©2009 р. Береза В.Ю., Лукашів Т.О.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СТОХАСТИЧНІ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПУАССОНОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ І ЙМОВІРНОСНІ ІНТЕГРАЛЬНІ КОНТРАКТОРИ

Вивчено клас стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, розв'язки яких не мають розривів другого роду, за допомогою ймовірнісних обмежених інтегральних контракторів.

The class of stochastic functional-differential equations which have solutions without points of discontinuity of the second type is studied with the help of probabilistic bounded integral contractors.

1. Постановка задачі. Нехай випадкові процеси $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\}$, $t \in [-\tau, T]\}$, $\tau > 0$, зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, n-вимірний вінерів процес $\{W(t), t \in [0,T]\}$ і центрована пуассонова міра $\tilde{\nu}(ds, su) \equiv \nu(ds, du) - \mathbb{E}\{\tilde{\nu}(ds, du)\}$ з $\mathbb{E}\{\nu(ds, du)\} = \Pi(du)ds$ задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ [7-9]. При $t \in [-\tau, T]$ справджуються рівності

$$x(t) = \varphi(t), \quad \text{якщо} \quad t \in [-\tau, 0] \quad \text{і}$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t a(s, x_s)ds + \int\limits_0^t b(s, x_s)dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_U c(s, x_s, u)\tilde{\nu}(ds, du), \qquad (1)$$

якщо $t \in [0, T]$.

Тут $a : [0,T] \times \mathbb{D}_n([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}^n$; $b : [0,T] \times \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $c : [0,T] \times \mathbb{D}_n \times U \to \mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{D}_n)$ – матриця над простором $\mathbb{D}_n$ розмірності $n \times n$; a, b, c – вимірні функціонали за сукупністю змінних; $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}, \theta \in [-\tau, 0]$; $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}_n([-\tau, 0])$ – простір неперервних справа функцій на відрізку $[-\tau, 0]$, що мають лівосторонні границі [1], [6].

Тоді $\{x(t), t \geq 0\}$ назвемо сильним розв'язком СДФР

$$dx(t) = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw(t) +$$

$$+ \int\limits_U c(t, x_t, u)\tilde{\nu}(ds, du) \qquad (2)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \qquad (3)$$

У просторі $\mathbb{D}_n$ для $\varphi \in \mathbb{D}_n$ визначимо норму

$$\|\varphi(\theta)\| \equiv \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|. \qquad (4)$$

Зауважимо, що у рівномірній нормі (4) простір Скорохода $\mathbb{D}_n$ неповний. Тому всі результати одержано у розширеному просторі Скорохода, який надалі позначатимемо символом $\overline{\mathbb{D}}_n \equiv \overline{\mathbb{D}}_n\,([-\tau, 0]])$ [6].

У роботі [3] доведено теорему існування і єдиності для детермінованого диференціального рівняння, а в [5] узагальнені результати на випадок стохастичних диференціальних рівнянь.

У даній роботі доведено теореми існування і єдиності для більш широкого класу рівнянь, а саме стохастичних диференціально-функціональних рівнянь.

Нехай $G_i(t, x_t) : [-\tau, T] \times \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $G_3(t, x_t, u) : [0, T] \times \mathbb{D}_n \times U \to \mathbb{R}^n$ є обмеженими неперервними функціоналами. Для $x, y \in \mathbb{D}_n$ введемо випадковий процес [5]

$$z(t) \equiv y(t) + \int\limits_0^t G_1(s, x_s)y(s)ds +$$

$$+\int_0^t G_2(s,x_s)y(s)dw(s)+ \tag{5}$$

$$+\iint_{0U}^{t} G_3(s,x_s,u)y(s)\tilde{\nu}(ds,du).$$

Припустимо, що існує додатна стала K, така, що для всіх $t\in[0,T]$ виконуються нерівності

$$|a(t,x_t-z_t)-a(t,x_t)-G_1(t,x_t)y|\le K\|y\|, \tag{6}$$

$$|b(t,x_t-z_t)-b(t,x_t)-G_2(t,x_t)y|\le K\|y\|, \tag{7}$$

$$\int_U |c(t,x_t-z_t,u)-c(t,x_t,u)-$$

$$-G_3(t,x_t,u)y|\Pi(du)\le K\|y\|, \tag{8}$$

майже скрізь відносно норми (4).

Означення 1. Якщо умови (6), (7), (8) виконуються, то говорять, що коефіцієнти рівняння (2) мають обмежені інтегральні контрактори [2], [3].

Означення 2. Будемо говорити, що обмежений випадковий контрактор є правильним, якщо рівняння (5) має розв'язок в $\mathbb{D}_n$ для довільних $x(t)$ і $z(t)$ з $\mathbb{D}_n$ [4].

Означення 3. Говорять, що функціонал $h:[0,T]\times\mathbb{D}_n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ є стохастично замкнений, якщо для довільних $x^{(n)}$, x з $\mathbb{D}_n([0,T]\times\Omega)$ та $y^{(n)}$, y з $\mathbb{D}_n$ таких, що $x^{(n)}\to x$, $y^{(n)}\to y$ при $n\to\infty$ випливає, що $h(t,x_t^{(n)}(\theta),y^{(n)}(\theta))\to z$ в $\mathbb{D}_n([0,T]\times\Omega)$, де $z(t)\equiv h(t,x_t,y)$ для всіх $t\in[0,T]$ майже скрізь.

Зауваження 1. Якщо функціонали a, b, c є ліпшицевими за другим аргументом, то вони є стохастично замкненими і мають правильний обмежений випадковий інтегральний контрактор з $G_i=0$, $i=1,2,3$ [5].

2. Про існування розв'язків системи СДФР з пуассоновими збуреннями

Теорема 1. Нехай коефіцієнти в (2) є стохастично замкненими, мають обмежений випадковий інтегральний контрактор і для довільного $\varphi\in\mathbb{D}_n([-h,0])$ існують інтеграли $\int_0^T|a(t,\varphi)|^2dt<+\infty$; $\int_0^T|b(t,\varphi)|^2dt<\infty$; $\int_0^t\int_U|c(t,\varphi,u)|^2\Pi(du)dt<\infty$. Тоді існує розв'язок $x(t)\in\mathbb{D}_n([-\tau,T])$ задачі Коші (2), (5), (3).

Доведення. Доведення базується на наступній ітераційній процедурі. Для $n\ge 0$

$$x^{(n+1)}(t)=x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)-$$

$$-\int_0^t G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^t G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)dw(s)-$$

$$-\int_0^t\int_U G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(du,ds); \tag{9}$$

або

$$x^{(n+1)}(t)=x^{(n)}(t)-z^{(n)}(t),\quad 0\le t\le T. \tag{9'}$$

$$x_0(t)=\varphi(0),\quad t\ge 0,$$

$$x_n(t)=\varphi(t),\quad -\tau\le t\le 0,$$

$$y^{(n)}(t)=x^{(n)}(t)-x(0)-\int_0^t a(s,x_s^{(n)}(\theta))ds- \tag{10}$$

$$-\int_0^t b(s,x_s^{(n)}(\theta))dw(s)-\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds),$$

$$0\le t\le T,\quad y_n(t)=0,\quad -\tau\le t\le 0.$$

Підставляючи (9) в (10) для $(n+1)$-го наближення, знаходимо:

$$y^{(n+1)}(t)=x^{(n+1)}(t)-x(0)-\int_0^t a(s,x_s^{(n+1)}(\theta))ds-$$

$$-\int_0^t b(s,x_s^{(n+1)}(\theta))dw(s)-\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n+1)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=$$

$$x^{(n+1)}(t)-x(0)-\int_0^t a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))ds-$$

$$-\int_0^t b(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})dw(s)-$$

$$-\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=x^{(n)}(t)-$$

$$x^{(n)}(t)+x(0)+\int_0^t a(s,x_s^{(n)}(\theta))ds+$$

$$+\int_0^t b(s,x_s^{(n)}(\theta))ds+\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)-$$

$$-\int_0^t G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^t G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)dw(s)-$$

$$-\iint_{0U}^{t} G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(du,ds)-x(0)-$$

$$-\int_0^t a(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})ds-\int_0^t b(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})dw(s)-$$

$$-\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=$$

$$=\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_a^{(n)}(\theta))]ds+\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-$$

$$-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)+\iint_{0U}^{t}[c(s,x_s^{(n)},u)-$$

$$-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-$$

$$-z_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(ds,du). \qquad (11)$$

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського і основними властивостями стохастичних інтегралів [1], [9] для $t\in[0,T]$:

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^t 1\cdot g(s)ds\right|^2\right\}\le T\cdot\int_0^t \mathbb{E}\{|g(s)|^2\}ds;$$

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^t g(s,w)dw(s)\right|^2\right\}=\int_0^t \mathbb{E}\{|g(s,w)|^2\}ds;$$

$$\mathbb{E}\left\{\left|\iint_{0U}^{t} f(s,u,w)\tilde{\nu}(ds,du)\right|^2\right\}=$$

$$=\iint_{0U}^{t}\mathbb{E}\{|f(s,u,w)|^2\}\Pi(du,dt);$$

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^s g(s)dw(s)\right|^2\right\}\le 4\int_0^T \mathbb{E}\{|g(s)|^2\}ds;$$

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\iint_{0U}^{t} f(s,u,w)\tilde{\nu}(du,ds)\right|^2\right\}\le$$

$$\le 4\iint_{0U}\mathbb{E}\{|f(s,u,w)|^2\}\Pi(du,ds)$$

та для умов (6), (7), (8) знайдемо оцінку для виразу $\mathbb{E}\{\|y^{(n+1)}(t)\|^2\}$. Очевидно, що

$$\|y^{(n+1)}(t)\|^2\le\Bigg(\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))]ds|+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t b(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))dw(s)|+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\iint_{0U}^{t}[c(s,x_s^{(n)},u)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-$$

$$-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(ds,du)|\Big)^2\le$$

$$\le 2[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))]ds|^2+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)|^2+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\iint_{0U}^t [c(s,x_s^{(n)},u)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-$$

$$-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(ds,du)|^2].$$

Знайдемо умовне математичне сподівання відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_0$ (будемо позначати $\mathbb{E}\{|y^{(n+1)(t)}|^2\}\equiv\mathbb{E}\{|y^{(n+1)}(t)|^2/\mathcal{F}_0\}$) [9]:

$$\mathbb{E}\{\|y^{(n+1)}(t)\|^2\}\le 2[\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-$$

$$-z_s^{(n)}(\theta))]ds|^2\}+\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-$$

$$-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)|^2\}+\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\iint_{0U}^t [c(s,x_s^{(n)},u)-$$

$$-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-$$

$$-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(du,ds)|^2\}]\le$$

$$\le 2K^2[\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \|y^{(n)}(s)\|ds|^2\}+$$

$$+\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \|y^{(n)}(s)\|dw(s)|^2\}+$$

$$+\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\iint_{0U}^t \|y^{(n)}(s)\|\tilde{\nu}(du,dv)|^2\}\le$$

$$\le 2K^2[T\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds+$$

$$+4\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds+$$

$$+4\iint_{0U}^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|\}\Pi(du,ds)=$$

$$=2K^2[T\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds+$$

$$+4\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds+4\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds=$$

$$=2K^2(T+8)\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\{\|y^{(n+1)}(t)\|^2\}\le$$
$$\le 2K^2(T+8)\int_0^t \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds, \qquad (12)$$

$t\in[0,T]$. Проінтегрувавши n разів, матимемо

$$\mathbb{E}\{\|y^{(n+1)}(s)\|^2\}\le$$
$$\le [2K^2(T+8)]^n\int_0^t (T-s)^n\mathbb{E}\{\|y^{(0)}(s)\|^2\}ds/n!, \quad (13)$$

$t\in[0,T]$, де

$$y^{(0)}(t)=-\int_0^t a(s,x_s^{(0)}(\theta))ds-$$

$$-\int_0^t b(s,x_s^{(0)}(\theta))dw(s)-$$

$$-\iint_{0U}^t c(s,x_s^{(0)},u)\tilde{\nu}(ds,du), \quad \forall t\in[0,T]$$

і

$$x_s^{(0)}(s-\tau)=\begin{cases}\varphi(0), & s\ge\tau,\\ \varphi(s-\tau), & s<\tau.\end{cases}$$

Тепер оцінимо вираз

$$\mathbb{E}\{\|y^{(0)}(t)\|^2\}=\mathbb{E}\{(\sup_{0\le s\le t}|y^{(0)}(s)|)^2\}\le$$

$$\le 2\mathbb{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s a(\tau,x_\tau^{(0)})d\tau|^2+$$

$$+\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s b(\tau,x_\tau^{(0)})dw(\tau)|^2+$$

$$+\sup_{0\le s\le t}|\iint_{0U}^{s} c(\tau,x_\tau^{(0)},u)\tilde\nu(du,d\tau)|^2\}\le$$

$$\le 2(\mathbb{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s a(\tau,x_\tau^{(0)})d\tau|^2\}+$$

$$+\mathbb{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s b(\tau,x_\tau^{(0)})dw(\tau)|^2\}+$$

$$+\mathbb{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\iint_{0U}^{s} c(\tau,x_\tau^{(0)},u)\tilde\nu(du,d\tau)|^2\})\le$$

$$\le 2(T\int_0^t \mathbb{E}\{|a(\tau,x_\tau^{(0)})|^2\}d\tau+$$

$$+4\int_0^t \mathbb{E}\{|b(\tau,x_\tau^{(0)})|^2\}d\tau+$$

$$+4\iint_{0U}^{t} \mathbb{E}\{|c(\tau,x_\tau^{(0)},u)|^2\}d\tau).$$

Оскільки відображення a, b і c є неперервними на відрізку $[0,T]$, то існують додатні сталі C_1, C_2 і C_3, які обмежують їх.

Отже,

$$\mathbb{E}\{\|y^{(0)}(t)\|^2\}\le 2(T\int_0^t C_1^2d\tau+4\int_0^t C_2^2d\tau+$$

$$+4\int_0^t C_3^2d\tau)\le 2(T^2C_1^2+4C_2^2T+4C_3^2T)\le\theta,$$

де

$$\theta=2T(TC_1^2+4C_2^2+4C_3^2)>0.$$

Тоді оцінка (13) набуде вигляду

$$\mathbb{E}\{\|y^{(n)}(t)\|^2\}\le\theta[2K^2(T+8)]^n\cdot\frac{T^{n+1}}{(n+1)!},\tag{14}$$

$t\in[0,T]$, $n=1,2,\ldots$.

Перепишемо нерівність (11) таким чином:

$$y^{(n+1)}(t)=\int_0^t\alpha_n(s)ds+\int_0^t\beta_n(s)dw(s)+$$

$$+\iint_{0U}^{t}\gamma_n(s,u)\tilde\nu(ds,du),$$

де

$$\alpha_n(t)=a(t,x_t^{(n)})-G_1(t,x_t^{(n)})y^{(n)}(t)-$$

$$-a(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)});$$

$$\beta_n(t)=b(t,x_t^{(n)})-G_2(t,x_t^{(n)})y^{(n)}(t)-$$

$$-b(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)});$$

$$\gamma_n(t)=c(t,x_t^{(n)},u)-G_3(t,x_t^{(n)},u)y^{(n)}(t)-$$

$$-c(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)},u).$$

Тоді очевидно, що

$$\sup_{0\le s\le t}|y^{(n+1)}(t)|\le\int_0^T|\alpha_n(s)|ds+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\beta_n(s)dw(s)|+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\iint_{0U}^{t}\gamma_n(s,u)\tilde\nu(ds,du)|.\tag{15}$$

Тепер оцінимо кожний з цих інтегралів. Використовуючи (6), (7), (8) і (14), легко одержати нерівність:

$$\mathbb{P}\{\int\limits_0^T |\alpha_n(s)|ds > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le 3^{2n+2}\int\limits_0^T \mathbb{E}\{|\alpha_n(s)|^2\}ds \le$$

$$\le 3^{2n+3}K^2\int\limits_0^T \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds \le$$

$$\le 3^{2n+3}K^2T\theta[2K^2(T+8)]^n\frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \le$$

$$\le \frac{3a^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!},$$

де $K_1 \equiv 18\cdot K^2T(T+8)$. Аналогічно

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|\int\limits_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!};$$

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le s\le t}|\iint\limits_{0U}^{t} \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)| > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!}.$$

Нарешті з (15) і попередніх оцінок випливає нерівність

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|y^{(n+1)}(t)| > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\{\int\limits_0^T |\alpha_n(s)|ds > 3^{-n-2}\}+$$

$$+\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|\int\limits_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\}+$$

$$+\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|\iint\limits_{0U}^{t} \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)| > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le \frac{3K_1^{n+1}\theta T}{(n+1)!}. \qquad (16)$$

З (9) одержимо

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)|\} <$$

$$< \mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|y^{(n)}(t)| + \int\limits_0^T |G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|ds+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int\limits_0^t G_2(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)dw(s)|+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\iint\limits_{0U}^{t} G_3(s,x_s^{(n)},u)y_n(s)\tilde{\nu}(ds,du)|.$$

Позначимо

$$S_1 \equiv \sup\{|G_1(t,x_t)|,\ t\in[0,T],\ x_t\in\mathbb{D}_n\};$$

$$S_2 \equiv \sup\{|G_2(t,x)|,\ t\in[0,T],\ x_t\in\mathbb{D}_n\};$$

$$S_3 \equiv \sup\{|G_3(t,x,u)|,\ t\in[0,T]$$
$$\{x_t,u\}\in\mathbb{D}_n\times U\}$$

Використовуючи (14), легко побачити, що

$$\mathbb{P}\{\int\limits_0^T |G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|ds > 3^{-n}\} \le$$

$$\le 3^{2n}\mathbb{E}\{\int\limits_0^T |G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|^2ds\} \le$$

$$\le 3^{2n}T\int\limits_0^T \mathbb{E}\{|G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|^2\}ds \le$$

$$S_1^2\cdot 3^{2n}TK^2\int\limits_0^T \mathbb{E}\{\|y^{(n)}(s)\|^2\}ds \le$$

$$\le 3^{2n}T^2K^2[2K^2(T+8)]^n\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\theta\cdot S_1^2 \le$$

$$\le \frac{S_1^2\theta T^3 a^n}{(n+1)!}.$$

Аналогічно

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|\int\limits_0^t G_2(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)dw(s)|>3^{-n}\}\le$$

$$\le \frac{S_2^2\theta T^2 a^n}{(n+1)!};$$

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|\iint\limits_{0U}^{t} G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(ds,du)|>$$

$$>3^{-n}\}\le \frac{S_3^2\theta T^2 a^n}{(n+1)!}.$$

З (9), (16) та з останніх оцінок маємо ланцюжок нерівностей:

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|>4\cdot 3^{-n}\}\le$$

$$\le [\frac{3\theta T a^n}{(T+8)(n+1)!}+\frac{S_1^2\theta T^3 a^n}{(n+1)!}+$$

$$+\frac{S_2^2\theta T^2 a^n}{(n+1)!}+\frac{S_3^2\theta T^2 a^n}{(n+1)!}]\cdot 4^2\cdot 3^{2n}=$$

$$=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta T a^n}{(n+1)!}[\frac{3}{(T+8)}+S_1^2T^2+$$

$$+S_2^2T+S_3^2T]=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta T a^n}{(T+8)(n+1)!}[3+$$

$$+(T+8)T^2S_1^2+(T+8)T(S_2^2+S_3^2)]. \quad (17)$$

За лемою Бореля-Кантеллі [1], одержимо, що

$$\mathbb{P}=\{\lim_{n\to\infty}(\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|)>$$

$$>4\cdot 3^{-n}\}=0.$$

Тобто, для великих n

$$\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|\le 4\cdot 3^{-n} \quad (18)$$

майже скрізь.

Отже, послідовність $\{x_n(t), n=1,2,\dots\}$ майже скрізь збіжна до стохастичного процесу $x^*(t)$. За теоремою Вейєрштрасса про рівномірну збіжність випливає, що ця збіжність є рівномірною на $[0,T]$.

Якщо використаємо означення для $x^*(t)$, поклавши $x^*(t)=\varphi(t)$ для $t\in[-\tau,0]$, одержимо, що траєкторія $x^*(t)$ не має стрибків другого роду на $[-\tau,T]$. Крім того, із визначення послідовностей $\{x_n(t), n=1,2,\dots\}$ і $\{y_n(t), n=1,2,\dots\}$, випливає, що вони є тривіальними по відношенню до вінерового процесу і випадкової пуассонівської міри. Таким чином, для довільного $t\in[-\tau,T]$, $x^*(t)$ є тривіальним. Отже, $x^*(t)$ належить до $\mathbb{D}_n$.

Для того, щоб довести, що $x^*(t)$ є розв'язком (2),(3), покажемо спочатку, що $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в $\mathbb{D}_n$. З (18) маємо:

$$\mathbb{E}\{\sup_{0\le t\le T}|x^*(t)-x^{(n)}(t)|^2\}\le$$

$$\le \mathbb{E}\{\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+m)}(t)-x^{(n)}(t)|^2\}\le$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\{\sum_{k=n}^{n+m-2}\sup_{0\le t\le T}|x^{(k+1)}(t)-x^{(k)}(t)|^2\}\le$$

$$\le 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m-2}3^{-k}\right)^2\to 0.$$

Таким чином, $x^{(n)}(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в L^2 (в розумінні збіжності в L^2).

Використовуючи той факт, що функції a, b, c стохастично замкнені, випливає, що для всіх $t\in[0,T]$

$$a(t,x_t^{(n)}(\theta))\to a(t,x_t^*(\theta));$$

$$b(t,x_t^{(n)}(\theta))\to b(t,x_t^*(\theta));$$

$$c(t,x_t^{(n)},u)\to c(t,x_t^*,u)$$

майже скрізь.

Отже,

$$\mathbb{E}\{|\int\limits_0^t a(s,x_s^{(n)})ds-\int\limits_0^t a(s,x_s^*)ds|^2\}\le$$

$$\le T\int\limits_0^T \mathbb{E}\{|a(s,x_s^{(n)}-a(s,x_s^*))|^2\}ds\to 0,$$

$$\mathbb{E}\{|\int_0^t b(s,x_s^{(n)})dw(s)-\int_0^t b(s,x_s^*)dw(s)|^2\}\le$$

$$\le T\int_0^T \mathbb{E}\{|b(s,x_s^{(n)}-b(s,x_s^*))|^2\}ds\to 0;$$

$$\mathbb{E}\{|\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(ds,du)-$$

$$-\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^*,u)\tilde{\nu}(ds,du)|^2\}=$$

$$=\iint_{0U}^{t} \mathbb{E}\{|c(s,x_s^{(n)},u)-$$

$$-c(s,x_s^*,u)|^2\}\Pi(du)ds\to 0.$$

Взявши границю в розумінні збіжності в L^2 і застосувавши її до обох сторін рівності (9), одержимо, що для довільного $t\in[0,T]$ рівність

$$x^*(t)=x(0)+\int_0^t a(s,x_s^*)ds+\int_0^t b(s,x_s^*)dw(s)+$$

$$+\iint_{0U}^{t} c(s,x_s^*,u)\tilde{\nu}(ds,du)$$

виконується майже скрізь і $x^*(t)=\varphi(t)$ для $t\in[-\tau,0]$.

Також, випадкові процеси зліва і справа останньої рівності не мають стрибків другого роду. Отже, ця рівність має місце для всіх $t\in[-\tau,T]$ майже скрізь і $x^*(t)$ є розв'язком (2), (3).

3. Про єдиність розв'язків СДФР.

Розглянемо задачу про єдиність розв'язку задачі (2), (3), (5).

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, і обмежений випадковий контрактор для СДФР (2) є правильним. Тоді розв'язок задачі (2), (3), (5) $\{x(t)\}\subset D_n$ є єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Доведення. Нехай $x^1(t)$, $x^2(t)$ – два розв'язки задачі (2), (3). Тоді $x(t)\equiv x^1(t)$, $z(t)\equiv x^2(t)-x^1(t)$ в (5). Значить, існує $y(t)$ з $\mathbb{D}_n$, який є розв'язком рівняння

$$x^2(t)-x^1(t)=y(t)+\int_0^t G_1(s,x_s^1)y(s)ds+$$

$$+\int_0^t G_2(s,x_s^1)y(s)dw(s)+$$

$$+\iint_{0U}^{t} G_3(s,x_s^1,u)\tilde{\nu}(ds,du). \tag{19}$$

Тоді, враховуючи (1) та (19), легко одержати оцінку

$$y(t)=\int_0^t [a(s,x_s^2)-a(s,x_s^1)-G_1(s,x_s^1)y(s)]ds+$$

$$+\int_0^t [b(s,x_s^2)-b(s,x_s^1)-G_2(s,x_s^1)y(s)]dw(s)+$$

$$+\iint_{0U}^{t} [c(s,x_s^2,u)-c(s,x_s^1,u)-$$

$$-G_3(s,x_s^1,u)y(s)]\tilde{\nu}(ds,du)=\int_0^t [a(s,x_s^1+z_s)-$$

$$-a(s,x_s^1)-G_1(s,x_s^1)y(s)]ds+$$

$$+\int_0^t [b(s,x_s^1+z_s)-b(s,x_s^1)-G_2(s,x_s^1)y(s)]dw(s)+$$

$$+\iint_{0U}^{t} [c(s,x_s^1+z_s,u)-c(s,x_s^1,u)-$$

$$-G_3(s,x_s^1,u)y(s)]\tilde{\nu}(ds,du),$$

$$\sup_{0\le s\le t}|y(s)|\le K\int_0^t \|y(s)\|ds+$$

$$+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t \|y(s)\|dw(s)+$$

$$+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t\int_U \|y(s)\|\Pi(du)ds,$$

$$\mathbb{E}\{\|y(t)\|^2\}=\mathbb{E}\{\sup_{0\le s\le t}|y(s)|^2\}\le$$

$$\le 2(TK^2\int_0^t \mathbb{E}\{\|y(s)\|^2\}ds+)$$

$$+4K^2\int_0^t \mathbb{E}\{\|y(s)\|^2\}ds+$$

$$+4K^2\int_0^t \mathbb{E}\{\|y(s)\|^2\}ds)\le$$

$$\le 2K^2(T+8)\int_0^t \mathbb{E}\{\|y(s)\|^2\}ds.$$

Нагадаємо посилену нерівність Гронуола [1]: для вимірних функцій $\varphi(t)$ і $\alpha(t)$, для яких виконується співвідношення

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t\varphi(s)ds,\quad L>0,$$

справедлива нерівність

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t e^{L(t-s)}\alpha(s)ds.$$

Якщо позначити $\varphi(t)\equiv\mathbb{E}\{\|y(t)\|^2\}$, $L=2K^2(T+8)$, $\alpha(t)\equiv 0$, то

$$0\le\mathbb{E}\{\|y(t)\|^2\}\le$$

$$\le 2K^2(T+8)\int_0^t e^{2K^2(T+8)}\cdot 0ds\le 0.$$

Значить,

$$\mathbb{E}\{\|y(t)\|^2/\mathcal{F}_0\}=0,\quad\forall t\in[0,T],$$

майже скрізь. Згідно з властивостями умовного математичного сподівання, одержимо, що $y(t)\equiv 0$. Тоді, використовуючи (17) і (19), очевидно, що

$$0\le\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T}|x^1(t)-x^2(t)|\ne 0\}\le$$

$$\le\frac{4^2\cdot 3^{2n}T\theta a^n}{(n+1)!(T+8)}[3+(T+8)T^2S_1^2+$$

$$+(T+8)T(S_2^2+S_3^2)]\to 0$$

при $n\to\infty$.

Отже, $\mathbb{P}\{x^1(t)\ne x^2(t)\}=0$.

Продовжуючи розв'язки $\{x^1(t)\}$ і $\{x^2(t)\}$ вправо, матимемо, що $x^1(t)=x^2(t)$ на $[0,T]$ майже скрізь з точністю до стохастичної еквівалентності. Отже, розв'язок є єдиний майже скрізь, що і треба було довести.

Зауважимо, що, якщо $c(t,x_t,u)\equiv 0$, то одержуються результати для дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применение // Киев: Наукова думка, 1982. - 612 с.

2. Altman M Inverse differentiability, contractors and equations in Banach spaces // Studia Math. - 1971. - V. 46. - P.1 - 15.

3. Kuc H.H. On integral contractors // Journal of Integral Equations. - 1979. - P.35 - 46.

4. Zhang B.C., Padgett W.J. The existence and uniqueness of solutions of stochastic differential-difference equations // Stochastic Analysis and Appl. - 1998. - V. 2(3). - P.335 - 345.

5. Jankovic Sv. On stochastic differential-difference equations and their random integral contractors // Научные труды. - Том 562. - Математика. - Рига: Латвийский университет, 1991. - С. 74 - 84.

6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. - М.: Наука, 1977 . -352.

7. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Том 1. - М.: Наука, 1994. - 544 с.

8. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Том 2. - М.: Наука, 1994. - 486 с.

9. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, стохастичні та випадкові процеси. В 3-х т. - Т.3. - Випадкові процеси. Теорія і стохастичне моделювання. - Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. - 798 с.