УДК 512.53

©2008 р. М. І. Сумарюк

Київський національний університет ім. Т. Шевченка

ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬ ВІЛЬНІ НАПІВГРУПИ

Наводяться нові достатні умови аналітичного характеру при виконанні яких напівгрупа, породжена певними диференційовними відображеннями, є вільною напівгрупою. Ілюструється застосування цих умов до напівгрупи Коена-Уайта.

We give new analytical type sufficient conditions under which the semigroup generated by certain differentiable functions becomes free. Besides, we apply these conditions to Cohen-White's semigroup.

Вступ. У теорії вільних конструкцій груп та напівгруп важливим напрямком досліджень є побудова конкретних зображень таких вільних конструкцій за допомогою різноманітних алгебро-комбінаторних або геометричних об'єктів. Найчастіше будуються приклади вільних 2-породжених груп (напівгруп), тобто будується зображення вільної групи (напівгрупи) рангу 2, бо добре відомо, що така група (напівгрупа) містить ізоморфну копію будь-якої вільної групи (напівгрупи) скінченного або зліченного рангу.

Серед всіх зображень вільних алгебраїчних конструкцій виділяються зображення елементарними функціями над полями нульової характеристики відносно дії суперпозиції функцій.

Зазначимо, наприклад, що у роботах Коена [1] та Уайта [2] доводиться, що перетворення дійсного або комплексного поля $f_1 : x \to x+1$ та $f_2 : x \to x^q$, де $q > 1$ – фіксоване непарне натуральне число у випадку поля $\mathbb{R}$ і довільне натуральне число у випадку поля $\mathbb{C}$, породжують вільну групу (напівгрупу).

У даній роботі наводяться нові достатні умови вільності напівгруп рангу 2, що породжуються певними функціями комплексної змінної. Умови теореми зазвичай легко перевіряються, що дозволяє будувати нові зображення вільних напівгруп рангу 2 за допомогою вибору конкретних функцій. Як застосування даної теореми ми наводимо пряме доведення вільності напівгрупи Коена-Уайта. Те, що ця напівгрупа вільна випливає як наслідок з теореми цих авторів про вільність відповідної 2-породженої групи перетворень. Але доведення Коена-Уайта технічно дуже складне, а наше доведення є ідейно значно простішим і коротшим.

1. Допоміжні відомості. Нехай функція $f : D \to D$ – задана та диференційовна в області D комплексної площини $\mathbb{C}$ і така, що існує точка z_0, яка є нерухомою точкою для даної функції, тобто є розв'язком рівняння $f(z) = z$. Символом $f^{(n)}$ позначатимемо n-кратну суперпозицію функції f, тобто

$$f^{(n)}(z) \stackrel{def}{\equiv} (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n})(z), z \in D,$$

де $\circ$ – операція суперпозиції функцій, а її похідну записуватимемо так: $D_z f(z)$, де D_z – оператор диференціювання по змінній $z \in D$. Зазначимо, що точка $z_0 \in D$ є нерухомою точкою для будь-якої суперпозиції $f^{(n)}(z), z \in D$.

Має місце таке твердження.

Лема. *Похідна функції $f^{(n)}(z)$, $z \in D$, $n \in \mathbb{N}$, у нерухомій точці $z_0 \in D$ обчислюється за формулою*

$$D_z f^{(n)}(z_0) = (D_z f(z_0))^n, n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Співвідношення (1) можемо отримати за допомогою правила диференціювання суперпозиції декількох функцій та врахувавши те, що точка $z_0 \in D$ є нерухомою точкою для функції $f(z), z \in D$.

2. Основна теорема. Сформулюємо достатні умови вільності напівгрупи, що породжується двома функціями $f, g : D \to D$ у такому вигляді.

Теорема 1. *Нехай $f, g : D \to D$ – функції, визначені та диференційовні у деякій області D комплексної площини $\mathbb{C}$, які задовольняють наступні вимоги:*

1) дані функції є оборотними;

2) моногенні напівгрупи, породжені даними функціями, є нескінченними і не мають спільних елементів;

3) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(-\varepsilon; \varepsilon) \subset D$;

4) функції $f(x), g(x)$, $x \in D \cap [0; +\infty)$, є строго зростаючими;

5) похідна $D_x g^{(n)}(x)$ є додатною для довільного $x \in D \cap [0; +\infty)$ та натурального числа n, причому $g(0) > 0$;

6) $f(0) = 0$ і $D_z f(0) = 0$;

7) похідна $D_x f^{(n)}(x)$ є додатною для довільного $x \in D \cap (0; +\infty)$ та натурального числа n.

Тоді напівгрупа S, породжена даними функціями, є вільною напівгрупою рангу 2 з базою

$$\Phi = \{f(z), g(z), z \in D\}.$$

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$ – алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(x_1, x_2)$ та $v \equiv v(x_1, x_2)$ над алфавітом X, які є формальними записами виду

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} ... y_l^{\alpha_l}, y_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, l}. \tag{2}$$

Вважатимемо, що запис (2) є нескоротним або незвідним, тобто у наборі символів $y_1, y_2, ..., y_l$ поряд не стоять однакові елементи з алфавіту X.

Нехай $u(f, g), v(f, g)$ – значення напівгрупових слів u та v на функціях f та g напівгрупи S відносно операції суперпозиції функцій. Зважаючи на умову 2 одержуємо, що записи $u(f, g)$, $v(f, g)$ над множиною функцій $\{f, g\}$ є нескоротними.

Отже, для доведення сформульованої теореми слід показати, що із умови нерівності записів $u(f, g)$, $v(f, g)$ у розумінні графічного порівняння, тобто якщо ці записи не ідентичні над множиною літер $\{f, g\}$, то $u(f, g) \neq v(f, g)$ у розумінні порівняння функцій.

Далі, оскільки f, g є оборотними (умова 1), то S – напівгрупа із скороченням. Це означає, що з умови виконання рівності $h \circ \varphi = h \circ \psi$ або $\varphi \circ h = \psi \circ h$ випливає рівність $\varphi = \psi$ $(h, \varphi, \psi \in S)$. Тому вважатимемо, що записи $u(f, g)$, $v(f, g)$ над множиною літер $\{f, g\}$ починаються і закінчуються різними літерами, бо інакше, якщо слова u та v мають спільні початки або спільні закінчення, то із виконання рівності $u(f, g) = v(f, g)$ можемо отримати еквівалентну рівність, скориставшись властивістю скорочення перших та останніх однакових літер. Нехай для визначеності запис $u(f, g)$ закінчується літерою f, а запис $v(f, g)$ відповідно закінчується літерою g. Тоді

$$u(f, g) = \tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)}, v(f, g) = \tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)},$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, запис $\tilde{u}(f, g)$ або закінчується літерою g або є порожнім; аналогічно запис $\tilde{v}(f, g)$ закінчується літерою f або є порожнім.

Припустимо, далі, що має місце тотожність

$$(\tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)})(z) \equiv (\tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)})(z), z \in D,$$

звідки випливає, що

$$(\tilde{u}(f, g) \circ f^{(\alpha)})(x) \equiv (\tilde{v}(f, g) \circ g^{(\beta)})(x), \tag{3}$$

де $x \in D \cap \mathbb{R}$.

Тепер знайдемо похідну правої та лівої частини тотожності (3) у точці $x = 0$. Отже, маємо:

$$\begin{gathered} D_x \tilde{u}(f, g)(0) D_x f^{(\alpha)}(0) = \\ = D_x(\tilde{v}(f, g)(g^{(\beta)}(0))) D_x g^{(\beta)}(0). \end{gathered} \tag{4}$$

Проаналізуємо одержану рівність. Точка $x = 0$ є нерухомою точкою для функції

$f(z), z \in D$, а тому згідно з наведеною раніше лемою похідна

$$D_x f^{(\alpha)}(0) = (D_x f(0))^{\alpha} = 0.$$

Таким чином, ліва частина рівності (4) перетворюється в нуль.

Оскільки за умовою 4 функція $g(x), x \in \in D \cap [0; +\infty)$, є зростаючою і виконується нерівність $g(0) > 0$, то $g^{(\beta)}(0) > 0, \beta \in \mathbb{N}$. Тоді, використовуючи правило диференціювання складеної функції дістанемо, що число

$$D_x(\tilde{v}(f,g)(g^{(\beta)}(0)))$$

подається як добуток чисел виду $D_x f^{(n)}(x)$, $D_x g^{(m)}(x)$, $x \in D \cap (0; +\infty)$, $n, m \in \mathbb{N}$, які згідно з умовами 5 та 7 є додатними.

Отже, права частина рівності (4) є додатною, а це приводить до суперечності.

Таким чином, припущення щодо виконання тотожності (3) є невірним. Цим самим отримуємо те, що й потрібно було довести. У результаті напівгрупа S, породжена множиною функцій Φ, є вільною напівгрупою рангу 2.$\square$

3. Застосування. Розглянемо перетворення дійсного або комплексного поля $g(z) = z+1$ та $f(z) = z^q$, де $q > 1$ – фіксоване непарне натуральне число у випадку поля $\mathbb{R}$ і довільне натуральне число у випадку поля $\mathbb{C}$. Нехай S – напівгрупа, що породжується цими перетвореннями. Ця напівгрупа досліджувалася у роботі С. Уайта [2] та в роботі С.Д. Коена [1], як окремий наслідок. Перетворення f, g мають обернені (у випадку поля $\mathbb{C}$ серед них є багатозначні функції), а тому можна розглядати групу $G =< f, g >$, породжену функціями $\{f, g\}$ та напівгрупу $S =<< f, g >>$, породжену цими функціями. Очевидно, G є групою часток напівгрупи S. Група G також досліджувалася у роботі С. Уайта [2] та, як окремий випадок, в роботі С.Д. Коена [1]. Було встановлено, що ця група є вільною з вільною базою $\{f, g\}$. Звідси, зокрема, випливає, що S – вільна напівгрупа з базою $\{f, g\}$. Ми дістанемо це твердження, застосовуючи до пари перетворень f, g доведену вище теорему 1. А саме, доведемо таке твердження.

Теорема 2. *Напівгрупа $S =<< f, g >>$, де функції f, g визначені вище, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно бази $\Phi = \{f, g\}$.*

Доведення. Перевіримо виконання умов 1-7 теореми 1.

1) Функції f, g є оборотними за визначенням.

2) Моногенні напівгрупи

$$< f >= \left\{ z^{q^n}, \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$< g >= \{ z + m \mid m \in \mathbb{N} \},$$

є нескінченними і не мають спільних елементів.

3) Ця умова є тривіальною, оскільки область визначення функцій f, g дорівнює $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

4) Функції $g(x) = x + 1, f(x) = x^q$, $x \in \in (0; +\infty)$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, є строго зростаючими, бо похідні

$$D_x g(x) = 1, D_x f(x) = q x^{q-1},$$

є додатними на всьому інтервалі $(0; +\infty)$.

5) Для довільного $x \in [0; +\infty)$ та натурального числа n похідна

$$D_x g^{(n)}(x) = D_x(x + n) = 1$$

є додатною, крім того, $g(0) = 1$, тобто відповідна умова теореми виконується.

6) Ця умова отримується безпосередньо.

7) Для довільного $x \in (0; +\infty)$ та натурального числа n маємо, що похідна

$$D_x f^{(n)}(x) = q^n x^{q^n - 1}$$

є додатною.

Таким чином, всі умови теореми 1 виконуються, а тому напівгрупа S Коена-Уайта є вільною напівгрупою рангу 2 відносно бази Φ. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Курош А.Г.* Теория групп. - М.: Наука, 1967. - 648 с.

2. *Cohen S.D.* The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J.Math. Oxford. - 1995. - **46**, №2. - P. 21-93.

3. *White S.* The group, generated by $f_1\colon x \to x+1$ and $f_2\colon x \to x^q$ is free // Journal of Algebra. - 1988. - **118**. - P. 408-422.