УДК 517.929

©2008 р. Р.І. Петришин, Я.Й.Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ В СИСТЕМАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ В РЕЗОНАНСНОМУ ВИПАДКУ

Встановлені умови застосування та знайдені оцінки похибки методу усереднення за швидкими змінними для системи із лінійно перетвореним аргументом, яка в процесі еволюції проходить через резонанси.

The conditions of application are established and the estimate of error of averaging method by fast variables for the system with the linearly transformed argument which passes through the resonances is obtained.

1.Вступ. Для коливної системи із змінним вектором частот $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \dots \omega_m(\tau))$ обгрунтування методу усереднення вимагає спеціальних умов. Ці умови пов'язані із резонансними явищами, які описуються співвідношенням

$$(k, \omega(\tau)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}.$$

В роботі [1] запропонована умова

$$V(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, L],$$

де $V(\tau)$ – визначник Вронського, побудований за функціями $\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)$. У монографії [2] одержано оцінку похибки методу усереднення і в тому випадку, коли рівняння $V(\tau) = 0$ має корені скінченної кратності.

У даній роботі розглядається аналогічне питання для m-частотної системи із лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta). \qquad (1)$$

Тут $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \ \varepsilon_0]$, $\theta \in (0, 1)$, $a_\theta(\tau) = a(\theta\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$, $a \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Вектор-функції A і B 2π-періодичні за компонентами змінних φ і φ_θ.

Системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом активно вивчаються (див. [3] та бібліографію в ній), а також служать математичними моделями в прикладних задачах [4]. Обгрунтування методу усереднення для систем (1) із початковими і крайовими умовами вивчалось в [5, 6] та ін.

2. Усереднена система. Відповідна (1) усереднена система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = A_0(\tau, \overline{a}, \overline{a}_\theta),$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau, \overline{a}, \overline{a}_\theta), \qquad (2)$$

де

$$F_0(\tau, a, a_\theta) = (2\pi)^{-2m} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(\tau, a, a_\theta, \varphi, \varphi_\theta) d\varphi d\varphi_\theta,$$

$F = [A; B]$, $F_0 = [A_0; B_0]$. Позначимо через $[a(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ і $[\overline{a}(\tau, y), \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ – розв'язки систем (1) і (2) відповідно, які при $\tau = 0$ набувають значення $[y, \psi]$. Умовою резонансу в системі (1) в точці τ є виконання рівності

$$\gamma_{kl}(\tau) = (k, \omega(\tau)) + \theta(l, \omega(\theta\tau)) = 0, \qquad (3)$$

де $[k, l] \in \mathbb{Z}^{2m} \setminus |[0\}$.

За системою функцій $\{\omega(\tau); \omega(\theta\tau)\}$ побудуємо визначник Вронського $V_{2m}(\tau)$. Якщо $V_{2m}(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, L]$, праві частини системи (2) достатньо гладкі, початкові умови в точці $\tau = 0$ для систем (1) і (3) збігаються і ε_0 – досить мале, то

$$\|a(\tau,\varepsilon) - \overline{a}(\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{\alpha}, \quad (4)$$

$\forall(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$ де $\alpha = (2m)^{-1}$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Якщо ж

$$V_{2m}(\tau) = 0 \quad (5)$$

в деяких точках чи тотожно, то оцінка (4) може погіршуватися.

Приклад 1. Як приклад розглянемо одночастотну систему

$$\frac{da}{d\tau} = \cos(\varphi - 2\varphi_\theta), \quad \theta = 0.5; \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(1+3\tau^2).$$

Нехай $a(0) = y$, $\varphi(0) = 0$. Визначник

$$V_2(\tau) = \begin{vmatrix} 1+3\tau^2 & 1+3\theta^2\tau^2 \\ 6\tau & 6\theta^2\tau \end{vmatrix} = 4.5\tau = 0,$$

коли $\tau = 0$. В цій же точці досягається резонанс, оскільки $\gamma(\tau) = 9\tau^2/4$. Відхилення повільної змінної

$$a(\tau,\varepsilon) - \overline{a} = \int_0^\tau \cos^3\frac{s^2}{4\varepsilon}ds = \sqrt[3]{\frac{4\varepsilon}{3}} \int_0^{\sqrt[3]{\frac{3}{4\varepsilon}}\tau} \cos s^3 ds.$$

Маємо $|a(\tau,\varepsilon) - \overline{a}| \ge \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon}$, якщо $\tau = \sqrt[3]{2\pi\varepsilon}/3$, тобто погіршується порядок оцінки (4) відносно порядку по ε.

3. Оцінка осциляційного інтеграла. Побудуємо оцінку відповідного системі (1) осциляційного інтеграла

$$I_\lambda(\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau f(t,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^t \gamma_\lambda(t_1)dt_1\right\}dt, \quad (6)$$

якщо виконується умова (5) і $\lambda \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$,

$$\gamma_\lambda(\tau) = (\lambda^{(1)}, \omega(\tau)) + \theta(\lambda^{(2)}, \omega(\theta\tau)),$$

функція f визначена в $G_1 = [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) $\omega \in C^{2m-1}[0,L]$ і кратність коренів рівняння (5) не перевищує r;

2) $f(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,L]$ для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Тоді існує $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0]$ і не залежна від ε стала $c_2 > 0$ така, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$, $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ виконується нерівність

$$\|I_\lambda(\tau,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}\left[\left(1+\frac{1}{\|\lambda\|}\right)\sup_{G_1}\|f(s,\varepsilon)\| + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\|\lambda\|}\sup_{G_1}\left\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\right\|\right]. \quad (7)$$

Доведення. Скористаємося методикою доведення теореми 1.4 в [2]. Оскільки число $\tau_1, \ldots, \tau_s$ нулів рівняння (5) на $[0,L]$ скінченне, то

$$[0,\tau] = A_{\delta_1}\bigcup B_{\delta_1},$$

де $\delta_1 < \min(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu)$,

$$B_{\delta_1} = \bigcup_{\nu=1}^{s}\left(\left[\tau_\nu - \frac{\delta_1}{2}, \tau_\nu + \frac{\delta_1}{2}\right]\bigcap[0,\tau]\right),$$

$$A_{\delta_1} = \overline{[0,\tau] \times B_{\delta_1}} \equiv \bigcup_{\nu=1}^{s_1}[\alpha_\nu, \beta_\nu], s_1 \le s+1.$$

Нехай $\lambda \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$, $\lambda_{i_0} = \max\limits_{\nu=1,\ldots,2m}|\lambda_\nu|$, $\omega_{m+j}(\tau) = \theta\omega_j(\theta\tau)$, $j = 1,\ldots,m$; $\Delta_{i_0,j}(t)$ – алгебраїчні доповнення до елемента i_0-го стовпця і j–го рядка визначника $V_{2m}(t)$. Тоді

$$\sum_{\nu=0}^{2m-1}\gamma_{kl}^{(\nu)}(t)\Delta_{i_0,\nu}(t) = \lambda_{i_0}V_{2m}(t), \quad t \in [0,L].$$

Диференціюючи одержану рівність r_j разів по t і враховуючи, що

$$\left|\frac{d^{r_j}V_{2m}(t_j)}{dt^{r_j}}\right| = |c^{(j)}| > 0$$

одержимо наступну оцінку

$$|\gamma^{(q_j)}(\tau_j)| \ge c_3\|\lambda\|$$

при деякому $q_j = q_j(\tau_j,\lambda)$, $0 \le q_j \le 2m-1+r_j$.

Одержана нерівність дозволяє отримати оцінки [2, 4]:

$$|\gamma_\lambda^{(q_j)}(t)| \ge \frac{1}{2}c_3\|\lambda\|,$$

$$|\gamma_\lambda^{(j)}(t)| \le 4|\gamma_\lambda^{(q_j)}(t)|, j = 1, \dots, r, \qquad (8)$$

для всіх $t \in [\tau_j - \delta_2, \tau_j + \delta_2] \cap [0, \tau]$, $\delta_2 \le \delta_1$, $0 \le j \le 2m - 1 + r_j$.

На нерезонасній множині $A_{\delta_2}(\tau)$ згідно з методикою [2]

$$\|I_\lambda(\tau, \varepsilon)\| \le c_4 \varepsilon^{\frac{1}{2m}} \Big[\Big(1 + \frac{1}{\|\lambda\|}\Big) \sup_{G_1} \|f(\tau, \varepsilon)\| +$$

$$+ \frac{1}{\|\lambda\|} \sup_{G_1} \Big\| \frac{df(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \Big\| \Big]. \qquad (9)$$

На множині B_{δ_2}, яка є об'єднанням не більше s проміжків, на кожному з яких виконуються нерівності (8), одержимо

$$\|I_\lambda(\tau, \varepsilon)\| \le s \Big[\Big((2^{2m+r} + 2)\mu + \frac{2^{2m+r+1}}{c_3 \|\lambda\|} \varepsilon \mu^{1-(2m+r)} \Big) \times$$

$$\times \sup_{G_1} \|f(\tau, \varepsilon)\| + \frac{2\delta_3}{c_3 \|\lambda\|} \varepsilon \mu^{1-(m+r)} \sup_{G_1} \Big\| \frac{df(s, \varepsilon)}{ds} \Big\| \Big]. \qquad (10)$$

Нехай $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}$, $c_2 = c_4 + 2^{2m+r} - 2 + \dfrac{2^{2m+r} - 1}{c_3} + \dfrac{2\delta}{c_3}$ і ε_1 – досить мале. Тоді із (9), (10) випливає оцінка (7).

Наслідок. Якщо $\lambda \in \mathbb{Z}^{2m} \setminus \{0\}$, то $\|\lambda\| \ge 1$ і з (7) одержимо

$$\|I_\lambda(\tau, \varepsilon)\| \le \overline{c}_2 \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}} \Big(\sup_{G_1} \|f(s, \varepsilon)\| +$$

$$+ \frac{1}{\|\lambda\|} \sup_{G_1} \Big\| \frac{df(s, \varepsilon)}{ds} \Big\| \Big), \qquad (10)$$

де $\overline{c}_2 = 2c_2$

4. Обгрунтування методу усереднення. Теорема 2. *Нехай: 1) виконується умова 1 теореми 1;*

2) в області $[0, L] \times D^2 \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$ $F \in C^1_{\tau, x, x_\theta}(\sigma_1)$, де сталою σ_1 обмежені вектор-функція F та її похідні;

3) справджується нерівність

$$\sum_{\|k\| + \|l\| \ne 0} \Big[(\|k\| + \theta\|l\|) \sup_{G_2} \|F_{kl}\| + \sup_{G_2} \Big\| \frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau} \Big\| +$$

$$+ \sup_{G_2} \Big\| \frac{\partial F_{kl}}{\partial a} \Big\| + \sup_{G_2} \Big\| \frac{\partial F_{kl}}{\partial a_\theta} \Big\| \Big] \le \sigma_2, G_2 = [0, L] \times D^2;$$

4) існує єдиний розв'язок $[\overline{a}(\tau, y), \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ усередненої системи, $y \in D_1 \subset D$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, який лежить в D разом із деяким ρ-околом.

Тоді $\exists \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ таке, що $\forall (\tau, y, \psi, \varepsilon) \in [0, L] \times D_1 \times \mathbb{R}^m \in (0, \varepsilon_2]$ існує єдиний розв'язок $[a(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ системи (1) і виконується нерівність

$$u(\tau, \varepsilon) = \|a(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, y)\| +$$

$$+ \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le c_3 \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}, \qquad (11)$$

де $c_3 > 0$ і не залежить від ε.

Доведення. Із системи (1) і (2) маємо

$$u(\tau, \varepsilon) \le \sigma_1 \int_0^\tau \|u(s, \varepsilon) - \overline{u}(s, \varepsilon)\| ds +$$

$$+ \sigma_1 \int_0^{\theta\tau} \|u(s, \varepsilon) - \overline{u}(s, \varepsilon)\| ds + \qquad (12)$$

$$+ \sum_{\|k\| + \|l\| \ne 0} \Big\| \int_0^\tau f_{kl}(s, \varepsilon) \exp \Big[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_{kl}(s_1) ds_1 \Big] ds \Big\|,$$

де

$$f_{kl}(s, \varepsilon) = A_{kl}(s, a(s, \varepsilon), a_\theta(s, \varepsilon)) \times$$

$$\times \exp \Big[i(k, \varphi(s, \varepsilon)) + i(l, \varphi_\theta(s, \varepsilon)) -$$

$$- \frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_{kl}(s_1) ds_1 \Big],$$

$$a(s, \varepsilon) = a(s, y, \psi, \varepsilon), \varphi(s, \varepsilon) := \varphi(s, y, \psi, \varepsilon).$$

Застосуємо оцінку (10). Маємо:

$$\sup_{G_1} \|f_{kl}(s, \varepsilon)\| = \sup_{G_2} \|A_{kl}\|,$$

$$\sup_{G_1} \Big\| \frac{df_{kl}(s, \varepsilon)}{ds} \Big\| \le \sigma_1 \sup_{G_2} \|A_{kl}\| +$$

$$+ \sigma_1 \Big(\sup_{G_2} \Big\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial a} \Big\| + \theta \sup_{G_2} \Big\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial a_\theta} \Big\| \Big).$$

Тоді із (12) та одержаних нерівностей випливає, що

$$u(\tau, \varepsilon) \le \sigma_1 \int_0^\tau u(s, \varepsilon) ds + \sigma_1 \int_0^\tau u(s, \varepsilon) ds +$$

$$+\bar{c}_2(1+\sigma_1)\varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}\sum_{\|k\|+\|l\|\ neq 0}\Big[\sup\|A_{kl}\|+$$

$$+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\Big(\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\Big\|+\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial a}\Big\|+$$

$$+\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial a_\theta}\Big\|\Big)\Big].$$

На підставі умови 3 теореми й аналогу нерівності Гронуолла-Беллмана одержимо

$$u(\tau,\varepsilon)\le\bar{c}_2\sigma_2(1+\sigma_1)e^{2\sigma_1\tau}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}.$$

Нехай $c_3=\bar{c}_2\sigma_2(1+\sigma_1)\exp(2\sigma_1 L)$, $\varepsilon\le\left(\dfrac{\rho}{2c_3}\right)^{2m+r}=\bar{\varepsilon}_2$, $\varepsilon_2=\min(\varepsilon_1,\bar{\varepsilon}_2)$.

Тоді розв'язок системи (1) можна продовжити для всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ виконується нерівність (11). Теорему доведено.

5. Одночастотна система. Нехай в системі (1) $m=1$ і $\omega(\tau)\ge 0$. Якщо виконується умова (5), то оцінка похибки методу усереднення складає $O(\varepsilon^{\frac{1}{r+2}})$, де r – найвища кратність коренів. Розглянемо випадок, коли умова резонансу

$$k\omega(\tau)+l\theta\omega(\theta\tau)=0 \tag{13}$$

тотожно виконується на $[0,L]$ для деяких мінімальних $\tilde{k}>0$ і $-\tilde{l}>0$. У цьому випадку

$$\omega(\tau)=C\tau^\lambda,\lambda=\ln\Big(-\frac{\tilde{k}}{\tilde{l}\theta}\Big)/ln\theta>0.$$

якщо $0<\tilde{k}<-\theta\tilde{l}$[7]. Вронскіан $V(\tau)\equiv 0$ для $\tau\in(0,L]$ і оцінка (11) може не виконуватися.

Побудуємо усереднену систему, зберігши в ній гармоніки $\exp(ip\tilde{\psi})$, $p\in\mathbb{Z}$, де $\tilde{\psi}=\tilde{k}\varphi+\tilde{l}\varphi_\theta$. Одержимо таку систему

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tau}=\tilde{A}(\tau,\tilde{a},\tilde{a}_\theta,\tilde{\psi}),$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\tilde{B}(\tau,\tilde{a},\tilde{a}_\theta,\tilde{\psi}), \tag{14}$$

де

$$\tilde{F}_0(\tau,\tilde{a},\tilde{a}_\theta,\tilde{\psi})=$$

$$=\frac{1}{2\pi(-\tilde{l})}\int_0^{-2\pi\tilde{l}}F(\tau,\tilde{a},\tilde{a}_\theta,\varphi,\frac{1}{\tilde{l}}\tilde{\psi}-\frac{\tilde{k}}{\tilde{l}}\varphi)d\varphi\equiv$$

$$\equiv\sum_{p\in\mathbb{Z}}F_{p\tilde{k},p\tilde{l}}(\tau,\tilde{a},\tilde{a}_\theta)\exp(ip\tilde{\psi}).$$

Суму з нерезонансними гармоніками позначимо через $\sum'$.

Лема. *Нехай для кожного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *вектор-функція* $f(\cdot,\varepsilon)\in C^1[0,L]$. *Тоді можна вказати таке* $\varepsilon_3\in(0,\varepsilon_0]$, *що всіх* $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_3]$ *правильна оцінка*

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\le 4\varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}\Big[\Big(1+\frac{1}{|\chi_{kl}|}\Big)\sup_{G_1}\|f\|+$$

$$+\frac{1}{|\chi_{kl}|}\sup_{G_1}\Big\|\frac{df}{ds}\Big\|\Big], \tag{15}$$

де $\chi_{kl}=k+\theta^{\lambda+1}l$.

Доведення. Якщо (k,l)-нерезонансний вектор, то $\chi_{kl}\ne 0$. Нехай $0<\delta\le 0.5$. На $[0,\delta]$ маємо

$$\|I_{kl}(s,\varepsilon)\|\le\delta\sup_{G_1}\|f\|. \tag{16}$$

На $[\delta,\tau]$ після інтегрування частина одержимо, що

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{i\chi_{kl}}\Big[\frac{f(s,\varepsilon)}{s^\lambda}\exp\Big\{\frac{i\chi_{kl}}{\varepsilon(\lambda+1)}s^{\lambda+1}\Big\}\Big|_\delta^\tau-$$

$$-\int_\delta^\tau\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}s^{-\lambda}\exp\Big\{\frac{i\chi_{kl}}{\varepsilon(\lambda+1)}s^{\lambda+1}\Big\}+$$

$$+\lambda\int_\delta^\tau f(s,\varepsilon)s^{-\lambda-1}\exp\Big\{\frac{i\chi_{kl}}{\varepsilon(\lambda+1)}s^{\lambda+1}\Big\}ds\Big].$$

Нехай $0<\lambda<1$. Тоді

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\le\frac{2\varepsilon}{|\chi_{kl}|}\Big[\frac{2}{\delta^\lambda}\sup_{G_1}\|f\|+\frac{L^{\lambda-1}}{1-\lambda}\Big]. \tag{17}$$

Для $\lambda=1$ і $\delta\le L^{-1}$ маємо

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\le$$

$$\le\frac{2\varepsilon}{|\chi_{kl}|}\Big(\frac{2}{\delta}\sup_{G_1}\|f\|+\ln\frac{1}{\delta}\sup_{G_1}\Big\|\frac{df}{ds}\Big\|\Big). \tag{18}$$

Нехай тепер $\lambda>1$. Тоді

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\le\frac{2\varepsilon}{|\chi_{kl}|}\Big(\frac{2}{\delta^\lambda}\sup_{G_1}\|f\|+$$

$$+\frac{1}{(\lambda-1)\delta^{\lambda-1}}\sup_{G_1}\Big\|\frac{df}{ds}\Big\|\Big). \qquad (19)$$

Нехай $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{\lambda+1}}$,

$$\varepsilon_3=\min\Big(\frac{1}{L^2},\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda+1},\Big(\frac{2(1+\lambda)}{L^{\lambda-1}}\Big)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}}\Big)$$

і задовольняє нерівність $\sqrt{\varepsilon_3}\ln\dfrac{1}{\varepsilon_3}\le 4$. Тоді із нерівностей (16) і (17) – (19) випливає оцінка (15).

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай:*

1) $m=1$ і $\omega(\tau)=C\tau^\lambda$;

2) виконуються умови 2, 4 теореми 2;

3) $\sum'\Big[(|k\ +\theta|l|)\sup\limits_{G_2}\|F_{kl}\|+\sup\limits_{G_2}\Big\|\dfrac{\partial F_{kl}}{\partial\tau}\Big\|+\sup\limits_{G_2}\Big\|\dfrac{\partial F_{kl}}{\partial a}\Big\|+\theta\sup\limits_{G_2}\Big\|\dfrac{\partial F_{kl}}{\partial a_\theta}\Big\|\Big]|\chi_{kl}|^{-1}\le\sigma_3.$

Тоді $\exists\varepsilon_4\in(0,\varepsilon_0]$ *таке, що для всіх* $(\tau,y,\psi,\varepsilon)\in[0,L]\times D_1\times\mathbb{R}^1\times(0,\varepsilon_4]$ *правильна оцінка*

$$u(\tau,\varepsilon)\le c_4\varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Доведення. Із систем (1) і (10) маємо

$$u(\tau,\varepsilon)\le\sigma_1\int_0^\tau u(s,\varepsilon)ds+\sigma_1\int_0^{\theta\tau}u(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\sum{}'\|J_{kl}(\tau,\varepsilon)\|, \qquad (20)$$

$$\|J_{kl}(\tau,\varepsilon)\|=\int_0^\tau F_{kl}(s,\varepsilon)\exp\Big[i(k\varphi+l\varphi_\theta)-$$

$$-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s\gamma_{kl}(s_1)ds_1\Big]\exp\Big[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s\gamma_{kl}(s_1)ds_1\Big]ds.$$

Застосуємо нерівність (15) й аналогічно, як при доведенні теореми 2, одержимо

$$\sum{}'\|J_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\le 12(1+\sigma_1)\varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}\times$$

$$\times\sum{}'\Big[(|k|+\theta|l|)\sup_{G_2}\|F_{kl}\|+\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial\tau}\Big\|+$$

$$+\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial a}\Big\|+\theta\sup_{G_2}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial a_\theta}\Big\|\Big]|\chi_{kl}|^{-1}\le$$

$$\le 12(1+\sigma_1)\sigma_3\varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Із нерівності (20) та одержаної оцінки випливає, що

$$u(\tau,\varepsilon)\le 12(1+\sigma_1)\sigma_3e^{2\sigma_1L}\varepsilon^{\frac{1}{1+\lambda}}. \qquad (21)$$

Нехай $c_4=12(1+\sigma_1)\sigma_3e^{2\sigma_1L}$, $\varepsilon_4=\min\Big(\varepsilon_2,\Big(\dfrac{\rho}{2c_4}\Big)^{1+\lambda}\Big)$. Тоді нерівність (21) виконується для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_4]$.

Теорему доведено.

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\frac{da}{d\tau}=\cos(\varphi-8\varphi_\theta)+\cos(7\varphi+8\varphi_\theta)+$$

$$+\cos(2\varphi-16\varphi_\theta),a(0)=y,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon},\quad\varphi(0)=0.$$

Тут $\theta=0.5$, $8\tilde{k}=\tilde{l}=8$. Якщо $\omega(\tau)=3\tau^2$, то $\omega(\tau)-4\omega(0.5\tau)\equiv 0$ і $\varphi-8\varphi_\theta\equiv 0$.

Оцінка похибки методу усереднене для повільної змінної така ж, як в прикладі 1.

6. Коливання струни під дією m-частотного збурення. Розглянемо задачу про коливання нескінченної струни

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\varepsilon^2f(\chi,\tau,a,a_\theta,\varphi,\varphi_\theta), \qquad (22)$$

де $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,L/\varepsilon]$, $\chi=\varepsilon x$, $[a,\varphi]$ – розв'язок системи (1) з початковими умовами $a(0,\varepsilon)=y$, $\varphi(0,\varepsilon)=\psi$,

$$u|_{t=0}=u_0(x),\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x),x\in\mathbb{R}. \qquad (23)$$

Метод усереднення для задачі (1), (22), (23) із постійним запізненням обгрунтований в [8].

Побудуємо відповідне (22) усереднене рівняння

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\varepsilon^2f_0(\chi,\tau,\overline{a},\overline{a}_\theta) \qquad (24)$$

для якого задаються початкові умови (23).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $u_0\in C^2(\mathbb{R})$, $u_1\in C^1(\mathbb{R})$, $f\in C^1_{x,\tau,a,a_\theta}(\sigma_1)$ *в області* $G_4=\mathbb{R}\times[0,L]\times D\times D$;

2) умова 2 – 4 теореми 2 ;

3) для коефіцієнтів Фур'є функції f виконується умова 3 теореми 2.

Тоді для всіх $(\tau, x, \varepsilon) \in [0, L] \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_2]$ виконується нерівність

$$|u(x, \frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon) - \overline{u}(x, \frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon)| \le c_5 \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}.$$

Доведення. Перейдемо в рівняннях (22) і (24) до змінних $\tau = \varepsilon t$ і $\chi = \varepsilon x$. Згідно з формулою Даламбера

$$u(\chi, \tau, \varepsilon) - \overline{u}(\chi, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{2c} \int\limits_0^\tau ds \times$$

$$\times \int\limits_{\chi - c(\tau - s)}^{\chi + c(\tau - s)} \Big[f(z, s, a(s, \varepsilon), a_\theta(s, \varepsilon), \varphi(s, \varepsilon),$$

$$\varphi_\theta(s, \varepsilon)) - f_0(z, s, \overline{a}(s, \varepsilon), \overline{a}_\theta(s, \varepsilon)) \Big] dz.$$

Звідси одержимо

$$|u(\chi, \tau; \varepsilon) - \overline{u}(\chi, \tau; \varepsilon)| \le \frac{\sigma_1}{2} \int\limits_0^\tau (\tau - s)(\|a(s, \varepsilon) -$$

$$-\overline{a}(s, \varepsilon)\| + \|a_\theta(s, \varepsilon) - \overline{a}_\theta(s, \varepsilon)\|) ds + \qquad (25)$$

$$+ \frac{1}{2c} \sum_{\|k\| + \|l\| \ne 0} \Big| \int\limits_0^\tau g_{kl}(\chi, \tau, s; \varepsilon) \times$$

$$\times \exp\Big(\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(s_1) ds_1 \Big) ds \Big|,$$

де $g_{kl}(\chi, \tau, s; \varepsilon) =$

$$= \Big(\int\limits_{\chi - c(\tau - s)}^{\chi + c(\tau - s)} f_{kl}(z, s, a(s, \varepsilon), a_\theta(s, \varepsilon)) dz \Big) \times$$

$$\times \exp\Big[i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\theta) - \exp\Big(\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(s_1) ds_1 \Big) \Big].$$

В області $0 \le s \le \tau \le L$, $a, a_\theta \in D$, $\varphi, \varphi_\theta \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ побудуємо оцінки:

$$|g_{kl}(\chi, \tau, s; \varepsilon)| \le 2c(\tau - s) \sup_{G_4} |f_{kl}| \le 2cL \sup_{G_4} |f_{kl}|,$$

$$\Big| \frac{\partial g_{kl}}{\partial s} \Big| \le 2c(1 + \sigma_1 L)(\|k\| + \theta \|l\|) \sup_{G_4} |f_{kl}| +$$

$$+ 2cL(1 + \sigma_1) \Big(\sup_{G_4} \Big| \frac{\partial f_{kl}}{\partial s} \Big| + \sup_{G_4} \Big| \frac{\partial f_{kl}}{\partial a} \Big| +$$

$$+ \theta \sup_{G_4} \Big| \frac{\partial f_{kl}}{\partial a_\theta} \Big| \Big).$$

На підставі нерівності (25) та оцінки осциляційного інтеграла (10) одержимо нерівність

$$|u(\chi, \tau; \varepsilon) - \overline{u}(\chi, \tau; \varepsilon)| \le \Big[\frac{1}{2} c_2 \sigma_1 L^2 +$$

$$+ 1 + (1 + \sigma_1) L) \sigma_2 \Big] \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}} \equiv c_5 \varepsilon^{\frac{1}{2m+r}}$$

$(\chi, \tau, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, L] \times (0, \varepsilon_2]$.
Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267 – 278.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

3. *Пелюх Г. П., Бельський Д. В.* Про асимптотичні властивості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 144 – 160.

4. *Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание // Дифференц. уравнения.— 2004.— **40**, N 12.— С.1587—1595.

5. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8-14.

6. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007.-59, №4. - С. 435–446.

7. *Полянин А.Д., Манжуров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. – М.: Факториал, 1998. – 384 с.

8. *Бігун Я.Й.* Усереднення в задачі про коливання струни і багаточастотної системи із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 14 – 17.