УДК 519.21

©2008 р. Є. Ф. Царков, І. В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРІВСЬКОГО ТИПУ

В даній роботі досліджена проблема існування та єдності розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння Вольтерівського типу.

In this paper the problem of the existence and uniqueness of a solution of a Volterra type stochastic differential-functional equation is investigated.

Вступ

В даній роботі розглядається стохастичне інтегро – диференціальне рівнянь Вольтерри з інтегралом Скорохода (1) за початковою умовою (2). Для даної задачі Коші ставиться питання про існування та єдність l - го моменту сильного розв'язку при $l > 1$. Даному питанню присвячено багато праць, але в більшості випадків, по-перше, розглядається дана задача невипадкового характеру, тобто при відсутності інтегралів Вінера та Скорохода [3, 4, 6]. По-друге, при розгляді навіть стохастичних систем увага приділяється стійкості в середньому квадратичному, тобто при $l = 2$ [1, 2]. По-третє, наявність доданків Вольтерри зумовлює додаткові ускладнення.

Постановка задачі. Основні означення і позначення.

Нехай на імовірнісному базисі $(\Omega, F, P, \mathbb{F})$, де $\mathbb{F} = (F_t)_{t\geq 0}$ - фільтрація, задано для $t \in [0, T]$ випадковий процес, $x(t) = x(t, \omega) \in R^n$ як сильний розв'язок рівняння з простору $X = R^n \times S_{[-h,0]}$

$$dD(t, x_t) = [a_1(t, u, x_t) + \int_0^t a_2(s, u, x_s)ds+$$

$$+\int_0^t a_3(s^-, u, x_{s^-})dW_1(s)+\int_0^t\int_{Z_1} a_4(s, u, x_s, z_1)\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds, dz_1)]dt+[b_1(t, u, x_t)+\int_0^t b_2(s, u, x_s)ds+$$

$$+\int_0^t b_3(s, u, x_s)dW_1(s)+\int_0^t\int_{Z_1} b_4(s^-, u, x_{s^-}, z_1)\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds, dz_1)]dW_2(t) + \int_{Z_2}[c_1(t^-, u, x_{t^-}, z_2)+$$

$$+\int_0^{t^-} c_2(s, u, x_s, z_2)ds+\int_0^{t^-} c_3(s, u, x_s, z_2)dW_1(s)+$$

$$+\int_0^{t^-}\int_{Z_1} c_4(s^-, u, x_{s^-}, z_1, z_2)\widetilde{v_1}(ds, dz_1)]\widetilde{v_2}(dt, dz_2) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \ \ t \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Зауваження. Надалі в інтегралі Скорохода замість s^- будемо писати s, замість x_{s^-} – просто x_s, де $x_t = \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$ - відрізок розв'язку, $h > 0$; $D(t, x_t) = x(t) - \Phi(t, x_t)$, $\varphi \in S_{[-h,0]}$, $S_{[-h,0]}$ - простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (зауважимо, що функціонал $\Phi(t, x_t)$ не залежить від $x(t)$ [1, 2, 5]); $\Phi : (0, T] \times S_{[-h,0]} \to R^n$, $a_1, b_1 : (0, T] \times U \times S_{[-h,0]} \to R^n$, $a_2, a_3, b_2, b_3 : (0, T] \times U \times S_{[-h,0]} \to R^n$, $a_4, b_4 : (0, T] \times (0, T] \times$

$U \times S_{[-h,0]} \times Z_1 \to R^n$, $c_1, c_2, c_3 : (0,T] \times U \times S_{[-h,0]} \times Z_2 \to R^n$, $c_4 : (0,T] \times U \times S_{[-h,0]} \times Z_1 \times Z_2 \to R^n$ - обмежені та неперервні за сукупністю змінних функціонали, $\{Z_1, Z_2\}$ - борелеві множини з R^1, $\varphi \in S_{[-h,0]}$.

Означення 1.1. Стохастичний процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega),\ t \in [-h,T]\}$ називається *сильним розв'язком* рівняння (1), якщо $x(t)$ прогресивно вимірний [1] відносно F_t при $t \le T$, відрізки траєкторій процесу $x^t \in X$ при $t \in [t_0, T]$, $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$ м.н. і (1) виконується з ймовірністю 1 для всіх $t \in [t_0, T]$ одночасно.

Якщо два сильні розв'язки майже напевно співпадають, то вони називаються стохастично еквівалентними. Будемо говорити, що рівняння (1) має сильний розв'язок при початковій умові (2), якщо всі розв'язки (1) стохастично еквівалентні.

Норму в просторі X введемо наступним чином[6]

$$\|\varphi\| \equiv \|\varphi\|_X^p \equiv (|\varphi(0)|^p + \int_{-h}^{0} |\varphi(s)|^p \rho(s) ds)^{1/p} \equiv$$

$$\equiv (|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p)^{1/p}, \qquad (3)$$

де

$$\|\varphi\|_\rho^p = \int_{-h}^{0} |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty,\ 1 \le p < \infty.$$

Зауважимо, що в (3) функція ρ - це функція, яка володіє наступними властивостями [3]:

1. ρ - сумовна $[-h, 0]$;
2. $0 < K_1 < |\rho(s)| < K_2 < \infty,\ s \in [-h, 0]$;
3. $\rho > 0$ - строго додатна на $[-h, 0]$;

При доведенні теореми існування та єдиності сильного розв'язку будемо використовувати нерівності Букхольдера[2]: для довільного $l > 1$ існують сталі K_1, K_2 такі, що

$$\mathbf{E}|\int_{t_0}^{t} \psi_1(s) dW(s)|^l \le K_1 \mathbf{E}(\int_{t_0}^{t} |\psi_1(s)|^2 ds)^{l/2};$$

$$\mathbf{E}|\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} \psi_2(\theta, s)\tilde{\nu}(d\theta, ds)|^l \le$$

$$\le K_2 \mathbf{E}(\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} |\psi_2(\theta, s)|^2 \Pi(d\theta) ds)^{l/2};$$

для будь-яких F_t -узгоджених процесів $\psi_1(t,\omega)$ і $\psi_2(\theta, t, \omega)$, таких, що

$$\int_0^T \psi_1^2(t) dt < \infty;\ \int_0^T \int_{\Theta} \psi_2^2(\theta, t) \Pi(d\theta) dt < \infty$$

майже напевно.

Основний результат

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють наступні умови:*

1. *Функціонали $a_i, b_i, c_i,\ i = \{1,2,3,4\}$ вимірні за сукупністю змінних.*
2. *Виконуються умови обмеженого зростання коефіцієнтів рівномірно по $t \in [0,T]$:*

$$|a_1(t,u,\psi)| + |a_2(t,u,\psi)| + |a_3(t,u,\psi)| +$$

$$+ \int_{Z_1} |a_4(t,u,\psi,z_1)| dz_1 \le L(1 + \|\psi\|);$$

$$|b_1(t,u,\psi)| + |b_2(t,u,\psi)| + |b_3(t,u,\psi)| +$$

$$+ \int_{Z_1} |b_4(t,u,\psi,z_1)| dz_1 \le L(1 + \|\psi\|);$$

$$\int_{Z_2} (|c_1(t,u,\psi,z_2)| + |c_2(t,u,\psi,z_2)| +$$

$$+ |c_3(t,u,\psi,z_2)| + \int_{Z_1} |c_4(t,u,\psi,z_1,z_2)| \times$$

$$\times \Pi_1(dz_1)) \Pi_2(dz_2) \le L(1 + \|\psi\|);$$

$$|\Phi(t,\psi)| \le L(1 + \|\psi\|).$$

3. *Виконуються умови Ліпшиця для коефіцієнтів, тобто для* $\forall\varphi,\psi\in S_{[-h,0]}$ *виконується умова:*

$$|a_1(t,u,\psi)-a_1(t,u,\varphi)|+|a_2(t,u,\psi)-$$
$$-a_2(t,u,\varphi)|+|a_3(t,u,\psi)-a_3(t,u,\varphi)|+$$
$$+\int\limits_{Z_1}|a_4(t,u,\psi,z_1)-a_4(t,u,\varphi,z_1)|dz_1\le$$
$$\le L\|\psi-\varphi\|;$$
$$|b_1(t,u,\psi)-b_1(t,u,\varphi)|+|b_2(t,u,\psi)-$$
$$-b_2(t,u,\varphi)|+|b_3(t,u,\psi)-b_3(t,u,\varphi)|+$$
$$+\int\limits_{Z_1}|b_4(t,u,\psi,z_1)-b_4(t,u,\varphi,z_1)|dz_1\le$$
$$\le L\|\psi-\varphi\|;$$
$$+\int\limits_{Z_2}(|c_1(t,u,\psi,z_2)-c_1(t,u,\varphi,z_2)|+$$
$$+|c_2(t,u,\psi,z_2)-c_2(t,u,\varphi,z_2)|+$$
$$+c_3(t,u,\psi,z_2)-c_3(t,u,\varphi,z_2)|+$$
$$+\int\limits_{Z_1}|c_4(t,u,\psi,z_1,z_2)-c_4(t,u,\varphi,z_1,z_2)|\times$$
$$\times\Pi_1(dz_1))\Pi_2(dz_2)\le L\|\psi-\varphi\|;$$

$$|\Phi(t,u,\psi)-\Phi(t,\varphi)|\le L\|\psi-\varphi\|.$$

4. *Початкова умова (2) задовольняє наступну умову*

$$\mathbf{E}\|\varphi\|_X^l<\infty, l>1.$$

Тоді

1. *Існує єдиний сильний розв'язок* $\{x(t),t\in[t_0,T]\}$ *з простору Скорохода рівняння (1) такий, що*

$$x_0=\varphi.$$

2. *Для* $\forall t\in[t_0,T]$ *і* $l>1$ *існує* l*-ий момент розв'язку (1)*

$$\mathbf{E}\sup_{0<t\le T}|x(t)|^l<\infty.$$

Доведення. (Існування).

Для доведення існування розв'язку даного рівняння скористаємося методом послідовних наближень. Визначимо наближення розв'язку задачі (1), (2) наступним чином:

$$x^0(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ -h\le t\le 0,\\ \varphi(0),\ t>0,\end{cases}$$

$$x^n(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ -h\le t\le 0,\\ \Phi(t,x_t^{n-1})+x(0)-\Phi(0,x_0^{n-1})+\\ +R(t,x^{n-1}),\ t>0,\end{cases}\tag{4}$$

де випадковий процес $R(t,x)$ описаний нижче.

Для спрощення деяких викладок введемо наступне позначення:

$$R(\widetilde{t},x)=\int\limits_0^{\widetilde{t}}[a_1(t,u,x_t)+\int\limits_0^t a_2(s,u,x_s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t a_3(s,u,x_s)dW_1(s)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{Z_1}a_4(s,u,x_s,z_1)\widetilde{v}_1(ds,dz_1)]dt+$$
$$+\int\limits_0^{\widetilde{t}}[b_1(t,u,x_t)+\int\limits_0^t b_2(s,u,x_s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t b_3(s,u,x_s)dW_1(s)+\int\limits_0^t\int\limits_{Z_1}b_4(s,u,x_s,z_1)\times$$
$$\times\widetilde{v}_1(ds,dz_1)]dW_2(\widetilde{t})+$$
$$+\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2}[c_1(t,u,x_t,z_2)+\int\limits_0^t c_2(s,u,x_s,z_2)ds+$$

$$+\int_0^t c_3(s,u,x_s,z_2)dW_1(s)+$$

$$+\int_0^t\int_{Z_1} c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]\widetilde{v_2}(dt,dz_2) \tag{5}$$

Отже, запис (1) можна подати у вигляді

$$D(t,x_t)-D(0,x_0)=R(t,x). \tag{6}$$

або використовуючи означення функціонала $D(t,x_t)$ отримаємо

$$x(t)=\Phi(t,x_t)+x(0)-\Phi(0,x_0)+R(t,x).$$

Введемо наближення для розв'язку рівняння (1)

$$x^0(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[-h,0],\\ \varphi(0), & t\in(0,T].\end{cases}$$

$$x^n(t)=\Phi(t,x_t^{n-1})+x^{n-1}(0)-\Phi(0,x_0^{n-1})+$$
$$+R(t,x^{n-1}),\ n\geq 1. \tag{7}$$

За умови 2 теореми можна стверджувати, що x^n - є вимірною функцією відносно потоку $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}$ та не має розривів другого роду.

Спочатку покажемо за індукцією, що

$$\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|x^n(t)|^l<\infty. \tag{8}$$

Для n=0 нерівність (8) є безпосереднім наслідком пункту 4 теореми. Нехай $n\geq 1$. Доведемо нерівність (8) для цього випадку:

$$\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|x^n(t)|^l=\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|\Phi(t,x_t^{n-1})+$$

$$+x^{n-1}(0)-\Phi(0,x_0^{n-1})+R(t,x^{n-1})|^l\leq$$

$$\leq K(\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|\Phi(t,x_t^{n-1})|^l+\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|x^{n-1}(0)|^l+$$

$$+\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|\Phi(0,x_0^{n-1})|^l+\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|R(t,x^{n-1})|^l). \tag{9}$$

Зауважимо, що другий і третій доданок нерівності (9) є обмеженими в силу пункту 4 теореми. Доведемо, що доданки 1 та 4 є також обмеженими.

Для цього припустимо, що виконується нерівність (8) для $n-1$. Тоді для доданку 1 обмеженість має місце в силу обмеженості та неперервності функціонала $\Phi(t,x_t)$. Аналогічно в силу обмеженості та неперервності функціоналів $a_1,b_1:(0,T]\times U\times S_{[-h,0]}\to R^n$, $a_2,a_3,b_2,b_3:(0,T]\times U\times S_{[-h,0]}\to R^n$, $a_4,b_4:(0,T]\times(0,T]\times U\times S_{[-h,0]}\times Z_1\to R^n$, $c_1,c_2,c_3:(0,T]\times U\times S_{[-h,0]}\times Z_2\to R^n$, $c_4:(0,T]\times U\times S_{[-h,0]}\times Z_1\times Z_2\to R^n$ отримуємо обмеженість четвертого доданку нерівності (9). Обмеженість наближень розв'язку рівняння (1) доведена, тобто маємо нерівність

$$\mathbf{E}\sup_{0<t\leq T}|x^n(t)|^l\leq K(n)\leq K. \tag{10}$$

Розглянемо оцінки зверху для різниць $E|x^n(t)-x^{n-1}(t)|^l$. Для даної оцінки використаємо наступне твердження.

Лема 1. *Нехай функціонали a_i,b_i,c_i задовольняють умовам теореми 1.1. Тоді для $\forall l>1$ виконується нерівність*

$$E|R(\widetilde{t},,x)-R(\widetilde{t},y)|^l\leq L_1\int_0^T E\|x-y\|^l dt+$$

$$+L_2(\int_0^T E\|x-y\|^2dt)^{\frac{l}{2}}. \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо $E|R(t,x)-R(t,y)|^l$:

$$E|R(\widetilde{t},,x)-R(\widetilde{t},y)|^l=E|\int_0^{\widetilde{t}}[a_1(t,u,x_t)+$$

$$+\int_0^t a_2(s,u,x_s)ds+\int_0^t a_3(s,u,x_s)dW_1(s)+$$

$$+\int_0^t\int_{Z_1} a_4(s,u,x_s,z_1)\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]dt+$$

$$+\int_0^{\widetilde{t}}[b_1(t,u,x_t)+\int_0^t b_2(s,u,x_s)ds+$$

$$+\int_0^t b_3(s,u,x_s)dW_1(s)+\int_0^t\int_{Z_1} b_4(s,u,x_s,z_1)\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]dW_2(t)+$$

$$+\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}[c_1(t,u,x_t,z_2)+\int_0^t c_2(s,u,x_s,z_2)ds+$$

$$+\int_0^t c_3(s,u,x_s,z_2)dW_1(s)+$$

$$+\int_0^t\int_{Z_1} c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]\widetilde{v_2}(dt,dz_2)-$$

$$-\int_0^{\widetilde{t}}[a_1(t,u,y_t)+\int_0^t a_2(s,u,y_s)ds+$$

$$+\int_0^t a_3(s,u,y_s)dW_1(s)+\int_0^t\int_{Z_1} a_4(s,u,y_s,z_1)\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]dt-\int_0^{\widetilde{t}}[b_1(t,u,y_t)+\int_0^t b_2(s,u,y_s)ds+$$

$$+\int_0^t b_3(s,u,y_s)dW_1(s)+\int_0^t\int_{Z_1} b_4(s,u,y_s,z_1)\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]dW_2(t)-\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}[c_1(t,u,y_t,z_2)+$$

$$+\int_0^t c_2(s,u,y_s,z_2)ds+\int_0^t c_3(s,u,x_s,z_2)dW_1(s)+$$

$$+\int_0^t\int_{Z_1} c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)\widetilde{v_1}(ds,dz_1)]\widetilde{v_2}(dt,dz_2)|^l\le$$

$$\le K_1(E|\int_0^{\widetilde{t}}(a_1(t,u,x_t)-a_1(t,u,y_t))dt|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t(a_2(s,u,x_s)-a_2(s,u,y_s))dsdt|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t(a_3(s,u,x_s)-a_3(s,u,y_s))dW_1(s)dt|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t\int_{Z_1}(a_4(s,u,x_s,z_1)-a_4(s,u,y_s,z_1))\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds,dz_1)dt|^l+E|\int_0^{\widetilde{t}}(b_1(t,u,x_t)-$$

$$-b_1(t,u,y_t))dW_2(t)|^l+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t(b_2(s,u,x_s)-$$

$$-b_2(s,u,y_s))dsdW_2(t)|^l+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t(b_3(s,u,x_s)-$$

$$-b_3(s,u,y_s))dW_1(s)dW_2(t)|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_0^t\int_{Z_1}(b_4(s,u,x_s,z_1)-b_4(s,u,y_s,z_1))\times$$

$$\times\widetilde{v_1}(ds,dz_1)dW_2(t)|^l+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}(c_1(t,u,x_t,z_2)-$$

$$-c_1(t,u,y_t,z_2))\widetilde{v_2}(dt,dz_2)|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t(c_2(s,u,x_s,z_2)-c_2(s,u,y_s,z_2))\times$$

$$\times\widetilde{v_2}(dt,dz_2)ds|^l+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t(c_3(s,u,x_s,z_2)-$$

$$-c_3(s,u,y_s,z_2))\widetilde{v_2}(dt,dz_2)dW_1(s)|^l+$$

$$+E|\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t\int_{Z_1}(c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)-$$

$$-c_4(s,u,y_s,z_1,z_2))\widetilde{v_1}(ds,dz_1)\widetilde{v_2}(dt,dz_2)|^l). \tag{12}$$

Для нерівності (12) використаємо нерівності Букхольдера і отримаємо наступний результат

$$E|R(\widetilde{t},x)-R(\widetilde{t},y)|^l \leq$$

$$\leq K_2(\widetilde{t}^{l-1}\int\limits_0^{\widetilde{t}} E|a_1(t,u,x_t)-a_1(t,u,y_t)|^l dt+$$

$$+\widetilde{t}^{l-1}\int\limits_0^{\widetilde{t}} t^{l-1}\int\limits_0^{t} E|a_2(s,u,x_s)-a_2(s,u,y_s)|^l dsdt$$

$$+\widetilde{t}^{l-1}\int\limits_0^{\widetilde{t}}(\int\limits_0^{t} E|a_3(s,u,x_s)-a_3(s,u,y_s)|^2 ds)^{\frac{l}{2}}dt+$$

$$+\widetilde{t}^{l-1}\int\limits_0^{\widetilde{t}}(\int\limits_0^{t}\int\limits_{Z_1} E|a_4(s,u,x_s,z_1)-a_4(s,u,y_s,z_1)|^2\times$$

$$\times\Pi_1(dz_1)ds)^{\frac{l}{2}}dt+(\int\limits_0^{\widetilde{t}} E|b_1(t,u,x_t)-$$

$$-b_1(t,u,y_t)|^2dt)^{\frac{l}{2}}+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t} E|b_2(s,u,x_s)-$$

$$-b_2(s,u,y_s)|^2dsdt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t} E|b_3(s,u,x_s)-b_3(s,u,y_s)|^2dsdt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t}\int\limits_{Z_1} E|b_4(s,u,x_s,z_1)-b_4(s,u,y_s,z_1)|^2\times$$

$$\times\Pi_1(dz_1)dsdt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2} E|c_1(t,u,x_t,z_2)-c_1(t,u,y_t,z_2)|^2\times$$

$$\times\Pi_2(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+(\int\limits_0^{\widetilde{t}} t\int\limits_{Z_2}\int\limits_0^{t} E|c_2(s,u,x_s,z_2)-$$

$$-c_2(s,u,y_s,z_2)|^2ds\Pi_2(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2}\int\limits_0^{t} E|c_3(s,u,x_s,z_2)-c_3(s,u,y_s,z_2)|^2ds\Pi_2\times$$

$$\times(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2}\int\limits_0^{t}\int\limits_{Z_1} E|c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)-$$

$$-c_4(s,u,y_s,z_1,z_2)|^2ds\Pi_1(dz_1)dt\Pi_2(dz_2))^{\frac{l}{2}})\leq$$

$$\leq K_3(\int\limits_0^{\widetilde{t}} E\|x-y\|^l dt.+\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^l dsdt+$$

$$+\int\limits_0^{\widetilde{t}}(\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^2ds)^{\frac{l}{2}}dt+\int\limits_0^{\widetilde{t}}(\int\limits_0^{t}\int\limits_{Z_1} E\|x-y\|^2\times$$

$$\times\Pi_1(dz_1)ds)^{\frac{l}{2}}dt+(\int\limits_0^{\widetilde{t}} E\|x-y\|^2dt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^2dsdt)^{\frac{l}{2}}+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^2dsdt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_0^{t}\int\limits_{Z_1} E\|x-y\|^2\Pi_1(dz_1)dsdt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2} E\|x-y\|^2\Pi_2(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2}\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^2ds\Pi_2(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int\limits_0^{\widetilde{t}}\int\limits_{Z_2}\int\limits_0^{t} E\|x-y\|^2ds\Pi_2(dz_2)dt)^{\frac{l}{2}}+$$

$$+(\int_0^{\widetilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t\int_{Z_1} E\|x-y\|^2 ds\Pi_1(dz_1)dt\Pi_2(dz_2))^{\frac{l}{2}}) \le$$

$$\le K_4\int_0^T E\|x-y\|^l dt + K_5(\int_0^T E\|x-y\|^2 dt)^{\frac{l}{2}},$$

де K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 - обмеженні константи, залежні тільки від l, ρ.

Тобто, отримали нерівність

$$E|R(\widetilde{t},,x) - R(\widetilde{t},y)|^l \le K_4\int_0^T E\|x-y\|^l dt+$$

$$+K_5(\int_0^T E\|x-y\|^2 dt)^{\frac{l}{2}},$$

або

$$E\sup_{0\le\widetilde{t}\le T}|R(\widetilde{t},,x)-R(\widetilde{t},y)|^l \le K_4\int_0^T E\|x-y\|^l dt+$$

$$+K_5(\int_0^T E\|x-y\|^2 dt)^{\frac{l}{2}}.$$

Лема 1 доведена.

Продовжимо доведення існування розв'язку рівняння (1). Для цього розглянемо різницю

$$E\sup_{0\le t\le T}|x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l =$$

$$= E\sup_{0\le t\le T}|\Phi(t,x_t^{n-1}) + x(0) - \Phi(0,x_0^{n-1})+$$

$$+R(t,x^{n-1}) - \Phi(t,x_t^{n-2}) + x(0) - \Phi(0,x_0^{n-2})+$$

$$+R(t,x^{n-2})|^l = E\sup_{0\le t\le T}|\Phi(t,x_t^{n-1})+$$

$$+R(t,x^{n-1}) - \Phi(t,x_t^{n-2}) - R(t,x^{n-2})|^l \le$$

$$\le K_6 E\sup_{0\le t\le T}|R(t,x^{n-1}) - R(t,x^{n-2})|+$$

$$+K_6 E\sup_{0\le t\le T}|\Phi(t,x_t^{n-1}) - \Phi(t,x^{n-2})|. \quad (13)$$

Оцінимо другий доданок нерівності (13):

$$E\sup_{0\le t\le T}|\Phi(t,x_t^{n-1}) - \Phi(t,x_t^{n-2})|^l \le$$

$$\le LE\sup_{0\le t\le T}\|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^l \le$$

$$\le L\int_0^T E\|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^l dt.$$

Отже, нерівність (13) можна переписати у вигляді

$$E\sup_{0\le t\le T}|x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l \le K_7\int_0^T E\|x_t^{n-1}-$$

$$-x_t^{n-2}\|^l dt+K_5(\int_0^T E\|x_t^{n-1}-x_t^{n-2}\|^2 dt)^{\frac{l}{2}}. \quad (14)$$

Для подальшого доведення нам буде потрібна оцінка

$$E\sup_{0\le t\le T}|x^1(t) - x^0(t)|^l \le$$

$$= E\sup_{0\le t\le T}|\Phi(t,x_t^0)+x(0)-\Phi(0,x_0^0)+R(t,x^0)-x_t^0|^l =$$

$$= E\sup_{0\le t\le T}|R(t,x^0)|^l \le L(1+\|x^0\|) = K_8.$$

Для $n=2$ отримаємо оцінку

$$E\sup_{0\le t\le T}|x^2(t)-x^1(t)|^l \le K_7\int_0^T E\|x_t^1-x_t^0\|^l dt+$$

$$+K_5(\int_0^T E\|x_t^1 - x_t^0\|^2 dt)^{\frac{l}{2}} \le K(T+T^{\frac{l}{2}}). \quad (15)$$

Загальний вигляд оцінки (15) має вигляд

$$E\sup_{0\le t\le T}|x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l \le K(T+T^{\frac{l}{2}})^{n-1}.$$

Розглянемо випадок, коли $T+T^{\frac{l}{2}} = q < 1$ та x^n зображається у вигляді суми

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^n (x^k(t) - x^{k-1}(t)) + x^0(t). \quad (16)$$

Доведемо, що границя x^n є розв'язком рівняння (1). Для цього потрібно показати збіжність суми в правій частині рівності

(16). Використовуючи нерівність Чебишова, отримуємо

$$P\{\sup_{0\le t\le T}|x^n(t)-x^{n-1}(t)|^l<\frac{1}{n^2}\}\le$$

$$\le E\sup_{0\le t\le T}|x^n(t)-x^{n-1}(t)|^l n^{2l}\le Kn^{2l}(T+T^{\frac{l}{2}}).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}Kn^{2l}(T+T^{\frac{l}{2}})^{n-1}. \qquad (17)$$

Він є збіжним тоді, коли $T+T^{\frac{l}{2}}=q<1$. Тому за лемою Бореля – Кантеллі отримуємо факт, що існує рівномірна збіжність майже напевно на $[0,T]$ суми $x^n(t)=\sum_{k=1}^{n}(x^k(t)-x^{k-1}(t))+x^0(t)$. Тому границя $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$ існує на $[0,T]$ з простору Скорохода $S_{[0,T]}$.

Покажемо, що $\{x(t),0\le t\le T\}$ – розв'язок рівняння (1). Для цього використаємо представлення (7). Перейшовши в (7) до границі, отримаємо

$$x(t)=\Phi(t,x_t)+x(0)-\Phi(0,x_0)+R(t,x)$$

тобто отримали рівняння (1).

Таким чином, доведено існування розв'язку (1) для $t\in[0,T]$ при умові, що $T+T^{\frac{l}{2}}=q<1$.

Нехай $T+T^{\frac{l}{2}}\ge1$. Тоді на відрізку $[0,T]$ вибираємо точку t_1 таку, що $t_1+t_1^{\frac{l}{2}}<1$. Далі, використовуємо пророблені кроки для доведення існування розв'язку на відрізку $[0,t_1]$. Вибираючи точки t_2,..., t_k, таким чином, що $(t_{i+1}-t_i)+(t_{i+1}-t_i)^{\frac{l}{2}}=q<1,\ i=1,...,k$, доводимо існування розв'язку на відрізку $[0,T]$.

Доведення єдиності.

Проведемо доведення єдиності розв'язку від супротивного. Припустимо, що є два розв'язки задачі (1), (2) $x(t)$ та $y(t)$. Тоді згідно з (11) отримаємо оцінку

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)-y(t)|^l\le K_7\int\limits_0^T E\|x_t-y_t\|^l dt+$$

$$+K_5(\int\limits_0^T E\|x_t-y_t\|^2dt)^{\frac{l}{2}}\le$$

$$\le K_8(T,L,\rho,l)E\sup_{0\le t\le T}|x(t)-y(t)|^l.$$

Припустимо, що $K_8(T,L,\rho,l)<1$. Тоді можна зробити висновок про те, що

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)-y(t)|^l=0$$

на відрізку $[0,T]$, що і потрібно довести для єдиності розв'язку рівняння (1).

Справді, оскільки

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l\le K_8E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l,$$

то

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l\le K_8^mE\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l,\ m\ge1.$$

А це, якщо перейти в останній нерівності до границі, дає необхідне співвідношення

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l\le\lim_{m\to\infty}K_8^mE\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^l=0.$$

Припустимо, що $K_8(T,L,\rho,l)\ge1$. Тоді знову вибираємо на відрізку $[0,T]$ точку t_1, таку що $K_8(t_1,L,\rho,l)<1$, тобто отримуємо єдиність розв'язку на відрізку $[0,t_1]$. Далі пророблюючи цю процедуру, отримуємо єдиність розв'язку на відрізку $[0,T]$.

Зауважимо, що у тому випадку, коли ми покроково доводимо існування чи єдиність, тобто доводимо дані властивості на відрізках $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, ..., $[t_{n-1},T]$, потрібно змінювати початкову задачу. А саме, для відрізка $[t_1,t_2]$ будемо мати наступну задачу Коші:

$$dD(t,x_t)=[a_1(t,u,x_t)+\int\limits_0^t a_2(s,u,x_s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t a_3(s,u,x_s)dW_1(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{Z_1}a_4(s,u,x_s,z_1)\widetilde{\nu_1}(ds,dz_1)]dt+$$

$$+[b_1(t,u,x_t)+\int\limits_0^t b_2(s,u,x_s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t b_3(s,u,x_s)dW_1(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{Z_1} b_4(s,u,x_s,z_1)\widetilde{v}_1(ds,dz_1)]dW_2(t)+$$

$$+\int\limits_{Z_2}[c_1(t,u,x_t,z_2)+\int\limits_0^t c_2(s,u,x_s,z_2)ds+$$

$$+\int\limits_0^t c_3(s,u,x_s,z_2)dW_1(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{Z_1} c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)\widetilde{v}_1(ds,dz_1)]\widetilde{v_2}(dt,dz_2)$$

за початковою умовою

$$x(t)=\varphi(t),\ \ t\in[-h,t_1],$$

Отже, для k-го кроку, а саме на відрізку $[t_{k-1},t_k]$, будемо мати наступну початкову умову

$$x(t)=\varphi(t),\ \ t\in[-h,t_{k-1}].$$

Теорема 1 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.

3. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4. *Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части. – Укр. мат. журн., 1985, 37, № 1. – С. 13-20.

5. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стохастичні динамічні системи зі скінченною післядією. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 560 с.

6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 420 с.