УДК 517.988.523

©2008 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ТЕОРЕМА ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ c-ЦІЛКОМ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ОБМЕЖЕНИХ НА ЗЛІЧЕННІЙ ГРУПІ ФУНКЦІЙ

Наведено теорему про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів, що діють у просторі $l_p(G,E)$, $1 \le p \le \infty$. Тут E – банахів простір і G – злічення група.

A fixed point theorem for a c-completely continuous operators in the space $l_p(G,E)$, $1 \le p \le \infty$, is obtained. Here E is a Banach space and G is a countable group.

1. c-Неперервні і c-цілком неперервні оператори.

Нехай E – довільний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_E$ і G – злічення група. Позначимо через $l_p = l_p(G,E)$ банахів простір усіх відображень $x : G \longrightarrow E$, для кожного з яких $\sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_E < \infty$, якщо $p=\infty$, і $\sum\limits_{g\in G}\|x(g)\|_E^p < \infty$, якщо $p \in [1,\infty)$, з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \\ = \begin{cases} \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_E, & \text{якщо } p=\infty, \\ \left(\sum\limits_{g\in G}\|x(g)\|_E^p\right)^{1/p}, & \text{якщо } p\in[1,\infty). \end{cases}$$

Для множини $M \subset G$ визначимо оператор $I_M : l_p \longrightarrow l_p$ рівністю

$$(I_M x)(g) = \begin{cases} x(g), & \text{якщо } g \in M, \\ 0, & \text{якщо } g \in G\setminus M, \end{cases}$$

де $x \in l_p$.

Позначимо через $\mathfrak{G}$ сім'ю множин M_ν ($\nu \in \mathbb{N}$), кожна з яких містить скінченне число елементів групи G, $M_\nu \subset M_{\nu+1}$ для всіх $\nu \in \mathbb{N}$ і $\bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} M_\nu = G$.

Говоритимемо, що послідовність $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до елемента $x \in l_p$ при $k\to\infty$, і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{loc.,\ l_p} x \text{ при } k\to\infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty}\|I_M(x_k - x)\|_{l_p} = 0$$

для кожної множини $M \in \mathfrak{G}$.

Оператор $F : l_p \longrightarrow l_p$ називатимемо *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_p$ і послідовності $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \xrightarrow{loc.,\ l_p} x$ при $k\to\infty$, випливає, що $Fx_k \xrightarrow{loc.,\ l_p} Fx$ при $k\to\infty$.

c-Неперервний оператор $F : l_p \longrightarrow l_p$ називатимемо *c-цілком неперервним*, якщо для кожного $M \in \mathfrak{G}$ оператор $I_M F$ цілком неперервний.

Поняття c-неперервного і c-цілком неперервного операторів увів до розгляду (на мові "ε, δ") Е. Мухамадієв [1,2]; його вивчення було продовжено в роботах [3]–[10] та ін. Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, запропонував автор (див., наприклад, [11]–[13]).

Очевидно, що у випадку скінченновимірного банахового простору E c-неперервний оператор $F : l_p \longrightarrow l_p$ є c-цілком неперервним.

Зауважимо, що c-неперервний оператор може не бути неперервним [13].

2. Множини $cl_{l_p} S$ і $cl_{l_p}^{loc} S$.

Для множини $S \subset l_p$ позначимо через $cl_{l_p}^{loc} S$ множину всіх таких елементів x простору l_p, для кожного з яких існує послідовність $x_k \in S$, $k \ge 1$, що $x_k \xrightarrow{loc.,\ l_p} x$ при

$k \to \infty$. Замикання множини S у просторі l_p позначимо через $cl_{l_p}S$.

Зауважимо, що $cl_{l_p}S \subset cl_{l_p}^{loc}S$ *для кожного простору* l_p, $1 \le p \le \infty$, *і множини* $cl_{l_p}^{loc}S$ *і* $cl_{l_p}S$ *можуть не збігатися* [13].

3. Основні задача і теорема.

Нагадаємо, що множина A в просторі l_p називається *опуклою*, якщо для довільних векторів $x \in A$, $y \in A$ і чисел $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$ $(\lambda + \mu = 1)$ вектор $\lambda x + \mu y$ є елементом цієї множини. *Опуклою оболонкою множини* A називається множина

$$\mathrm{co}\, A = \bigcup_{x,y\in A} \{\lambda x+\mu y : \lambda \ge 0, \mu \ge 0, \lambda+\mu = 1\}.$$

Замкненою опуклою оболонкою множини A називається замикання її опуклої оболонки, тобто множина cl_{l_p} co A.

Важливою є

Теорема 1 (Шаудер [14], [15]). *Якщо* Ω – *замнена опукла обмежена підмножина банахового простору* X *і* $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ – *цілком неперервний оператор, то тоді* F *має нерухому точку.*

Метою цієї статті є встановлення аналогічного твердження для c-цілком неперервних операторів, що діють у просторі l_p.

Справедлива

Теорема 2. *Нехай*:

1) $\mathcal{V}$ – *обмежена опукла підмножина банахового простору* l_p $(1 \le p \le +\infty)$;

2) $cl_{l_p}^{loc}\mathcal{V} = \mathcal{V}$;

3) $\mathfrak{N} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ – *c-цілком неперервний оператор.*

Тоді існує хоча б одна точка $x \in \mathcal{V}$, *така, що*

$$\mathfrak{N}x = x.$$

Доведення цього твердження суттєво використовує теорему 1 та властивості локально передкомпактних обмежених підмножин простору l_p.

4. Лема про локально збіжну послідовність.

Лема 1. *Для кожної обмеженої послідовності* $(x_k)_{k\ge1}$ *елементів простору* l_p, *для якої множина* $cl_{l_p}\{I_M x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *компактна для всіх* $M \in \mathfrak{G}$, *існують такі підпослідовність* $(x_{k_l})_{l\ge1}$ *і елемент* $x \in l_p$, *що*

$$x_{k_l} \xrightarrow{loc.,\ l_p} x \text{ *при* } l \to \infty$$

і

$$\|x\|_{l_p} \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_{l_p}.$$

Доведення. Завдяки зліченності групи G елементи цієї групи можна пронумерувати і подати її у вигляді

$$G = \{g_1, g_2, \ldots\}.$$

Оскільки множини $\{x_k(g_n) : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, передкомпактні, то існують послідовності

$$x_{k_{11}}(g_1), x_{k_{12}}(g_1), \ldots, x_{k_{1m}}(g_1), \ldots,$$

$$x_{k_{21}}(g_2), x_{k_{22}}(g_2), \ldots, x_{k_{2m}}(g_2), \ldots,$$

$$\vdots$$

$$x_{k_{n1}}(g_n), x_{k_{n2}}(g_n), \ldots, x_{k_{nm}}(g_n), \ldots,$$

$$\vdots,$$

що задовольняють умови:

1) послідовність $(x_{k1l}(g_1))_{l\ge1}$ є підпослідовністю послідовності $(x_k(g_1))_{k\ge1}$;

2) для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(x_{kn+1l}(g_n))_{l\ge1}$ є підпослідовністю послідовності $(x_{kl}(g_n))_{l\ge1}$;

3) для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(x_{knl}(g_n))_{l\ge1}$ збіжна в банаховому просторі E.

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує елемент a_n, що є границею послідовності $(x_{k_{nl}}(g_n))_{l\ge1}$, тобто

$$\lim_{l\to\infty} x_{k_{nl}}(g_n) = a_n. \tag{1}$$

Очевидно, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_E \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_{l_p}.$$

Розглянемо елемент $a = a(g)$ простору l_p, що визначається рівностями

$$a(g_n) = a_n,\ n \in \mathbb{N},$$

і обмежену послідовність

$$x_{k_{11}}(g), x_{k_{22}}(g), \ldots, x_{k_{nn}}(g), \ldots$$

елементів простору l_p.

Завдяки (1)

$$\lim_{n\to\infty} \|I_M(x_{k_{nn}} - a)\|_{l_p} = 0 \tag{2}$$

для кожної множини $M \in \mathfrak{G}$. Звідси та з обмеженості послідовності $(x_{k_{nn}})_{n\geq 1}$ в l_p випливає, що $a \in l_p$ і

$$\|a\|_{l_p} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_{k_{nn}}\|_{l_p}.$$

Співвідношення (2) означає, що

$$x_{k_{nn}} \xrightarrow{loc.,\ l_p} a \text{ при } n \to \infty.$$

Лему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2.

Кожному елементу $M_k \in \mathfrak{G}$ співставимо оператор I_{M_k}, що визначається аналогічно, як і оператор I_M. З умов теореми випливає, що $I_{M_K} l_p$ – підпростір простору l_p, $I_{M_k}\mathcal{V}$ – обмежена замкнена опукла підмножина простору l_p і оператор $I_{M_k}\mathfrak{N}$ цілком неперервний на $\mathcal{V}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тому множини $I_{M_k}\mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, є компактними. Отже, за критерієм компактності Гаусдорфа [15] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існують елементи $x_{1,k} \in \mathcal{V}, \ldots, x_{\nu(k),k} \in \mathcal{V}$ такі, що множина $\left\{I_{M_k}x_{1,k}, \ldots, I_{M_k}x_{\nu(k),k}\right\}$ буде скінченною $\dfrac{1}{2k}$-сіткою множини $I_{M_k}\mathcal{V}$, тобто для будь-якої точки $x \in I_{M_k}\mathcal{V}$ існує хоча б одна точка $a \in \left\{I_{M_k}x_{1,k}, \ldots, I_{M_k}x_{\nu(k),k}\right\}$, для якої

$$\|x - a\|_{l_p} \leq \frac{1}{2k}.$$

Покриємо множину $I_{M_k}\mathcal{V}$ відкритими кулями $S_{1,k},\ldots,S_{\nu(k),k}$ радіуса $\dfrac{1}{k}$ із центрами відповідно в точках $I_{M_k}x_{1,k}, \ldots, I_{M_k}x_{\nu(k),k}$.

Нехай неперервні функції

$$\psi_{1,k}(x), \ldots, \psi_{\nu(k),k}(x)$$

утворюють розбиття одиниці на множині $I_{M_k}\mathcal{V}$ [14,16], узгоджені з покриттям $I_{M_k}\mathcal{V}$ кулями $S_{1,k},\ldots,S_{\nu(k),k}$, тобто

$$\psi_{i,k}(x) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\nu(k)} \psi_{i,k}(x) = 1 \text{ для } x \in I_{M_k}\mathcal{V}$$

і

$$\psi_{i,k}(x) = 0 \text{ для } x \in I_{M_k}\mathcal{V} \setminus S_{i,k}.$$

Визначимо рівністю

$$\mathfrak{N}_k x = \sum_{i=1}^{\nu(k)} \psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x) x_{i,k}$$

неперервний оператор $\mathfrak{N}_k : \mathcal{V} \longrightarrow l_p$. Очевидно, що для всіх $x \in \mathcal{V}$

$$\mathfrak{N}_k x \in \mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}, \tag{3}$$

і

$$\|I_{M_k}\mathfrak{N}_k x - I_{M_k}\mathfrak{N}x\|_{l_p} =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{\nu(k)} \psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x)[I_{M_k}x_{i,k} - I_{M_k}\mathfrak{N}x] \right\|_{l_p}.$$

Якщо

$$\psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x) > 0,$$

то

$$I_{M_k}\mathfrak{N}x \in S_{i,k}$$

і

$$\|I_{M_k}x_{i,k} - I_{M_k}\mathfrak{N}x\|_{l_p} < \frac{1}{k}.$$

Отже,

$$\|I_{M_k}\mathfrak{N}_k x - I_{M_k}\mathfrak{N}x\|_{l_p} < \frac{1}{k} \text{ для } x \in \mathcal{V}. \tag{4}$$

Оскільки множина $\left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}$ містить скінченне число елементів, то замкнена опукла оболонка цієї множини збігається з $\mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}$ і $\mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}$ є компактною множиною. Також на підставі (3) справджується співвідношення

$$\mathfrak{N}_k\ \mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\} \subset$$

$$\subset \mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}.$$

Тому за теоремою 1 оператор $\mathfrak{N}_k$ має нерухому точку $x_k^* \in \mathrm{co}\ \left\{x_{1,k}, \ldots, x_{\nu(k),k}\right\}$, тобто

$$\mathfrak{N}_k x_k^* = x_k^*. \tag{5}$$

Нехай $k \to \infty$. Завдяки першій і другій умовам теореми, співвідношенню

$$\operatorname{co}\left\{x_{1,k}, \dots, x_{\nu(k),k}\right\} \subset \mathcal{V}$$

та лемі 1 існують елемент $u \in \mathcal{V}$ і підпослідовність $(x^*_{k_m})_{m\ge 1}$ послідовності $(x^*_k)_{k\ge 1}$, для яких

$$x^*_{k_m} \xrightarrow{loc.,\ l_p} u \text{ при } m \to \infty. \tag{6}$$

Оскільки для кожного $g \in G$

$$\begin{gathered}\|u(g) - (\mathfrak{N}u)(g)\|_E \le \\ \le \|u(g) - x^*_{k_m}(g)\|_E + \\ + \|x^*_{k_m}(g) - (\mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g)\|_E + \\ + \|(\mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g) - (I_{M_{k_m}} \mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g)\|_E + \\ + \|(I_{M_{k_m}} \mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g) - (I_{M_{k_m}} \mathfrak{N} x^*_{k_m})(g)\|_E + \\ + \|(I_{M_{k_m}} \mathfrak{N} x^*_{k_m})(g) - (\mathfrak{N} x^*_{k_m})(g)\|_E + \\ + \|(\mathfrak{N} x^*_{k_m})(g) - (\mathfrak{N}u)(g)\|_E\end{gathered}$$

і

$$\|u(g) - x^*_{k_m}(g)\|_E \to 0 \text{ при } m \to \infty$$

на підставі (6),

$$\|x^*_{k_m}(g) - (\mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g)\|_E = 0$$

на підставі (5),

$$\begin{gathered}\|(\mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g) - (I_{M_{k_m}} \mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g)\|_E = \\ = \|(I_{M_{k_m}} \mathfrak{N} x^*_{k_m})(g) - (\mathfrak{N} x^*_{k_m})(g)\|_E = 0\end{gathered}$$

для всіх $m \ge m_0$, де m_0 – таке натуральне число, що $g \in M_{m_0}$,

$$\|(I_{M_{k_m}} \mathfrak{N}_{k_m} x^*_{k_m})(g) - (I_{M_{k_m}} \mathfrak{N} x^*_{k_m})(g)\|_E < \frac{1}{k_m}$$

на підставі (4), та

$$\|(\mathfrak{N} x^*_{k_m})(g) - (\mathfrak{N}u)(g)\|_E \to 0 \text{ при } m \to \infty$$

на підставі (6) і третьої умови теореми, то

$$\mathfrak{N}u = u.$$

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що теорему 2 можна застосовувати для розв'язання задач про існування обмежених розв'язків нелінійних дискретних рівнянь (див. [13] у випадку $E = \mathbb{R}$ і $G = \mathbb{Z}$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.

2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443–460.

3. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483–501.

4. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Доклады АН УССР. Сер.А. – 1981. – № 8. – С. 34–37.

5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86–104.

6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.

7. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201–205.

8. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.

9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Киев. 1993. – 255 с.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Узагальнення теореми Мухамадієва про оборотність функціональних операторів у просторі обмежених функцій // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 398–412.

11. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – Душанбе. 1987. – С. 102–103.

12. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Математическая физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 15. – С. 32–35.

13. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Вид-во нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.

14. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 233 с.

15. *Люстерник А.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М: Наука, 1965. – 520 с.

16. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М: Наука, 1976. – 280 с.