УДК 517.943

©2008 р. П. Ф. Самусенко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ОСНОВНОЇ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ І ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

У роботі побудовано асимптотичний розв'язок основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням у точці.

We construct the asymptotic solution of the initial-value problem for a singularly perturbed system of differential equations with delay and degeneracy at a point.

Систематичні дослідження диференціальних рівнянь із запізненням аргументу почались в середині XX століття. Зупинимось на деяких асимптотичних методах інтегрування зазначених рівнянь.

В роботах Ю.О. Митропольського [1, с. 279 – 296], А. Халаная [2], В.П. Рубаника [3], В.І. Фодчука [4] розроблено метод усереднення для систем із запізненням.

Диференціальні рівняння нейтрального типу з малим відхиленням аргументу досліджувались А.Б. Васильєвою [5, с. 246 – 266], А.М. Родіоновим [6], В.І. Рожковим [7]. При цьому виявилось, що такі рівняння за асимптотичними властивостями близькі до сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

В роботах Ю.О. Рябова [8] доведено існування та побудовано асимптотичні розвинення періодичних розв'язків систем з малим запізненням і періодичними коефіцієнтами. Йому вдалося показати збіжність отриманих формальних рядів і навести оцінки амплітуди малого запізнення і залишкового члена.

У даній роботі розглядається основна початкова задача

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T], \tag{1}$$

$$x_{|0\le t\le\varepsilon} = \varphi(t), \tag{2}$$

де $B(t)$ – квадратна матриця n-го порядку, $f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon)$, $\varphi(t)$, $x(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, ε – малий параметр ($\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$).

Припустимо виконання таких умов:
1) $B(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$;
2) вектор-функція $f(x,[x],t,\varepsilon)$ ($[x(t,\varepsilon)] = x(t-\varepsilon,\varepsilon)$) має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині

$$G = \{(x,[x],t,\varepsilon) : ||x|| \le a,\ ||[x]|| \le a,$$
$$0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\},$$

де $||\varphi(t)|| < a$, $t \in [0;T]$;
3) $\varphi(t) \in C^{\infty}_{[0;\varepsilon]}$;
4) рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ на множині $D = \{(x,x,t) : ||x|| \le a,\ 0 \le t \le T\}$ має неперервний розв'язок $x = \psi(t)$;
5) в'язка матриць $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0) - \lambda B(0)$, де $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0)$ – квадратна матриця n-го порядку, стовпцями якої є $\dfrac{\partial f_i(x,[x],0,0)}{\partial x_j}\Big|_{(x,[x],t)=(\psi(0),\psi(0),0)}$, $i,j = \overline{1,n}$, – регулярна, має один "скінченний" та один "нескінченний" елементарні дільники кратності p та $n-p$ відповідно;
6) $f_{[x]}(\psi(0),\psi(0),0,0) = 0$;
7) $\operatorname{Re}\lambda_0 < -1$, де λ_0 – власне значення матриці $f_x(\psi(0),\psi(0),0,0)$ відносно $B(0)$.

З умов 5), 6) випливає існування неособливих матриць $P(t,\varepsilon)$ та $Q(t,\varepsilon)$ таких, що

$$P(t,\varepsilon)(f_x(\psi(t),\psi(t),t,0)+$$
$$+\varepsilon f_{x\varepsilon}(\psi(t),\psi(t),t,0))Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon),$$
$$P(t,\varepsilon)B(t)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon),$$

де

$$\Omega(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Omega^{(1)}(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & \Omega^{(2)}(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$$H(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}H^{(1)}(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & H^{(2)}(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$$\Omega(t,\varepsilon)=\Omega_0(t)+\varepsilon\Omega_1(t),$$

$$H(t,\varepsilon)=H_0(t)+\varepsilon H_1(t),$$

$$\Omega(0,0)=\begin{pmatrix}E_{n-p} & 0\\ 0 & W\end{pmatrix},$$

$$H(0,0)=\begin{pmatrix}J_{n-p} & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix},$$

E_i – одинична матриця i-го порядку,

$$J_{n-p}=(\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,n-p}},$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}1, \ j=i+1,\\ 0, \ j\neq i+1, \ i,j=\overline{1,n-p},\end{cases}$$

$$W=\lambda_0E_p+J_p,$$

матрицю J_p утворено аналогічно до J_{n-p}. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що

$$f_x(\psi(t),\psi(t),t,0)+\varepsilon f_{x\varepsilon}(\psi(t),\psi(t),t,0)=$$

$$=\Omega(t,\varepsilon),$$

$$H(t,\varepsilon)=B(t).$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\overline{x}(t,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\overline{x}_s(t)$ – регулярний ряд, $\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s x(\tau)$ – примежевий ряд, $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ [5, с. 248]

Нехай

$$f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)=\overline{f}(t,\varepsilon)+\Pi f(\tau,\varepsilon),$$

де

$$\overline{f}(t,\varepsilon)=f(\overline{x}(t,\varepsilon),[\overline{x}(t,\varepsilon)],t,\varepsilon),$$

$$\Pi f(\tau,\varepsilon)=$$

$$=f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),[\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon)],\varepsilon\tau,\varepsilon)-$$

$$-f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon),[\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)],\varepsilon\tau,\varepsilon).$$

Запишемо вектор-функції $\overline{f}(t,\varepsilon)$ та $\Pi f(\tau,\varepsilon)$ у вигляді рядів за степенями ε:

$$\overline{f}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\overline{f}_s(t), \ \Pi f(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_s f(\tau),$$

де

$$\overline{f}_0(t)=f(\overline{x}_0(t),\overline{x}_0(t),t,0),$$

$$\overline{f}_s(t)=(\overline{f}_x(t)+\overline{f}_{[x]}(t))\overline{x}_s(t)+f_s(t), \ s=1,2,...,$$

$$\Pi_0 f(\tau)=$$

$$=f(\overline{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),\overline{x}_0(0)+[\Pi_0x(\tau)],0,0)-$$

$$-f(\overline{x}_0(0),\overline{x}_0(0),0,0),$$

$$\Pi_s f(\tau)=f_x(\tau)\Pi_s x(\tau)+f_{[x]}(\tau)[\Pi_s x(\tau)]+F_s(\tau),$$

$s = 1,2,...$, елементи матриць $\overline{f}_x(t)$, $\overline{f}_{[x]}(t)$ та $f_x(\tau)$, $f_{[x]}(\tau)$ обчислюються в точках $(\overline{x}_0(t),\overline{x}_0(t),t,0)$ та $(\overline{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),\overline{x}_0(0)+[\Pi_0x(\tau)],0,0)$ відповідно; вектор-функції $f_s(t)$ та $F_s(\tau)$, $s\geq 1$, певним чином виражаються через $\overline{x}_i(t)$, $[\overline{x}_i(t)]$ та $\Pi_i x(\tau)$, $[\Pi_i x(\tau)]$, $i<s$.

Підставляючи ряд (3) до системи (1) і зрівнюючи вирази, що залежать від t і τ, дістаємо:

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{f}(t,\varepsilon), \ \varepsilon\leq t\leq T, \tag{4}$$

$$H(\varepsilon\tau,\varepsilon)\frac{d\Pi x}{d\tau}=\Pi f(\tau,\varepsilon), \ \tau\geq 1. \tag{5}$$

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду

$$\overline{x}(t,\varepsilon)_{|0\leq t\leq\varepsilon}+\Pi x(\tau,\varepsilon)_{|0\leq\tau\leq 1}=\varphi(t)$$

або

$$(\Pi_0x(\tau)+\varepsilon\Pi_1x(\tau)+...)_{|0\leq\tau\leq 1}=\varphi(\varepsilon\tau)-$$

$$-\overline{x}_0(\varepsilon\tau)-\varepsilon\overline{x}_1(\varepsilon\tau)-...=(\varphi(0)-\overline{x}_0(0))+$$

$$+\varepsilon(\varphi'(0)\tau-\overline{x}'_0(0)\tau-\overline{x}_1(0))+...+ \tag{6}$$

$$+\varepsilon^s\left(\frac{\varphi^{(s)}(0)\tau^s}{s!}-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\overline{x}_k^{(s-k)}(0)\tau^{s-k}}{(s-k)!}-\overline{x}_s(0)\right)+...$$

У тотожностях (4), (5) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, при ε^0 матимемо:

$$f(\overline{x}_0(t),\overline{x}_0(t),t,0)=0,$$

$$H(0,0)\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}=$$
$$=f(\overline{x}_0(0)+\Pi_0 x(\tau),\overline{x}_0(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0)-$$
$$-f(\overline{x}_0(0),\overline{x}_0(0),0,0).$$

З умови 4) випливає, що

$$\overline{x}_0(t)=\psi(t),\ t\in[0;T].$$

Тоді

$$H(0,0)\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}=$$
$$=f(\psi(0)+\Pi_0 x(\tau),\psi(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0). \quad (7)$$

Надалі припускатимемо:
8) $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$, де $\varphi_1(0)$ та $\psi_1(0)$ – вектори, що містять $n-p$ перших компонент векторів $\varphi(0)$ та $\psi(0)$ відповідно;
9) вектор-функція $f_1(x,[x],t,\varepsilon)$ не містить $x_{n-p+1},...,x_n$ ($f_1(x,[x],t,\varepsilon)$ утворено аналогічно до $\varphi_1(0)$);
10) система (7) має розв'язок $\Pi_0 x=\Pi_0 x(\tau)$, $\tau\geq 1$, такий, що $\Pi x_0(1)=\varphi(0)-\psi(0)$ і $\Pi_0 x(\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, причому

$$||\psi(t)+\Pi_0 x(t/\varepsilon)||<a,\ t\in[0;T].$$

Тоді $\Pi_{01}x(\tau)\equiv 0$, $\tau\geq 1$.

Покажемо, що має місце оцінка:

$$||\Pi_{02}x(\tau)||\leq c^{(0)}e^{\kappa_0\tau},\ \tau\geq 1,\ \kappa_0<-1,$$

де $\Pi_{02}x(\tau)$ – вектор-функція, що містить p останніх компонент $\Pi_0 x(\tau)$.

Для цього утворимо систему, що містить p останніх рівнянь системи (7):

$$\frac{d\Pi_{02}x(\tau)}{d\tau}=W\Pi_{02}x(\tau)+G_2(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)]), \quad (8)$$

де

$$G(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)])=$$
$$=f(\psi(0)+\Pi_0 x(\tau),\psi(0)+[\Pi_0 x(\tau)],0,0)-$$
$$-\Omega_0(0)\Pi_0 x(\tau),$$

$G_2(\Pi_0 x(\tau),[\Pi_0 x(\tau)])$ побудовано аналогічно до $\Pi_{02}x(\tau)$.

Оскільки $\Pi_0 x(\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, то для будь-якого $\delta>0$ існує $l_0(\delta)$ таке, що $||\Pi_0 x(\tau)||<\delta$, $\tau\geq l_0$.

За побудовою для будь-якого $\varepsilon>0$ існуватиме $\delta(\varepsilon)$ таке, що

$$||G(u,[\omega])-G(v,[\omega])||<\frac{\varepsilon}{k_0}||u-v||$$

і

$$||G(u,v)||<\frac{\varepsilon}{k_0}\left(||u||+||v||\right)$$

для всіх $||u||\leq\delta$, $||v||\leq\delta$, $||\omega||\leq\delta$ (число k_0 визначимо нижче).

Позначимо

$$M_1=\sup_{l_0\leq\tau<l_0+1}||\Pi_{02}x(\tau)||,$$

$$c^{(0)}_{l_0+1}=\lim_{\tau\to l_0+1}\Pi_{02}x(\tau)$$

і розглянемо систему рівнянь

$$\Pi_{02}x(\tau)=\exp(W(\tau-l_0-1))c^{(0)}_{l_0+1}+ \quad (9)$$
$$+\int\limits_{l_0+1}^{\tau}\exp(W(\tau-s))G_2(\Pi_0 x(s),[\Pi_0 x(s)])ds,$$

$\tau\in[l_0+1;l_0+2)$.

Для розв'язання системи (9) скористаємось методом послідовних наближень. Покладемо

$$\Pi^{(0)}_{02}x(\tau)=\exp(W(\tau-l_0-1))c^{(0)}_{l_0+1},$$
$$\Pi^{(k+1)}_{02}x(\tau)=\exp(W(\tau-l_0-1))c^{(0)}_{l_0+1}+$$
$$+\int\limits_{l_0+1}^{\tau}\exp(W(\tau-s))G_2(\Pi^{(k)}_0 x(s),[\Pi_0 x(s)])ds,$$

$k=0,1,...$ Звідси

$$||\Pi^{(0)}_{02}x(\tau)||\leq e^{\mathrm{Re}\,\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c^{(0)}_{l_0+1}||.$$

Число $k_0>e$ підберемо так, щоб

$$\frac{e}{k_0}\left(e^{\mathrm{Re}\,\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c^{(0)}_{l_0+1}||+M_1\right)\leq$$
$$\leq e^{\mathrm{Re}\,\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c^{(0)}_{l_0+1}||.$$

Тоді

$$||\Pi^{(1)}_{02}x(\tau)-\Pi^{(0)}_{02}x(\tau)||\leq$$
$$\leq\varepsilon e^{\mathrm{Re}\,\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c^{(0)}_{l_0+1}||,$$

$$||\Pi_{02}^{(1)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon)e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}|| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, e^{\operatorname{Re}\lambda(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||.$$

Нехай $\dfrac{||c_{l_0+1}^{(0)}||}{1-\varepsilon} < \dfrac{\delta(\varepsilon)}{e}$. Тоді

$$||\Pi_{02}^{(2)}x(\tau) - \Pi_{02}^{(1)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq \varepsilon^2 e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||$$

і

$$||\Pi_{02}^{(2)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon+\varepsilon^2)e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}|| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||.$$

Припустимо, що

$$||\Pi_{02}^{(k)}x(\tau) - \Pi_{02}^{(k-1)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq \varepsilon^k e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||$$

і

$$||\Pi_{02}^{(k)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon+...+\varepsilon^k)e^{\operatorname{Re}\lambda(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}|| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||.$$

Тоді

$$||\Pi_{02}^{(k+1)}x(\tau) - \Pi_{02}^{(k)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq \varepsilon^{k+1} e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||$$

і

$$||\Pi_{02}^{(k+1)}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon+...+\varepsilon^{k+1})e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}|| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||.$$

Використовуючи метод послідовних наближень, можна показати, що

$$||\Pi_{02}x(\tau)|| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||,$$

$\tau \in [l_0+1; l_0+2)$. Покладемо

$$c_{l_0+2}^{(0)} = \lim_{\tau\to l_0+2}\Pi_{02}x(\tau).$$

Тоді

$$||c_{l_0+2}^{(0)}|| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_0+1}}{1-\varepsilon}\, ||c_{l_0+1}^{(0)}||.$$

Аналогічно показуємо правильність оцінки

$$||\Pi_{02}x(\tau)|| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_0+1}}{(1-\varepsilon)^2}\, e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-2)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||,$$

$\tau \in [l_0+2; l_0+3)$, і взагалі

$$||\Pi_{02}x(\tau)|| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_0+1}}{1-\varepsilon}\right)^k e^{\operatorname{Re}\lambda_0(\tau-l_0-k-1)+1}||c_{l_0+1}^{(0)}||,$$

$\tau \in [l_0+k+1; l_0+k+2)$, $k = 0, 1, ...$ Тому

$$||\Pi_{02}x(\tau)|| \leq \frac{M_2}{1-\varepsilon}\, ||c_{l_0+1}^{(0)}|| e^{\kappa_0\tau},$$

$\tau \in [l_0+k+1; l_0+k+2)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 < \kappa_0 < -1$, тобто існуватиме стала $c^{(0)} > 0$ така, що

$$||\Pi_0 x(\tau)|| \leq c^{(0)}e^{\kappa_0\tau},\ \tau \geq 1. \tag{10}$$

Відповідну малість сталої δ можна досягти за рахунок збільшення числа l_0.

Зрівнюючи у тотожностях (4), (5) коефіцієнти біля ε^s, $s \geq 1$, дістаємо:

$$(\overline{f}_x(t) + \overline{f}_{[x]}(t))\overline{x}_s(t) = H_0(t)\frac{d\overline{x}_{s-1}(t)}{dt} +$$
$$+ H_1(t)\frac{d\overline{x}_{s-2}(t)}{dt} - f_s(t), \tag{11}$$

$$H(0,0)\frac{d\Pi_s x(\tau)}{d\tau} = f_x(\tau)\Pi_s x(\tau) + a_s(\tau), \tag{12}$$

де

$$a_s(\tau) = f_{[x]}(\tau)[\Pi_s x(\tau)] + F_s(\tau) -$$
$$-\sum_{i=1}^{s}\frac{\tau^i}{i!}\,\frac{d^iH_0(0)}{dt^i}\,\frac{d\Pi_{s-i}x(\tau)}{d\tau} -$$
$$-\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\tau^i}{i!}\,\frac{d^iH_1(0)}{dt^i}\,\frac{d\Pi_{s-i-1}x(\tau)}{d\tau}.$$

З умови 6) випливає, що

$$det(\overline{f}_x(t) + \overline{f}_{[x]}(t)) \neq 0,$$

$t \in [0;t_0]$, $t_0 \le T$. А тому

$$\overline{x}_s(t) = (\overline{f}_x(t) + \overline{f}_{[x]}(t))^{-1} \left(H_0(t)\frac{d\overline{x}_{s-1}(t)}{dt} + \right.$$
$$\left. + H_1(t)\frac{d\overline{x}_{s-2}(t)}{dt} - f_s(t) \right), \ t \in [0;t_0].$$

Систему (12) запишемо наступним чином:

$$H(0,0)\frac{d\Pi_s x(\tau)}{d\tau} = \Omega_0(0)\Pi_s x(\tau) + b_s(\tau), \ \tau \ge 1, \quad (13)$$

$b_s(\tau) = a_s(\tau) + (f_x(\tau) - \Omega_0(0))\Pi_s x(\tau)$.
11) Нехай система

$$J_{n-p}\frac{d\Pi_{s1}x(\tau)}{d\tau} = \Pi_{s1}x(\tau) + b_{s1}(\tau), \tau \ge 1, s \ge 1,$$

має розв'язок $\Pi_{s1}x = \Pi_{s1}x(\tau)$, $\tau \ge 1$, такий, що

$$\Pi_{s1}x(1) = \frac{\varphi_1^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\overline{x}_{k1}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \overline{x}_{s1}(0), s \ge 1.$$

Тоді система (13) матиме розв'язок $\Pi_s x = \Pi_s x(\tau)$, $\tau \ge 1$, для якого

$$\Pi_s x(1) = \frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\overline{x}_k^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \overline{x}_s(0) \quad (14)$$

і

$$||\Pi_s x(\tau)|| \le c^{(s)}e^{\kappa_s \tau}, \ \tau \ge 1, \kappa_s < -1.$$

Зазначимо, що умова 11) матиме місце якщо, наприклад, $\varphi_1(t) = \psi_1(t) = const$, $t \ge \varepsilon$; $f_{1\varepsilon}(\psi(t), \psi(t), t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;t_0]$, $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$.

Покажемо, що побудований формальний розв'язок (3) є рівномірним асимптотичним розвиненням "точного" розв'язку задачі (1), (2) на відрізку $[0;t_0]$.

Для цього в системі (1) зробимо заміну

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon), \quad (15)$$

де

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\overline{x}_s(t) + \Pi_s x(\tau)),$$

а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \Omega(t,\varepsilon)y + g(y(t,\varepsilon), [y(t,\varepsilon)], t, \varepsilon), \quad (16)$$
$$g(y,[y],t,\varepsilon) = f(x_m + y, [x_m + y], t, \varepsilon) -$$
$$-\Omega(t,\varepsilon)y - \varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dx_m}{dt}.$$

За побудовою

$$||g(0,0,t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m+1}), \ t \in [0;t_0],$$

і

$$y(\varepsilon,\varepsilon) = y_\varepsilon, \ y_\varepsilon = O(\varepsilon^{m+1}). \quad (17)$$

Надалі припускатимемо:
12) $||(H^{(1)}(t,\varepsilon))^{-1}|| \le c_0\varepsilon^{-\alpha}$, $\alpha \ge 0$, $||(H^{(2)}(t,\varepsilon))^{-1}|| \le c_0$, $t \in [\varepsilon;t_0]$;
13) система

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \Omega(t,\varepsilon)y$$

має фундаментальну матрицю

$$Y(t,s,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Y^{(1)}(t,s,\varepsilon) & 0 \\ 0 & Y^{(2)}(t,s,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$(Y(t,t,\varepsilon) = E)$ таку, що

$$||Y^{(1)}(t,s,\varepsilon)|| \le c_1\varepsilon^{-\beta}, \ \beta \ge 0,$$

і

$$||Y^{(2)}(t,s,\varepsilon)|| \le c_1 \exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\varepsilon}\right), \ \kappa > 0,$$

$\varepsilon \le s \le t \le t_0$;
14) існують неперервні функції $\eta_i(t,\varepsilon)$, $\varepsilon \le t \le t_0$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, $i = \overline{1, n-p}$, та $\theta_i(t, \varepsilon', \varepsilon'')$, $\varepsilon \le t \le t_0$, $0 \le \varepsilon' \le \varepsilon_0$, $0 \le \varepsilon'' \le \varepsilon_0$, $i = \overline{1, n-p}$, такі, що

$$|\{f(u,[u],t,\varepsilon)\}_i - \{f(u,[v],t,\varepsilon)\}_i| \le$$
$$\le \eta_i(t,\varepsilon)||[u] - [v]||,$$
$$|\{f_x(u,[u],t,\varepsilon)\}_{ij} - \{f_x(v,[v],t,\varepsilon)\}_{ij}|| \le$$
$$\le \eta_i(t,\varepsilon)(||u-v|| + ||[u]-[v]||),$$

$j = \overline{1,n}$, для всіх $||u|| \le a$, $||v|| \le a$, причому

$$\eta_i(t,\varepsilon) = \frac{1}{4c_0c_1}\varepsilon^{\beta+1}, \ i = \overline{1, n-p-1},$$

$$\eta_{n-p}(t,\varepsilon)=\frac{1}{4c_0c_1}\,\varepsilon^{\alpha+\beta+1},$$

і

$$|\{f_{x\varepsilon}(\psi(t),\psi(t),t,\varepsilon')\}_{ij}-$$
$$-\{f_{x\varepsilon}(\psi(t),\psi(t),t,\varepsilon'')\}_{ij}|\le\theta_i(t,\varepsilon',\varepsilon'')|\varepsilon'-\varepsilon''|,$$

$j=\overline{1,n}$,

$$\theta_i(t,\varepsilon',\varepsilon'')=\frac{1}{4c_0c_1}\,\varepsilon^{\beta},\ i=\overline{1,n-p-1},$$

$$\theta_{n-p}(t,\varepsilon',\varepsilon'')=\frac{1}{4c_0c_1}\,\varepsilon^{\alpha+\beta},$$

де $\{\}_i$ або $\{\}_{ij}$ – компонента вектор-функції або матриці відповідно.

Тоді система інтегральних рівнянь

$$y(t,\varepsilon)=Y(t,\varepsilon,\varepsilon)y_\varepsilon+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{t}Y(t,s,\varepsilon)H^{-1}(s,\varepsilon)g(y,[y],s,\varepsilon)ds \qquad (18)$$

матиме єдиний розв'язок $y=y(t,\varepsilon)$ для якого $y(\varepsilon,\varepsilon)=y_\varepsilon$. При цьому,

$$y(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{m-\alpha-\beta-1}).$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1) – 14). Тоді для $m\ge\alpha+\beta+1$, $t\in[0;t_0]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$ такий, що

$$||x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-\alpha-\beta-1}). \qquad (19)$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А.* Метод усредения в нелинейной механике. — К.: Наук. думка, 1971. — 440 с.

2. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pures et appl. Acad. RPR. — 4, 3. — P. 467 – 483.

3. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.

4. *Фодчук В.И.* Асимптотические методы нелинейной механики в теории дифференциально-разностных уравнений: Автореф. дис. ... д-ра физ.мат. наук. — К., 1972. — 23 с.

5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

6. *Родионов А.М.* Применение метода возмущений к линейным уравнениям с распределенным запаздыванием // ЖВММФ, 1964. — 4, 2. — С. 358 – 363.

7. *Рожков В.И.* Асимптотика решений уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, 1963. — 2. — С. 208 – 222.

8. *Рябов Ю.А.* Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, 1962. — 1. — С. 103 – 113.

9. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

10. *Яковець В.П., Акименко А.М.* Про існування і асимптотику періодичного розв'язку виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних елементарних дільників // Нелінійні коливання, 2002. — Т. 5, № 1. — С. 123 – 141.