x)=f\left(x,y(x),D_0^\alpha\ y(x)\right), \tag{1}$$

$$y_{1-\alpha}(0)=y_{1-\alpha}(a)=0,$$

де

$$y_{1-\alpha}(0)=\lim_{x\to 0+0}y_{1-\alpha}(x). \tag{2}$$

Означення 1. *Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо таку функцію $y(x)\in C(J)$, для якої $D_0^\alpha y(x)\in AC(J)$ і яка задовольняє умовам (2), а також диференціальному рівнянню (1) майже скрізь (м.с,) на J.*

Нехай функція $f(x,y,z):J\times R\times R\to R$
(а) вимірна по x для любих фіксованих (y,z) і неперервна по (y,z) для кожного $x\in J$;
(б) $|f(x,y,z)|\le M$.

Нехай $\varphi(x)\in L(0;a)$. Розглянемо крайову задачу

$$u''(x)=\varphi(x),\ u(0)=u(a)=0. \tag{3}$$

Єдиним розв'язком задачі (3) є

$$u(x)=\int_0^x\left(\int_0^t s\varphi(s)ds\right)dt-$$

$$-\frac{x}{a}\int_0^a\left(\int_0^t\varphi(s)ds\right)dt. \tag{4}$$

Вираз (4), використовуючи інтегрування по частинам, подамо у вигляді

$$u(x)=$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^x \left(\int_0^t s\varphi(s)ds - \int_t^a (a-s)\varphi(s)ds\right) dt. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай $f : J \times R \times R \to R$ задовольняє умовам (а), (б). Для того, щоб функція $y(x)$ була розв'язком крайової задачі (1), (2) в сенсі означення 1 необхідно і достатньо, щоб ця функція була розв'язком інтегрального рівняння*

$$y(x) = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_0^t sf\left(s, y(s), D_0^\alpha y(s)\right) ds - \right.$$
$$\left. - \int_t^a (a-s) f\left(s, y(s), D_0^\alpha y(s)\right) ds\right) dt. \tag{6}$$

Доведення. Умовимось в таких позначеннях:

$$F\left(y(x)\right) = f\left(x, y(x), D_0^\alpha y(x)\right),$$
$$\gamma\left(y(x)\right) =$$
$$= \int_0^x sF\left(y(s)\right) ds - \int_x^a (a-s)F\left(y(s)\right) ds.$$

Нехай $y(x)$ - розв'язок задачі (1), (2). Приймаючи до уваги те, що $D_0^{1+\alpha}y(x) = y''_{1-\alpha}(x)$, отримаємо у відповідності з (5), що $y_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{a}I_0^1\gamma\left(y(x)\right)$. Тоді

$$I_0^{1-\alpha}y(x) = I_0^{1-\alpha}\left(\frac{1}{a}I_0^\alpha\gamma\left(y(x)\right)\right),$$
$$I_0^{1-\alpha}\left(y(x) - \frac{1}{a}I_0^\alpha\gamma\left(y(x)\right)\right) = 0. \tag{7}$$

Рівняння (7) є інтегральне рівняння Абеля, яке має єдиний розв'язок

$$y(x) - \frac{1}{a}I_0^\alpha\gamma\left(y(x)\right) = 0.$$

Отже $y(x)$ являється розв'язком інтегрального рівняння (6). Нехай тепер неперервна функція $y(x) : J \to R$ така, що $D_0^\alpha y(x) \in AC(J)$, являється розв'язком інтегрального рівняння (6). Тоді

$$y_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha}\left(\frac{1}{a}I_0^\alpha\gamma\left(y(x)\right)\right) = \frac{1}{a}I_0^1\gamma\left(y(x)\right),$$

$$y'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{a}\gamma\left(y(x)\right),$$
$$D_0^{1+\alpha}\, y(x) =$$
$$= \frac{1}{a}\left(xF\left(y(x)\right) + (a-x)F\left(y(x)\right)\right) =$$
$$= F\left(y(x)\right),$$

для м.в. $x \in J$. Умова $y_{1-\alpha}(0) = 0$ очевидно виконується. Якщо ж $y_{1-\alpha}(x)$ подати у вигляді (4), то легко переконатися, що $y_{1-\alpha}(a) = 0$. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай функція $f : J \times R \times R \to R$ задовольняє умовам (а), (б) та умові Ліпшиця*

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \le$$
$$\le L_1|y_1 - y_2| + L_2|z_1 - z_2|, \tag{8}$$

причому

$$q = \frac{L_1 a^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{L_2 a}{2} < 1.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2).

Доведення. Через $C_\alpha(J)$ позначимо множину функцій $u(x)$ таку, що $u(x) \in C(J)$, $D_0^\alpha u(x) \in C(J)$ з нормою

$$\|u(x)\| = \max\left[\max_J |u(x)|,\right.$$
$$\left.\frac{a^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_J |D_0^\alpha u(x)|\right].$$

Доведемо, що простір $C_\alpha(J)$ повний. Нехай $\{u_n(x)\} \subset C_\alpha(J)$ - фундаментальна послідовність. Тоді рівномірно на J $u_n(x) \to u(x) \in C(J)$, $D_0^\alpha u_n(x) \to v(x) \in C(J)$.

Доведемо, що $v(x) = D_0^\alpha u(x)$. Легко перевірити, що $u_{n,1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha}u_n(x) \in C\left((0;a]\right)$ і

$$\lim_{x\to 0+0} u_{n,1-\alpha}(x) = 0.$$

Якщо покласти $u_{n,1-\alpha}(0) = 0$, то отримаємо, що $u_{n,1-\alpha}(x) \in C(J)$. Згідно з теоремою Лебега про мажоранту збіжність $\lim_{n\to\infty} u_{n,1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha}u(x) = u_{1-\alpha}(x)$, причому $u_{1-\alpha}(0) = 0$.

З другої сторони
$$u_{n,1-\alpha}(x)=\int_0^x D_0^\alpha u_n(t)dt.$$
Звідки при $n\to\infty$ одержимо, що
$$u_{1-\alpha}(x)=\int_0^x v(t)dt,$$
а значит $D_0^\alpha u(x)=v(x)$, $x\in J$. Нехай для $u(x)\in C_\alpha(J)$
$$w(x)=T(u)=\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\left(\int_0^t sF((u(s))\,ds-\right.$$
$$\left.-\int_t^a(a-s)F((u(s))\,ds\right)dt. \tag{9}$$
Доведемо, що $w(x)\in C(J)$. Для
$$x_1,x_2\in(0;a],\ x_1<x_2$$
$$|w(x_1)-w(x_2)|=\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\left|\int_0^{x_2}(x_2-t)^{\alpha-1}\gamma(u(t))\,dt-\right.$$
$$\left.-\int_0^{x_1}(x_1-t)^{\alpha-1}\gamma(u(t))\,dt\right|=$$
$$=\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{x_1}\left[(x_2-t)^{\alpha-1}-\right.\right.$$
$$\left.-(x_1-t)^{\alpha-1}\right]\gamma(u(t))\,dt+$$
$$\left.+\int_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{\alpha-1}\gamma(u(t))\,dt\right|.$$
Оскільки для $t\in J$
$$|\gamma(u(t))|\le M\left(\frac{t^2}{2}+\frac{(a-t)^2}{2}\right)\le M\ \frac{a^2}{2},$$
то
$$|w(x_1)-w(x_2)|\le\frac{Ma}{2\Gamma(1+\alpha)}\times$$
$$\times\left[2(x_2-x_1)^{\alpha-1}-(x_2^\alpha-x_1^\alpha)\right]\le$$
$$\le\frac{Ma(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$
(враховано, що $x_2^\alpha-x_1^\alpha\le(x_2-x_1)^\alpha$).

Крім того, для $x\in(0;a]$
$$|w(x)|\le\frac{Max^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$
Отже
$$\lim_{x\to0+0}w(x)=0.$$
Якщо $w(0)=0$, то $w(x)\in C(J)$. Доведемо, що $D_0^\alpha w(x)\in C(J)$. Маємо
$$w_{1-\alpha}(x)=I_0^{1-\alpha}w(x)=$$
$$=I_0^{1-\alpha}\left(\frac{1}{a}I_0^\alpha\gamma(u(x))\right)=$$
$$=\frac{1}{a}I_0^1\gamma(u(x)),$$
$$D_0^\alpha w(x)=w'_{1-\alpha}(x)=$$
$$=\frac{1}{a}\gamma(u(x))\in C(J).$$
Отже доведено, що
$$T:C_\alpha(J)\to C_\alpha(J).$$

Доведемо, що T являється оператором стиску. Нехай $u_1,u_2\in C_\alpha(J)$ і
$$w_1(x)=T(u_1),\ w_2(x)=T(u_2).$$
Враховуючи умову (8), отримаємо
$$|w_1(x)-w_2(x)|=\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\left|\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\left(\int_0^t s\times\right.\right.$$
$$\times(F(u_1(s))-F(u_2(s)))\,ds-$$
$$-\int_t^a(a-s)\times$$
$$\times(F(u_1(s))-F(u_2(s)))\,ds)\,dt|\le$$
$$\le\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left[\int_0^t s\left(L_1|u_1(s)-u_2(s)|\right.\right.+$$
$$+L_2\left|D_0^\alpha u_1(s)-D_0^\alpha u_2(s)\right|)\,ds+$$

$$+\int_t^a (a-s)\times \tag{10}$$

$$\times \left(L_1 \left|u_1(s)-u_2(s)\right| +\right.$$

$$\left.+L_2 \left|D_0^\alpha u_1(s)-D_0^\alpha u_2(s)\right|\right) ds]\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \times \left(L_1 \max_J \left|u_1(s)-u_2(s)\right| +\right.$$

$$\left.+L_2 \max_J \left|D_0^\alpha u_1(s)-D_0^\alpha u_2(s)\right|\right) \times$$

$$\times \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{(a-t)^2}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{a^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} \left(L_1 \max_J \left|u_1(s)-u_2(s)\right| +\right.$$

$$\left.+L_2 \max_J \left|D_0^\alpha u_1(s)-D_0^\alpha u_2(s)\right|\right).$$

а також

$$\left|D_0^\alpha w\left(x_1\right)-D_0^\alpha w\left(x_2\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{a}\left|\gamma\left(u_1(x)\right)-\gamma\left(u_2(x)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{a}{2}\left(L_1 \max_J \left|u_1(x)-u_2(x)\right| +\right.$$

$$\left.+L_2 \max_J \left|D_0^\alpha u_1(x)-D_0^\alpha u_2(x)\right|\right),$$

$$\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left|D_0^\alpha w\left(x_1\right)-D_0^\alpha w\left(x_2\right)\right| \le$$

$$\le \left(\frac{a^{\alpha+1}L_1}{2\Gamma(\alpha+1)}+\frac{L_2 a}{2}\right)\times \tag{11}$$

$$\times \max\left(\max_J \left|u_1(x)-u_2(x)\right|,\right.$$

$$\left.\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\max_J \left|D_0^\alpha u_1(x)-D_0^\alpha u_2(x)\right|\right).$$

Із оцінок (10), (11) витікає, що

$$\left\|T(u_1)-T(u_2)\right\| \le q\left\|u_1(x)-u_2(x)\right\|.$$

Згідно принципу стислих відображень [5, с. 9] оператор

$$T: C_\alpha(J)\to C_\alpha(J)$$

має в $C_\alpha(J)$ єдину нерухому точку $y(x)=T(y)$, яка за теоремою 1 являється розв'язком задачі (1), (2). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай в області*

$$P=\{(x,y,z): 0\le x\le a,\ |y|\le r,\ |z|\le r\}$$

функція $f(x,y,z)$ задовольняє умовам теореми 2 і

$$\frac{Ma^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} \le r. \tag{12}$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2).

Доведення. В просторі $C_\alpha(J)$ розглянемо кулю

$$S=\left\{u\in C_\alpha(J):\ ||u||\le r\right\}.$$

Переконаємося, що $T: S\to S$. Нехай $u(x)\in S$, а $w(x)=T(u)$ і доведемо, що $w(x)\in S$. При доведені теореми 2 показано, що $w(x)\in C_\alpha(J)$. Перевіримо, що $w(x)\in S$. З урахуванням доведеного в теоремі 2 маємо оцінки для $x\in J$

$$|w(x)| \le \frac{Ma^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)},$$

$$\left|D_0^\alpha w(x)\right| \le \frac{Ma}{2},$$

$$\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left|D_0^\alpha w(x)\right| \le \frac{Ma^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$

Враховуючи співвідношення (12), отримаємо, що $||w(x)|| \le r$. Отже оператор $T: S\to S$ має єдину нерухому точку $y(x)\in S$, яка і буде розв'язком задачі (1), (2). Теорему 3 доведено.

Зауваження. Якщо умови (2) мають вигляд

$$y_{1-\alpha}(0)=0,\ y_{1-\alpha}(a)=B,$$

то, зробивши заміну $y(x)=u(x)+z(x)$, де

$$z(x)=\frac{Bx^\alpha}{a\Gamma(1+\alpha)},\ z_{1-\alpha}(x)=\frac{Bx}{a},$$

прийдемо до задачі

$$D_0^{1+\alpha}u(x)=g\left(x,u(x),D_0^\alpha u(x)\right),$$

$$u_{1-\alpha}(0)=0,\ u_{1-\alpha}(a)=0,$$

а

$$g\left(x,u(x),D_0^\alpha u(x)\right)=$$

$$=f\left(x,u(x)+z(x),D_0^\alpha u(x)+\frac{B}{a}\right).$$

Зауважимо, що при $\alpha = 1$ задача (1), (2) є добре вивчена задача

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(0) = y(a) = 0.$$

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\left(\alpha = \frac{1}{2},\ 1 - \alpha = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{4}\right)$$

$$D_0^{\frac{3}{2}} y(x) = \sqrt{x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) y(x) - x D_0^{\frac{1}{2}} y(x) + \\ + \frac{7x^3}{30} + x, \quad (13)$$

$$y_{\frac{1}{2}}(0) = y_{\frac{1}{2}}(a) = 0. \quad (14)$$

Права частина рівняння (13) визначена в області

$$P = \left\{(x, y, z):\ 0 \le x \le \frac{1}{4},\ |y| \le \frac{1}{48},\ |z| \le \frac{1}{48}\right\},$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right),\ L_2 = \frac{1}{4},\ q = \frac{1}{16},$$

$$M = \frac{27}{100},\ \frac{Ma^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} < \frac{1}{48}.$$

Розвязком задачі (13), (14) є

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{4x^2}{15} - \frac{1}{96}\right),$$

причому

$$y_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{96},\ D_0^{\frac{1}{2}} y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{96}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нахушев А.М.* / Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАНСССР. - 1977. - **Т.** 234, № 2.–С. 308-311.

2. *Шхануков М. Х* О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // ДАН. - 1996. – **Т.** 348 , № 6.—- С. 746 - 748.

3. *Ö zt ü rk I., Shkhanekov M.N.* Difference method for the differentional equation with fractional derivative // Indian J. pure appl. math. - 1999. - V. 30, № 5. - P. 517 - 523.

4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Техника, 1987. - 668 с.

5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.,* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. - 455 с.