УДК 519.21

©2008 р. Г. М. Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО B-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Досліджується розв'язність задачі Коші з імпульсною дією для лінійного стохастичного B-параболічного рівняння вищого порядку зі змінними по t коефіцієнтами.

We investigate the solvability of the Cauchy problem with impulse action for a stochastic B-parabolic equation of a high order with variable on t coefficients.

У монографії А.М.Самойленка та М.О.Перестюка [1] побудована завершена теорія систем для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Крайові задачі для рівнянь другого порядку параболічного типу з випадковими збуреннями досліджувалися в працях Й.І.Гіхмана [2], І.Й.Гіхмана [3], А.Я.Дороговцева, С.Д.Івасишена та А.Г.Кукуша [4]. Досконала теорія параболічних систем побудована в монографіях С.Д.Ейдельмана [5], М.І.Матійчука [6].

Нехай визначено ймовірнісний простір (Ω, F, P) з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0, F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2\}$. Потрібно знайти F_t-вимірну випадкову функцію $u(t,x,\omega)$, $(t,x,\omega) \in \Pi \times \Omega$, $\Pi := (t_0, T] \times E_{n-1} \times (0, +\infty) = (t_0, T] \times E_n^+$, яка з ймовірністю 1 є розв'язком рівняння

$$d_t u(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k|+2l\leq 2b} A_{kl}(t)\times$$

$$\times D_{x'}^k \cdot B_{x_n}^l u(t,x,\omega)\Big]dt + \sum_{|k|+2l\leq b} C_{kl}(t)\times$$

$$\times D_{x'}^k B_{x_n}^l u(t,x,\omega) dw(t,\omega), (t,x,\omega) \in \Pi\times\Omega,$$

$$t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), j \in \{1,\ldots,N\},$$

$$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_N \leq N, \qquad (1)$$

при $t = t_0$ задовольняє початкову умову

$$u(t,x,\omega)|_{t=t_0} = \varphi(x,\omega), x \in E_n^+, \qquad (2)$$

умову по змінній x_n [6, с. 12] $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0$, а при $t = \tau_j$, $j \in \{1,\ldots,N\}$ умову стрибка [1, с. 48]

$$\Delta_t u(t,x,\omega)|_{t=\tau_j} = u(\tau_j+0,x,\omega)-$$

$$-u(\tau_j-0,x,\omega) = L_j u(\tau_j-0,x,\omega), \qquad (3)$$

де $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu \geq -\dfrac{1}{2}$, $L_j \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,$w(t,\omega)$ – стандартний скалярний вінерівський процес.

Теорема. *Нехай коефіцієнти $A_{kl}(t)$ та $C_{kl}(t)$ рівняння (1) неперервні й виконується умова рівномірної B-параболічності [6, с. 11] для коефіцієнтів відповідного детермінованого рівняння*

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|+2l=2b} A_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\right) \leq -\delta_0|\sigma|^{2b},$$

$$\delta_0 > 0, \sigma \in E_n^+, \qquad (4)$$

а для коефіцієнтів стохастичного рівняння справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|+2l=2b} A_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{Im}\sum_{|k|+2l=b} C_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\right)^2 \leq$$

$$\le -\delta_1|\sigma|^{2b}, \sigma \in E_n^+, \qquad (5)$$
$$0 < \delta_1 < \delta_0,$$

випадкова функція $\varphi(x,\omega)$ з імовірністю 1 неперевевна і обмежена при всіх $\omega \in \Omega$. Тоді існує функція Гріна, за допомогою якої розв'язок задачі (1) – (3) визначається формулою

$$u(t,x,\omega) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x'-\xi',x_n)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi, \qquad (6)$$

де $T_{x_n}^{\xi_n}$ – оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору B_{x_n} [6, с. 14]

$$T_{x_n}^{\xi_n} f(x) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi f(x'\sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\alpha})\sin^{2\nu}\alpha d\alpha.$$

Доведення. Шукатимемо розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді оберненого перетворення Фур'є-Бесселя

$$u(t,x,\omega) = F^{-1}[v(t,\sigma,\omega)](t,x,\omega) =$$
$$= c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{-i\sigma'x'}v(t,\sigma,\omega)j_\nu(\sigma_n,x_n)\sigma_n^{2\nu+1}d\sigma. \qquad (7)$$

Тут $c'_\nu = (2\pi)^{-n}2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1)$, j_ν – нормована функція Бесселя, $v(t,\sigma,\omega)$ є розв'язком задачі для звичайного стохастичного рівняння з оператором Бесселя та імпульсною дією

$$d_t v(t,x,\omega) = \sum_{|k|+2l\le 2b} A_{kl}(t)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\times$$
$$\times v(t,\sigma,\omega)dt + \sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(t)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\times$$
$$\times v(t,\sigma,\omega)dw(t,\omega), (t,x,\omega)\in \Pi\times\Omega,$$
$$t\in(\tau_j,\tau_{j+1}), j=\{1,\dots,N\}, \qquad (8)$$
$$v|_{t=0} = \tilde\varphi(\sigma), \ \ \sigma\in E_n^+, \qquad (9)$$
$$\Delta_t v(t,\sigma,\omega)|_{t=\tau_j} = L_j v(\tau_j-0,\sigma,\omega),$$
$$\omega\in\Omega, j\in\{1,\dots,N\}. \qquad (10)$$

Відмітимо, що оператор Фур'є-Бесселя [6, с. 14] визначений в просторі нескінченно диференційовних функцій, парних по x_n, спадних при $|x|\to\infty$ не повільніше, ніж $|x|^{-m}$ (m – довільне фіксоване число). На елементах цього простору визначена операція згортки

$$f*g = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} f(x'-\xi',x_n)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi. \qquad (11)$$

Задача в образах (8), (9) є задачею Коші для звичайного лінійного стохастичного рівняння, розв'язок якої отримується за допомогою формули Іто [7, с. 37] і з імовірністю 1 має вигляд

$$v(t,\sigma,\omega) = \tilde\varphi(\sigma)Q(t,t_0,\sigma,\omega). \qquad (12)$$

Тут

$$Q(t,\tau,\sigma,\omega) := \exp\left\{\int\limits_\tau^t\left[\sum_{|k|+2l\le 2b} A_{kl}(s)(i\sigma')^k\times\right.\right.$$
$$\left.\times(-\sigma_n^2)^l - \frac{1}{2}\left(\sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\right)^2\right]ds+$$
$$\left.+\int\limits_\tau^t \sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l dw(t,\omega)\right\},$$
$$Q(\tau,\tau,\sigma,\omega)=1,$$

є нормальним фундаментальним розв'язком (НФР) стохастичної задачі Коші (8), (9).

Ненульовий розв'язок задачі з імпульсною дією (8) – (10) назвемо матрицантом $V(t,t_0,\sigma,\omega)$, якщо з ймовірністю 1 $V(t_0,t_0,\sigma,\omega)=1$. Як показано [1, с. 56], матрицант виписується за допомогою НФР і має вигляд

$$V(t,t_0,\sigma,\omega) = Q(t,\tau_r,\sigma,\omega)(1+L_r)\times$$
$$\times\prod_{p=r-1}^{1} Q(\tau_{p+1},\tau_p,\sigma,\omega)(1+L_p)Q(\tau_p,t_0,\sigma\omega),$$
$$t_0<\tau_1<\dots<\tau_r<t\le\tau_{r+1}<\dots\le T,$$
$$r\in\{2,\dots,N-1\}. \qquad (13)$$

Таким чином, дістанемо, зображення розв'язку задачі (1) – (3) в образах Фур'є

$$v(t,\sigma,\omega) = V(t,t_0,\sigma,\omega)\cdot\tilde{\varphi}(\sigma). \qquad (14)$$

Нехай G – функція Гріна, яка є оберненим перетворенням Фур'є-Бесселя матриціанта

$$G(t,\tau,x,\omega) = F^{-1}[V(t,\tau,\sigma,\omega)](t,x,\omega) =$$

$$= c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{-i\sigma' x'} V(t,\tau,\sigma,\omega) j_\nu(\sigma_n\cdot x_n)\sigma_n^{2\nu+1}d\sigma,$$

$$t>\tau, \qquad (15)$$

$$\Delta_t G(t,t_0,x,\omega)|_{t=\tau_j} = L_j G(\tau_j - 0, t_0, x,\omega),$$

$$\omega\in\Omega, j\in\{1,\dots,N\}.$$

Введемо позначення

$$c^*(s,\sigma) := \mathrm{Re}\sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(i\sigma)^k(-\sigma_n^2)^l;$$

$$c^{**}(s,\sigma) := \mathrm{Im}\sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(i\sigma)^k(-\sigma_n^2)^l.$$

Тоді НФР набуває вигляду

$$Q(t,t_0,\sigma\omega) = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\sum_{|k|+2l\le 2b} A_{kl}(s)(i\sigma)^k\times\right.$$

$$\times(-\sigma_n^2)^l - \frac{1}{2}(c^*(s,\sigma))^2 + \frac{1}{2}(c^{**}(s,\sigma))^2\Big)ds +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} c^*(s,\sigma)dw + i\int\limits_{t_0}^{t} c^{**}(s,\sigma)dw -$$

$$\left. -i\int\limits_{t_0}^{t} c^*(s,\sigma)ds\right\},$$

звідки

$$|Q(t,t_0,\sigma,\omega)| = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\mathrm{Re}\sum_{|k|+2l\le 2b} A_{kl}(s)\times\right.$$

$$\times(i\sigma')(-\sigma_n^2)^l - \frac{1}{2}((c^*(s,\sigma))^2 - (c^{**}(s,\sigma))^2)\Big)ds +$$

$$\left. +\int\limits_{t_0}^{t} c^*(s,\sigma)dw(s,\omega)\right\}. \qquad (16)$$

Подіємо математичним сподіванням на ліву і праву частини останньої формули. За властивістю математичного сподівання інтеграла Вінера-Іто для сумовних з квадратом функцій [7, с. 83], маємо

$$M|Q(t,t_0,\sigma,\omega)| = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\mathrm{Re}\sum_{|k|+2l\le b} A_{kl}(s)\times\right.$$

$$\left.\times(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l + \frac{1}{2}(c^{**}(s,\sigma))^2\Big)ds\right\}. \qquad (17)$$

Врахуємо, що для всіх $\sigma\in E_n$ виконується нерівність

$$(c^{**}(s,\sigma))^2 \le c_0(|\sigma|^{2b}+1), c_0<\delta_0.$$

З останньої нерівності та умови (5) дістанемо оцінку

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{|k|+2l\le 2b} A_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Im}\sum_{|k|+2l\le b} C_{kl}(s)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^l\Big)^2 \le$$

$$\le -\delta_2|\sigma|^{2b} + \delta_3, \delta_2>0.$$

Ця нерівність гарантує існування оберненого перетворення Фур'є та Бесселя для матриціанта $F_\sigma^{-1}[V(t,\tau,\sigma,\omega)]$. Оцінимо математичне сподівання матриціанта

$$M\{|V(t,t_0,\sigma,\omega)|\} \le c\exp\{-\delta_2(t-\tau_p)|\sigma|^{2b}\}\times$$

$$\times|1+L_p|\prod_{m=p-1}^{1}\exp\{-\delta_2(\tau_{m+1}-\tau_m)|\sigma|^{2b}\}|1+L_p|\times$$

$$\times\exp\{-\delta_1(\tau_\nu - t_0)|\sigma|^{2b}\} = c\prod_{\nu=1}^{p}|1+L_p|\times$$

$$\times\exp\{-\delta_2|\sigma|^{2b}(t-t_0)\}, t_0<\tau_1<\dots<\tau_p<t\le$$

$$\le\tau_{p+1}<\dots\le T, p\in\{2,\dots,N-1\}, \sigma\in E_n^+. \qquad (18)$$

Застосуємо до інтеграла, яким визначається функція Гріна G, леми [5, с. 14] та [6, с.

36] про перетворення Фур'є та Бесселя цілих функцій і дістанемо нерівність для похідних

$$M\{|D^l_{x'}D^r_{x_n}B^l_{x_n}G(t,\tau,x,\xi)|\}\le$$

$$\le C_{klr}\prod_{p=1}^{N}|1+L_p|(t-\tau)^{-(n_\nu+|k|+2l+r)/(2b)}\times$$

$$\times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{\exp\Big(-c\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{|x_i-\xi'_i|}{(t-\tau)^{1/2b}}\Big)^q\Big)\right\},\quad (19)$$

де $n_\nu=n-1+2\nu$, $q=2b(2b-1)^{-1}$, а також

$$|M\{D^k u\}|\le c_k\cdot t^{-\frac{k}{2b}}\cdot\sup\{M\{\varphi\}\},\qquad (20)$$

$$D^k_x u=D^{k'}_{x'}B^{k_n}_{x_n},|k|\le 2b.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.

2. *Гихман И.И.* Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1979. – 31, № 5. – с. 483-489.

3. *Гихман И.И.* О смешанной задаче для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 3. – с. 367-372.

4. *Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части. – Укр. мат. журн., 1985, 37, № 1. – С. 13-20.

5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – К.: Наукова думка, 1964. – 444 с.

6. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 353 с.