УДК 517.9

©2008 р. Л. М. Сергєєва

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Проблема пошуку глобальних розв'язків для системи диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу розв'язується шляхом побудови системи рівнянь без відхилення аргументу з тими самими розв'язками.

The problem to find global solutions of the neutral type system differential equations with deviating argument is solved by construction of a system of equations without a deviating argument with the same solutions.

Диференціальні рівняння нейтрального типу описують процеси, швидкість яких в даний момент часу залежить від стану і швидкості в попередні моменти. Наприклад, при моделюванні контролерів руху твердого тіла в системах із зворотнім зв'язком, при передачі струму без втрат, при вивченні автоколивань в довгому контурі з тунельним діодом [4], в деяких задачах теорії керування [3] та ін.

У даній статті для системи диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу будується система рівнянь без відхилення аргументу, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками початкової системи. Розглянуто деякі часткові випадки, а також наведено обгрунтування запропонованого методу для однорідного диференціального рівняння нейтрального типу зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t+\lambda) +$$
$$+D(t)\frac{dx(t+\lambda)}{dt} + f(t),\ \lambda \in R/\{0\}. \qquad (1)$$

Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \qquad (2)$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Будемо припускати, що $t \in R$, $x \in R^n$; A, B, C, D – n-вимірні матричні, f, g – векторні функції, причому норми матриць A, B, C, D – обмежені. Такий підхід запропоновано в [1], [2].

Покажемо, що для матриці $C = C(t)$ і вектор-функції $g = g(t)$ існують рівняння вигляду:

$$C(t) = P(t, t+\lambda)[A(t) + B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C) +$$
$$+D(t)\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C))], \qquad (3)$$

$$g(t) = [\Phi(t,s) - P(t,t+\lambda)\Phi(t,s)]A(t) +$$
$$+[\Psi(t+\lambda, s) - P(t,t+\lambda)\Omega_t^{t+\lambda}(C)\Phi(t,s)]\times$$
$$\times B(t) + [\frac{d}{dt}\Psi(t+\lambda,s) - \frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C))\times$$
$$\times P(t,t+\lambda)\Phi(t,s)]D(t) + f(t), \qquad (4)$$

де $\Phi(t,s) = \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds, \Psi(t+\lambda,s) = = \int\limits_\tau^{t+\lambda} \Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds,\quad P(t,t+\lambda) = = (I - D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C))^{-1},\quad \| D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C) \| < 1$. Тут $\Omega_\tau^t(C)$ – фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка визначається за формулою $\Omega_\tau^t(C) = I + \int\limits_\tau^t C(s)ds + \int\limits_\tau^t C(s)\int\limits_\tau^s C(s_1)ds_1ds + ... + \int\limits_\tau^t C(s)\int\limits_\tau^s C(s_1)... \int\limits_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}...ds_1ds +$

..., де I – одинична матриця, $t\in R$, $\tau\in R$. Загальний розв'язок системи рівнянь (2), як відомо, визначається формулою Коші

$$x(t)=\Omega_\tau^t(C)x_0+\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds,\qquad(5)$$

де $t\in R$, $\tau\in R$, стала $x_0\in R^n$. Функція (5) задовольняє рівняння (1), коли

$$\frac{dx(t)}{dt}=C(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0+\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds]+$$

$$+g(t)=A(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0+\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds]+$$

$$+B(t)[\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)x_0+\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds]+D(t)\times$$

$$\times\frac{d}{dt}[\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)x_0+\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds]+f(t),\,(6)$$

Покладаючи в (6) $x_0=0$, отримуємо

$$C(t)\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds+g(t)=$$

$$=A(t)\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds+$$

$$+B(t)\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds+$$

$$+D(t)\frac{d}{dt}\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds+f(t),\ t\in R.\ (7)$$

Використовуючи (6) і (7), отримаємо рівняння

$$C(t)\Omega_\tau^t(C)=A(t)\Omega_\tau^t(C)+B(t)\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)+$$

$$+D(t)\frac{d}{dt}(\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)),\ t\in R.$$

Оскільки $\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)=\Omega_\tau^t(C)\Omega_t^{t+\lambda}(C)$, то

$$C(t)\Omega_\tau^t(C)=A(t)\Omega_\tau^t(C)+B(t)\Omega_\tau^t(C)\Omega_t^{t+\lambda}(C)+$$

$$+D(t)C(t)\Omega_\tau^t(C)\Omega_t^{t+\lambda}(C)+$$

$$+D(t)\Omega_\tau^t(C)\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C)),\ t\in R.$$

Враховуючи властивості матриці $\Omega_\tau^t(C)$, можна зробити висновок, що це рівняння справедливе, якщо

$$C(t)=A(t)+B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C)+D(t)C(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C)+$$

$$+D(t)\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C)),\ t\in R,$$

звідки

$$C(t)=(I-D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C))^{-1}[A(t)+$$

$$+B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C)+D(t)\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C))],\qquad(8)$$

за умови, що $\parallel D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C)\parallel<1$, $t\in R$. Підставляючи (8) в (7), отримаємо

$$g(t)=[\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds-(I-D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C))^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds]A(t)+[\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds-$$

$$-(I-D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C))^{-1}\Omega_t^{t+\lambda}(C)\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds]\times$$

$$\times B(t)+[\frac{d}{dt}\int\limits_\tau^{t+\lambda}\Omega_s^{t+\lambda}(C)g(s)ds-\frac{d}{dt}(\Omega_t^{t+\lambda}(C))\times$$

$$\times(I-D(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C))^{-1}\int\limits_\tau^t\Omega_s^t(C)g(s)ds]D(t)+f(t).$$

Ввівши відповідні позначення для $\Phi(t,s)$ та $P(t,t+\lambda)$, одержимо рівняння (3) і (4) для $C(t)$ та $g(t)$ відповідно.

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (3), а вектор-функція $g(t)$ – рівняння (4) при $t\in R$.

Розглянемо приклади знаходження рівнянь (3), (4) в деяких часткових випадках.

Приклад 1. Нехай $n=1$, $f=0$, a,b,c, d – сталі величини, тоді (1) і (2) будуть мати, відповідно, вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t+\lambda)+d\frac{dx(t+\lambda)}{dt}, \quad (9)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=cx(t). \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (2) $x = x_0e^{ct}$, тоді $\dfrac{dx(t)}{dt} = cx_0e^{ct} = ax_0e^{ct} + bx_0e^{c(t+\lambda)}+ +d\dfrac{d}{dt}(x_0e^{c(t+\lambda)})$, звідки для c одержується рівняння

$$c=(a+be^{c\lambda})(1-de^{c\lambda})^{-1}, \quad (11)$$

за умови, що $1-de^{c\lambda}\neq 0$. Якщо вважати, що $|c|\leq\alpha$, то повинна виконуватись умова $|dce^{c\lambda}|\leq|d|\alpha e^{\alpha|\lambda|}<1$. За умови, що $1-de^{c\lambda}=0$, $c=\dfrac{1}{\lambda}\ln(-\dfrac{a}{b})$, тому рівняння (10) матиме вигляд $\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{1}{\lambda}\ln(-\dfrac{a}{b})x(t)$, звідки $x=x_0(-\dfrac{a}{b})^{\frac{t}{\lambda}}$.

Приклад 2. Нехай A,B,C,D – сталі матриці, $f(t)\neq 0$, тоді розв'язок рівняння (2) має вигляд

$x(t)=e^{C(t-\tau)}x_0+\displaystyle\int_\tau^t e^{C(t-s)}g(s)ds$, тому

$$\frac{dx(t)}{dt}=C(e^{C(t-\tau)}x_0+\int_\tau^t e^{C(t-s)}g(s)ds)+g(t)=$$

$$=A(e^{C(t-\tau)}x_0+\int_\tau^t e^{C(t-s)}g(s)ds)+$$

$$+B(e^{C(t+\lambda-\tau)}x_0+\int_\tau^{t+\lambda} e^{C(t+\lambda-s)}g(s)ds)+$$

$$+D\frac{d}{dt}(e^{C(t+\lambda-\tau)}x_0+\int_\tau^{t+\lambda} e^{C(t+\lambda-s)}g(s)ds)+f(t).$$

У цьому випадку рівняння (3) і (4) набудуть вигляду, відповідно
$C=(I-De^{C\lambda})^{-1}(A+Be^{C\lambda})$, $\| De^{C\lambda}\|<1$,

$$g(t)=\int_\tau^t e^{C(t-s)}g(s)ds(A-(I-De^{C\lambda})^{-1}\times$$
$$\times(A+Be^{C\lambda}))+(B+CD)\int_\tau^{t+\lambda} e^{C(t+\lambda-s)}g(s)ds+$$
$$+Dg(t+\lambda)+f(t),\ t\in R.$$

Розглянемо частковий випадок, коли $n= =1$, a,b,c,d – сталі і $f=0$.

Теорема. *Нехай коефіцієнти a,b,d диференціального рівняння (9) задовольняють нерівність*

$$2q(\sqrt{2}|d|\sqrt{q+2|d|-2}+q+2|d|)<$$
$$<(\sqrt{2}|d|\sqrt{q+2|d|-2}+q)^2,\quad q=|\lambda|(|a||d|+|b|).$$

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (11), причому $|c|\leq M$, M – деяка стала, що залежить від $|\lambda|$, a, b, d.

Доведення. В рівнянні (11) виконаємо заміну змінних

$$c=(a+by)(1-dy)^{-1}. \quad (12)$$

Тоді отримаємо рівняння

$$\frac{a+by}{1-dy}=\frac{a+be^{\frac{a+by}{1-dy}\lambda}}{1-de^{\frac{a+by}{1-dy}\lambda}},$$

звідки

$$y=e^{\frac{a+by}{1-dy}\lambda}, \quad (13)$$

за умови, що $b+ad\neq 0$, $1-dy\neq 0$.

Визначимо відображення S

$$S(y)=e^{\frac{a+by}{1-dy}\lambda} \quad (14)$$

на проміжку $[-m;m]$.

Тоді для $S(y)$ справедлива рівність

$$|Sy|=e^{\frac{|a|+|b|m}{1-|d|m}\lambda}.$$

Оскільки a,b,d – сталі величини, то, якщо виконується нерівність

$$e^{\frac{|a|+|b|m}{1-|d|m}\lambda}\leq m, \quad (15)$$

то відображення S переводить проміжок $[-m;m]$ в себе.

Знайдемо оцінку для різниці $S(y_1)-S(y)$, для чого введемо позначення:

$$p_1 = \frac{a+by_1}{1-dy_1},\ p = \frac{a+by}{1-dy}.$$

Тоді

$$|e^{p_1\lambda} - e^{p\lambda}| = |e^{\frac{a+by_1}{1-dy_1}\lambda} - e^{\frac{a+by}{1-dy}\lambda}| \le$$

$$\le e^{\widetilde{p}\lambda}|p_1 - p||\lambda| = e^{\widetilde{p}\lambda}\left|\frac{a+by_1}{1-dy_1} - \frac{a+by}{1-dy}\right| =$$

$$= e^{\widetilde{p}\lambda}\left|\frac{(ad+b)(y_1-y)}{(1-dy_1)(1-dy)}\right||\lambda| \le$$

$$\le |\lambda|e^{\widetilde{p}\lambda}(|a||d|+|b|)\frac{|y_1-y|}{|1-dy_1||1-dy|} \le$$

$$\le |\lambda|e^{\frac{|a|+|b|m}{1-|d|m}\lambda}(|a||d|+|b|)\frac{1}{(1-|d|m)^2}|y_1-y|.$$

Звідси випливає, що

$$|S(y_1)-S(y)| \le |\lambda|e^{\frac{|a|+|b|m}{1-|d|m}\lambda}(|a||d|+|b|)\times$$

$$\times\frac{1}{(1-|d|m)^2}|y_1-y|. \tag{16}$$

Оператор $S(y)$ буде оператором стиску на $[-m;m]$, якщо виконується нерівність

$$|\lambda|e^{\frac{|a|+|b|m}{1-|d|m}\lambda}\frac{|a||d|+|b|}{(1-|d|m)^2} < 1. \tag{17}$$

Вимагаючи одночасного виконання нерівностей (15) та (17), одержимо

$$\frac{|\lambda|(|a||d|+|b|)m}{(1-|d|m)^2} < 1,$$

Оскільки $(1-|d|m)^2 > 0$, то

$$|\lambda|(|a||d|+|b|)m - (1-|d|m)^2 < 0.$$

Введемо позначення $q = |\lambda|(|a||d|+|b|)$, тоді

$$qm - 1 + 2|d|m - d^2m^2 < 0,$$

$$\left(m - \frac{q+2|d|}{2d^2}\right)^2 < \left(\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}\right),$$

$$-\sqrt{\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}} < m - \frac{q+2|d|}{2d^2} <$$

$$< \sqrt{\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}}.$$

Звідси маємо

$$-\sqrt{\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}} + \frac{q+2|d|}{2d^2} < m <$$

$$< \sqrt{\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}} + \frac{q+2|d|}{2d^2},$$

за умови, що $\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2} > 0$. Для

$$m < \sqrt{\frac{q+2|d|}{2d^2} - \frac{1}{d^2}} + \frac{q+2|d|}{2d^2} \tag{18}$$

будуть виконуватись одночасно нерівності (15) і (17).

Отже, при виконанні нерівності

$$2q(\sqrt{2}|d|\sqrt{q+2|d|-2} + q + 2|d|) <$$

$$< (\sqrt{2}|d|\sqrt{q+2|d|-2} + q)^2$$

для значень m, які задовольняють нерівність (18), оператор $S(y)$ є оператором стиску і відображає проміжок $[-m;m]$ в себе. Тобто $S(y)$ на проміжку $[-m;m]$ має єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (11).

Приклад 3. Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0,5x(t) + 0,1x(t+4) + e^{2.5}\frac{dx(t+4)}{dt}.$$

Для коефіцієнтів цього рівняння виконуються умови теореми, наведеної вище, тому для нього можна побудувати звичайне диференціальне рівняння вигляду (10), всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками початкового рівняння.

Запишемо для початкового рівняння відповідне характеристичне

$$\mu = 0,5 + 0,1e^{4\mu} + e^{2.5}\mu e^{4\mu},$$

зідки $\mu \approx -0.0701798$.

Отже, розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$x(t) \approx x_0e^{-0.0701798t}. \tag{19}$$

Знайдемо для заданого рівняння нейтрального типу відповідне рівняння вигляду (10). Використавши (11), отримаємо, що $c \approx -0.0701798$ (при цьому виконується умова $|dce^{c\lambda}| < 1$). Тому рівняння (10) в цьому випадку матиме вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.0701798x(t).$$

Розв'язком цього рівняння також є (19).

Отже, можна побачити, що розв'язок звичайного диференціального рівняння типу (10), для якого коефіцієнт c знайдено за формулою (11), є глобальним розв'язком початкового диференціального рівняння нейтрального типу з відхиленням аргументу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003.– **55**, №5.– С. 631–640.
2. Самойленко А.М., Денисенко Н.Л. Про розв'язки на півосі системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2007.– **59**, №4.– С. 501–513.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
4. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 648 p.