УДК 517.928

©2008 р. І.Д. Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Побудовано формальний ров'язок рівняння $\varepsilon^2 \upsilon'' = x\upsilon + \varepsilon c(\varepsilon) + 3\varepsilon\alpha(\varepsilon)\int\limits_0^x \upsilon(t)dt$, використовуючи методику, запропоновану Р. Лангером[3].

Using Langer's methods, formal solution of the equation $\varepsilon^2 \upsilon'' = x\upsilon + \varepsilon c(\varepsilon) + 3\varepsilon\alpha(\varepsilon)\int\limits_0^x \upsilon(t)dt$ is constructed.

У праці А. М. Самойленка [1] розглянута система рівнянь вигляду

$$u' = A(x)u + A_1(x)\upsilon,$$

$$\varepsilon\upsilon' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))\upsilon + \varepsilon B_2(x)u,$$

де $u \in R^p, \upsilon \in R^2, A, A_1, B_1$ і B_2 - матриці, голоморфні по x в області $|x| \le \rho$, ε - малий параметр, $B(x)$ - матриця Ейрі[2]:

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудовано перетворення, що зводить систему до вигляду

$$\omega_1' = c_1(\varepsilon)\upsilon_1, \quad \omega_j' = 0, \quad j = \overline{2,p}, \qquad (1)$$

$$\varepsilon\upsilon' = B(x)\upsilon + \varepsilon D_1(\varepsilon)\omega, \qquad (2)$$

де $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ - двовимірний вектор,

$$D_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

В процесі побудови розв'язків системи (1), (2) одержується інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 \upsilon'' = x\upsilon + \varepsilon c(\varepsilon) + 3\varepsilon\alpha(\varepsilon)\int\limits_0^x \upsilon(t)dt, \qquad (3)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\upsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha(\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$ – задані функції. Загальний розв'язок цього рівняння побудовано в [1] у вигляді степеневого ряду.

У даній статті для рівняння (3) будується формальний розв'язок рівняння у вигляді розкладу по степенях малого параметра, використовуючи методику роботи [3].

Рівняння (3) за допомогою диференціювання зводиться до вигляду

$$\upsilon''' - \lambda^2 x\upsilon' - (\lambda^2 + 3\lambda\mu)\upsilon = 0, \qquad (4)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\upsilon \in \mathbb{R}$, $\lambda = \varepsilon^{-1}$ - великий параметр, $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda^{-1})$.

Як запропоновано в [3], для побудови формальних розв'язків для рівняння (4) будується відповідне допоміжне рівняння вигляду

$$\chi^3 - x\chi = 0, \qquad (5)$$

яке названо характеристичним.

Коренями рівняння (5) є $\chi_0 = 0$, $\chi_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $\chi_2 = -x^{\frac{1}{2}}$. Для кожного із коренів χ_j, заміна

$$\upsilon(x) = k\exp\{\lambda\int\chi dx\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n(x)}{\lambda^n}, \qquad (6)$$

де k - довільна стала, зводить рівняння (4) до вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(\lambda^2(3\chi^2 - x)\theta_n' + \lambda^2(3\chi\chi' - 1)\theta_n +$$

$$+\lambda(\chi''\theta_n + 3\chi'\theta_n' + 3\chi\theta_n'' - 3\mu\theta_n) + \theta_n'''\big)\lambda^{-n} = 0.$$

Враховуючи, що в лівій частині рівності розклад за степенями $\frac{1}{\lambda}$, її можна переписати наступним чином

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((3\chi^2-x)\theta_n'+(3\chi\chi'-1)\theta_n+$$
$$+(\chi''\theta_{n-1}+3\chi'\theta_{n-1}'+3\chi\theta_{n-1}''-3\mu\theta_{n-1})+$$
$$+\theta_{n-2}'''\big)\lambda^{-n}=0,$$

в розумінні, що кожне θ_n з від'ємним індексом дорівнює 0. Функція (6) буде формальним розв'язком диференціального рівняння (4), якщо коефіцієнти θ_n задовольнятимуть систему рівнянь

$$(3\chi^2-x)\theta_n'+(3\chi\chi'-1)\theta_n=$$
$$=-(\chi''\theta_{n-1}+3\chi'\theta_{n-1}'+3\chi\theta_{n-1}''-$$
$$-3\mu\theta_{n-1})-\theta_{n-2}''' \quad n=0,1,2,... \tag{7}$$

Для будь-якого розв'язку рівняння (4) можна знайти вигляд коефіцієнтів θ_n. Кожне з рівнянь системи (7) може бути розв'язане як лінійне диференціальне рівняння першого порядку по відношенню до θ_n[4].

Зокрема, при $\chi=\chi_0$, система (7) матиме вигляд

$$-x\theta_n'-\theta_n=3\mu\theta_{n-1}-\theta_{n-2}''' \quad n=0,1,2,...$$

При $n=0$, рівняння

$$x\theta_0'+\theta_0=0,$$

матиме розв'язок

$$\theta_0=Cx^{-1}.$$

При $n=1$, розв'язком рівняння

$$x\theta_1'+\theta_1=-3\mu Cx^{-1},$$

буде

$$\theta_1=-3\mu Cx^{-1}ln(x).$$

Далі, при $n=2$

$$\theta_2=2Cx^{-4}+\frac{9}{2}\mu^2Cx^{-1}ln^2(x),$$

тут C - довільна стала. Поклавши C=1 і продовжуючи цей процес можна отримати загальні формули для обчислення розв'язків системи (7):

$$\theta_{2m}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2(m-k)}K(2(m-k),k,j)\mu^{2(m-k)}x^{-3k-1}$$
$$\times ln^jx+K(2m,0,2m)\mu^{2m}x^{-1}ln^{2m}x, m=0,1,... \tag{8}$$

$$\theta_{2m+1}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2(m-k)+1}K(2(m-k)+1,k,j)\times$$
$$\times\mu^{2(m-k+1}x^{-3k-1}ln^jx+$$
$$+K(2m+1,0,2m+1)\mu^{2m+1}x^{-1}ln^{2m+1}x, m=0,1,...$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j)=$$

$$=\begin{cases} 0, & k=0, i\neq j,\\ \frac{(-3)^i}{i!}, & k=0, i=j\neq 0,\\ \frac{(-1)^i(3k)!}{3^{k-j}j!k!k^{i-j}}- & \\ -\sum\limits_{l=j}^{i-1}\frac{l!}{j!(3k)^{l-j+1}}\times & \\ \times\big(\sum\limits_{n=l}^{i}K(i,k-1,n)\frac{n!}{l!}\delta_k- & \\ -3K(i-1,k,l)\big), & \text{в інш. випадках.}\end{cases} \tag{9}$$

Тут

$$\delta_k=\begin{cases} 0, & n-l>3,\\ 1, & n-l=3,\\ 3(3k-1), & n-l=2,\\ 27k^2-18k+2, & n-l=1,\\ \frac{(3k)!}{(3k-3)!}, & n-l=0.\end{cases}$$

Якщо $\chi=\chi_{1,2}$, тобто $\chi=\pm x^{\frac{1}{2}}$, то система (7) матиме вигляд

$$2x\theta_n'+\frac{1}{2}\theta_n=\mp\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}(3x\theta_{n-1}''+\frac{3}{2}\theta_{n-1}'-\frac{1}{4}x^{-1}\theta_{n-1})+$$
$$+3\mu\theta_{n-1}-\theta_{n-2}'''.$$

Розв'язками такої системи будуть:

$$\theta_m=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-k}K(m-k,k,j)\mu^{m-k}x^{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{4}}ln^jx+$$
$$+K(m,0,m)\mu^mx^{-\frac{1}{4}}ln^mx \quad m=0,1,2,... \tag{10}$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j)=$$

$$
= \begin{cases} 0, & k<0, k=0, i\neq j,\\ \frac{(\frac{3}{2})^i}{i!}, & k=0, i=j\neq 0,\\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{l=j}^{i}\frac{l!(2)^{l-j+1}}{j!(3k)^{l-j+1}}\times & \\ \times\Big(\sum\limits_{n=l}^{i}K(i,k-1,n)\times & \\ \times\frac{n!}{l!}(\mp 3\delta_k^1 \mp \frac{3}{2}\delta_k^2 \pm \frac{1}{4}\delta_k^3)+ & \\ +3K(i-1,k,l)- & \\ -\delta_k^0 K(i,k-2,l)\Big)\Big), & \text{в інш. випадках.} \end{cases} \quad (11)
$$

де

$$
\delta_k^1 = \begin{cases} 0, & n-l>2,\\ 1, & n-l=2,\\ -\frac{3k+3}{2}, & n-l=1,\\ \frac{(6k-5)(6k-1)}{16}, & n-l=0. \end{cases}
$$

$$
\delta_k^2 = \begin{cases} 0, & n-l>1,\\ 1, & n-l=1,\\ -\frac{6k-5}{4}, & n-l=0. \end{cases}
$$

$$
\delta_k^3 = \begin{cases} 0, & n-l\neq 0,\\ 1, & n-l=0. \end{cases}
$$

$$
\delta_k^0 = \begin{cases} 0, & i-l>3,\\ 1, & i-l=3,\\ -\frac{18k-21}{4}, & i-l=2,\\ \frac{108k^2-252k+131}{16} & i-l=1,\\ -\frac{(6k-3)(6k-7)(6k-11)}{64}, & i-l=0. \end{cases}
$$

Таким чином, ми отримали формальні розв'язки для рівняння (4). Підставляючи знайдені розв'язки у відповідне для (3) однорідне рівняння, одержимо, що його задовольняють лише два з трьох знайдених вище розв'язків, а саме розв'язки при $\chi = \pm x^{\frac{1}{2}}$, що даються формулою (10) з коефіцієнтами (11).

Залишилося знайти частинний розв'язок рівняння (3). Його шукатимемо у вигляді

$$
v(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{2m-2k+1} C(m,k,i)x^{-3k-1}ln^i x. \quad (12)
$$

Підставимо (12) у рівняння (3) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях. Розв'язавши систему, що отримали в результаті підстановки, знайдемо вигляд коефіцієнтів

$$
C(m,k,i) =
$$

$$
= \begin{cases} \frac{(-1)^{i+1}(3\alpha\varepsilon)^i}{i!}\varepsilon c(\varepsilon), & k=0, m=0\\ 0, & k=0, m\neq 0\\ \frac{k\varepsilon^2}{k-\alpha\varepsilon}\big((-3k-5)\times & \\ \times(-3k-4)\times & \\ \times C(m,k-1,i)+ & \\ +(-6k+3)(i+1)\times & \\ \times C(m,k-1,i+1) & \\ +(i+2)(i+1)\times & \\ \times C(m,k-1,i+2)\big), & \text{в інш. випадках.} \end{cases} \quad (13)
$$

Формальний розв'язок рівняння (3) одержується у вигляді лінійної комбінації

$$
v = C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3,
$$

де v_1, v_2 даються формулами (6) в підстановці, замість χ, розв'язків рівняння (5) $\chi_{1,2} = \pm x^{\frac{1}{2}}$, а замість θ_n рівності (10) з коефіцієнтами (11), v_3 - частинний розв'язок рівняння (12) з коефіцієнтами (13), C_1, C_2, C_3 - довільні сталі.

Приклад. Покладемо в рівняння (3) $c(\varepsilon) = 0$ і $\alpha(\varepsilon) = 0$. Отримаємо рівняння

$$
\varepsilon^2 v'' = xv, \quad (14)
$$

відоме, як рівняння Ейрі [2]. Продиференціюємо обидві частини рівняння (12). Отримаємо рівняння

$$
\varepsilon^2 v''' = xv' + v, \quad (15)
$$

Випишемо розв'язки для цього рівняння, використовуючи формули (8) та (10). Одержимо

$$
v_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_m x^{-3m-1}}{\lambda^{2m}}, \quad k_m = \frac{(3m)!}{3^m m!}
$$

$$
v_2 = x^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{2}{3}\lambda x^{\frac{3}{2}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_m x^{-\frac{3}{2}m}}{\lambda^m},
$$

$$
k_m = \frac{1}{3m}[k_{m-1}(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} - \frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4}) - k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}]
$$

$$\upsilon_3 = x^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\lambda x^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-\frac{3}{2}m}}{\lambda^m},$$

$$k_m = -\frac{1}{3m}[k_{m-1}(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} -$$
$$-\frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4})+$$
$$+k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}]$$

Підставляючи отримані розв'язки у рівняння Ейрі, одержимо, що υ_2 і υ_3 перетворюють це рівняння у тотожість. Слід також зазначити, що розв'язки υ_2 і υ_3 збігаються із розв'язками рівняння Ейрі, наведеними В.Вазовим у [2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. матем. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1505 – 1516.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Мир, 1968. – 464 с.
3. *Langer R.E.* The solutions of the differential equation $\upsilon''' + \lambda^2 z\upsilon' + 3\mu\lambda^2\upsilon = 0$ // Duke Math. J. – 1955. – **22**. – P.525–542.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Наука, 1971. – 576 с.