УДК 517.9

©2008 р. К. В. Пасюк

Буковинська державна фінансова академія, Чернівці

ПРО ІСНУВАННЯ ЛІПШІЦЕВИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ НЕСКІНЧЕННУ КІЛЬКІСТЬ ВІДХИЛЕНЬ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

Знайдено достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей ліпшицевих інваріантних торів зліченних систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь, що визначені на нескінченновимірних торах та містять нескінченну множину сталих відхилень скалярного аргументу.

We find sufficient conditions for the existence of Lipschitz invariant tors for countable systems of linear differential-difference equations defined on infinite dimensional tors and containing an infinite set of constant deviations of scalar variable, in the space of bounded sequences.

У монографіях [2, 3] відомий метод функції Гріна-Самойленка [1] застосовано до дослідження інваріантних торів зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, а в монографії [4] — до дослідження інваріантних торів зліченних систем різницевих рівнянь. У цій роботі одержано достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей ліпшіцевого інваріантного тору лінійної зліченної системи диференціально-різницевих рівнянь, що визначена на нескінченновимірному торі і містить нескінченну множину сталих відхилень скалярного аргументу.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t)+$$
$$+B(\varphi,t)x(t+\Delta) + c(\varphi,t). \qquad (1)$$

Вважатимемо, що у цій системі:

1. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots) \in \mathfrak{M}$; відображення $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), a_3(\varphi), \dots\}$ визначене періодичними $\forall i \in N$ відносно координат $\varphi_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π функціями $a_i(\varphi) : \mathfrak{M} \to R^1$, що дозволяє вважати перше рівняння системи (1) визначеним на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$, а ці координати вважати кутовими координатами на ньому; N — множина натуральних чисел, $\mathfrak{M}$ — банахів простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$; символом $\frac{d\varphi}{dt}$ позначено вектор

$$\{\frac{d\varphi_1}{dt}; \frac{d\varphi_2}{dt}; \frac{d\varphi_3}{dt}, \dots\};$$

$\varphi_t(\varphi) = (\varphi_{1_t}(\varphi), \varphi_{2_t}(\varphi), \dots)$ — розв'язок вказаного рівняння, що задовольняє початкову умову $\varphi = \varphi_0(\varphi)$;

2. $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{ij=1}^\infty$ — нескінченна матриця з неперервними по φ і періодичними відносно $\varphi_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π елементами;

3. $B(\varphi,t) = [b_{ij}(\varphi,t)]_{ij=1}^\infty$ — нескінченна матриця; функції

$$b_{ij}(\varphi,t) = b_{ij}(y_1(\varphi,t), y_2(\varphi,t), \dots)$$

здійснюють відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty = \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{T}_\infty \times \dots$ у простір R^1; точки

$$y_i(\varphi,t) = \Big(\varphi_{1_{t+\Gamma_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Gamma_{i2}}}(\varphi), \dots\Big)$$

$\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$; $x(t+\Delta) = (x_1(t + \Delta_1), x_2(t + \Delta_2), \dots)$; Γ_{ij} та Δ_i — довільні фіксовані дійсні числа ; $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$. При цьому:

а) функції $b_{ij}(y) = b_{ij}(y_1, y_2, \dots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора y_s для будь-яких натуральних i, j, s;

б) при всіх $\{i,j\} \subset N$ функції $b_{ij}(y)$ неперервні відносно y на $\mathcal{T}_\infty^\infty$ і $\forall s \in N$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{y\in\mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(y)| \le B^0 = const < \infty.$$

4. Функція

$$c(\varphi,t) = (c_1(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t),\dots),$$
$$c_2(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t),\dots),\dots)$$

відображує множину $\mathcal{T}_\infty^\infty$ у простір $\mathfrak{M}$, тобто $c_i(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t),\dots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ для будь-якого натурального числа i; точки

$$z_i(\varphi,t) = \Big(\varphi_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\varphi),\dots\Big)$$

$\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — довільні фіксовані дійсні числа, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i,j\} \subset N$. При цьому:

а) функції $c_i(z) = c_i(z_1, z_2,\dots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора z_j для будь-яких натуральних i та j;

б) функції $c_i(z)$ неперервні відносно z на $\mathcal{T}_\infty^\infty$ і рівномірно обмежені на цій множині, тобто $\|c(z)\| = \sup_i |c_i(z)| \le C^0 = const > 0$ $(i = 1,2,3,\dots)$.

Наступні умови назвемо умовами (**A**):

1) $\forall\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ $\|a(\varphi)\| = \sup_i\{|a_i(\varphi)|\} \le A = const > 0$;

2) $\forall\{\varphi,\psi\} \subset \mathcal{T}_\infty$ $\|a(\varphi)-a(\psi)\| \le \alpha\|\varphi-\psi\|$, де $\alpha = const > 0$.

Відомо [2], що при виконанні останніх умов перше рівняння системи (1) $\forall\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ має розв'язок $\varphi_t(\varphi)$, що задовольняє початкову умову $\varphi = \varphi_0(\varphi)$. Крім того, якщо справджуються умови (**A**) та нерівності

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\varphi)| \le P^0 = const < \infty,$$
$$s = 1,2,3,\dots, \tag{2}$$

то для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x. \tag{3}$$

існує 2π-періодичний відносно φ_i $(i \in N)$ матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ (див. [2, ст. 108]), елементи якого неперервні по τ $\forall\tau \in R^1$ (див. наслідок 5.1 з [2, ст. 38]).

Норму матриці $P(\varphi)$ задамо рівністю $\|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^\infty |p_{ij}(\varphi)|$ і через $C^0(\mathcal{T}_\infty)$ позначимо множину визначених на торі $\mathcal{T}_\infty$ обмежених за нормою вектор-функцій і матриць, координати і елементи яких відповідно 2π-періодичні по $\varphi_i (i = 1,2,3,\dots)$ і неперервні відносно φ. Множину елементів з $C^0(\mathcal{T}_\infty)$, що задовольняють умову Ліпшиця по φ, позначимо через $C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ і вважатимемо, що матриця $P(\varphi) \in C_\varphi(\mathcal{T}_\infty)$, якщо вона належить множині $C^0(\mathcal{T}_\infty)$ і для неї справджується умова (2).

Якщо існує така матриця $C(\varphi) \in C_\varphi(\mathcal{T}_\infty)$, що функція

$$G_t(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le t; \\ \Omega_\tau^t(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E], & \tau > t \end{cases}$$

задовольняє нерівність

$$\|G_t(\tau,\varphi)\| \le K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}$$

для всіх $\{t,\tau\} \subset R^1$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, де K і γ — додатні сталі, що не залежать від φ, t, τ, E — нескінченна одинична матриця, то функцію $G_0(\tau,\varphi)$ називають функцією Гріна-Самойленка (скорочено ФГС) задачі про інваріантні тори лінійного розширення рівняння (3).

Інваріантним тором $\mathcal{T}^0$ системи рівнянь (1), називають множину точок $x \in \mathfrak{M}$, породжену функцією

$$x = u^0(\varphi) = (u_1^0(\varphi), u_2^0(\varphi),\dots),\ \varphi \in \mathcal{T}_\infty,$$

якщо вона 2π-періодична відносно φ_i $(i = 1, 2,3,\dots)$, обмежена за нормою і при будь-яких $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $t \in R^1$ задовольняє рівність

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+B(\varphi,t)u(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t), \tag{4}$$

де

$$u(\varphi,t+\Delta) = (u_1(\varphi_{t+\Delta_1}(\varphi)), u_2(\varphi_{t+\Delta_2}(\varphi)),\dots).$$

Розглянемо спочатку рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + c(\varphi,t), \tag{5}$$

для якого сформулюємо таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $a(\varphi)$ *належить* $C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$, $P(\varphi)$ *належить* $C_\varphi(\mathcal{T}_\infty)$, *та для рівняння (3) існує ФГС* $G_t(\tau,\varphi)$. *Тоді рівняня (5) має інваріантний тор* $\mathcal{T}^0$, *породжений функцією*

$$u^0(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)c(\varphi,\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Якщо до того ж виконуються умови:

1) $\forall\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_\infty \quad \|P(\varphi)-P(\bar\varphi)\|\le p^0\|\varphi-\bar\varphi\|$, $p^0=const>0$;

2) $\forall\{z,\bar z\}\subset\mathcal{T}^\infty_\infty \quad \|c(z)-c(\bar z)\|\le\eta\|z-\bar z\|$, $\eta=const>0$;

3) рівняння (3) не має обмежених на R^1 *розв'язків, крім нульового;*

4) множина Δ_{ij} *відхилень аргументу* t *обмежена, тобто* $|\Delta_{ij}|\le\Delta^*=const<\infty$ $\forall\{i,j\}\subset N$;

5) $\gamma>\alpha$,

то функція $u^0(\varphi)$ *є ліпшицевою на торі* $\mathcal{T}_\infty$.

Доведення цієї леми традиційне і ми подамо його у схематичному вигляді. Зауважимо, що з включення $a(\varphi)\in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ випливають умови (**A**). Неважко також переконатися, що функції $c_i(z(\varphi,t))$ неперервні по t на R^1 при всіх $i\in N$. Цього достатньо, щоб невласний інтеграл у рівності (6) збігався рівномірно відносно $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі і породжував інваріантний тор рівняння (5).

Обгрунтуємо тепер ліпшицевість функції $u^0(\varphi)$. При умовах леми для всіх φ та $\bar\varphi$ з $\mathcal{T}_\infty$ справджується нерівність

$$\|u^0(\varphi)-u^0(\bar\varphi)\|\le$$

$$\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\varphi)-G_0(\tau,\bar\varphi)\|\|c(\varphi,\tau)\|d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\bar\varphi)\|\|c(\varphi,\tau)-c(\bar\varphi,\tau)\|d\tau. \qquad (7)$$

Враховуючи, що $\gamma>\alpha$, оцінки

$$\|G_0(\tau,\varphi)-G_0(\tau,\bar\varphi)\|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(t_1,\varphi)\|\|P(\varphi_{t_1}(\varphi))-P(\varphi_{t_1}(\bar\varphi))\|\times$$

$$\times\|G_{t_1}(\tau,\bar\varphi)\|dt_1\le K^2p^0\|\varphi-\bar\varphi\|\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{(-\gamma+\alpha)|t_1|-\gamma|t_1-\tau|\}dt_1\le$$

$$\le K^2p^0\|\varphi-\bar\varphi\|\left\{\frac{\exp\{-(\gamma-\alpha)|\tau|\}}{2\gamma-\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\{-(\gamma-\alpha)|\tau|\}}{\alpha}+\frac{\exp\{-\gamma|\tau|\}}{2\gamma-\alpha}\right\};$$

$$\|c(\varphi,\tau)-c(\bar\varphi,\tau)\|\le$$

$$\le\eta\sup_{i\in N}\sup_{j\in N}\left\{|\varphi_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\varphi)-\varphi_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\bar\varphi)|\right\}\le$$

$$\le\eta\sup_{i\in N}\sup_{j\in N}\exp\{\alpha|\tau+\Delta_{ij}|\}\|\varphi-\bar\varphi\|\le$$

$$\le\eta\exp\{\alpha|\tau|\}\exp\{\alpha\Delta^*\}\|\varphi-\bar\varphi\|$$

та оцінку (7), одержуємо нерівність

$$\|u^0(\varphi)-u^0(\bar\varphi)\|\le\Gamma^0\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

де

$$\Gamma^0=C^0H^0_1+H^0_2,$$

$$H^0_1=2K^2p^0\frac{2\gamma+\alpha\gamma-\alpha^2}{\alpha\gamma(\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha)},$$

$$H^0_2=\frac{2K\eta\exp\{\alpha\Delta^*\}}{\gamma-\alpha}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 та наступні вимоги:*

1) $\forall\{y,\bar y\}\subset\mathcal{T}^\infty_\infty$ $\|B(y)-B(\bar y)\|\le\beta\|y-\bar y\|$, $\beta=const>0$;

2) множини відхилень Γ_{ij} *та* Δ_i *аргументу* t *обмежені, тобто* $|\Gamma_{ij}|\le\Gamma^*=const<\infty$ *та* $|\Delta_i|\le\Delta_*=const<\infty$ $\forall\{i,j\}\subset N$.

Тоді рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=P(\varphi_t(\varphi))x(t)+$$

$$+B(\varphi,t)u^0(\varphi,t+\Delta)+c(\varphi,t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ *ліпшицевий інваріантний тор* $\mathcal{T}^1$, *породжений функцією*

$$x=u^1(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)c^1(\varphi,\tau)d\tau,$$

де $c^1(\varphi,\tau) = B(\varphi,\tau)u^0(\varphi,\tau+\Delta) + c(\varphi,\tau)$.

Доведення проводиться аналогічно до доведення леми 1, тому ми тут наведемо лише обгрунтування ліпшицевості функції $u^1(\varphi)$. Неважко переконатися, що при будь-яких φ та $\bar\varphi$ з тору $\mathcal{T}_\infty$ справджуються оцінки

$$\|u^0(\varphi\| \le \frac{2KC^0}{\gamma},\ \|c^1(\varphi,\tau)\| \le$$
$$\le C^0\left(\frac{2KB^0}{\gamma}+1\right) = C^1,$$
$$\|u^0(\varphi,\tau+\Delta) - u^0(\bar\varphi,\tau+\Delta)\| \le$$
$$\le \Gamma^0\left\{\exp\{\alpha(|\tau|+\Delta_*)\}\|\varphi-\bar\varphi\|\right\},$$
$$\|B(\varphi,\tau) - B(\bar\varphi,\tau)\| \le$$
$$\le \beta\exp\{\alpha|\tau|\}\exp\{\alpha\Gamma^*\}\|\varphi-\bar\varphi\|,$$
$$\|c^1(\varphi,\tau) - c^1(\bar\varphi,\tau)\| \le \|c(\varphi,\tau) - c(\bar\varphi,\tau)\| +$$
$$+\|B(\varphi,\tau)\|\|u^0(\varphi,\tau+\Delta) - u^0(\bar\varphi,\tau+\Delta)\| +$$
$$+\|B(\varphi,\tau) - B(\bar\varphi,\tau)\|\|u^0(\bar\varphi,\tau+\Delta)\| \le$$
$$\le \big\{\eta\exp\{\alpha|\tau| + \alpha\Delta^*\} + B^0\Gamma^0\exp\{\alpha|\tau|+$$
$$+\alpha\Delta_*\} + \frac{2KC^0}{\gamma}\beta\exp\{\alpha|\tau| + \alpha\Gamma^*\}\}\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

звідки випливає нерівність

$$\|u^1(\varphi) - u^1(\bar\varphi)\| \le \Gamma^1\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

в якій

$$\Gamma^1 = C^1H_1^0 + \eta\exp\{\alpha|\tau| + \alpha\Delta^*\} +$$
$$+B^0\Gamma^0\exp\{\alpha|\tau| + \alpha\Delta_*\} +$$
$$+\frac{2KC^0}{\gamma}\beta\exp\{\alpha|\tau| + \alpha\Gamma^*\},$$

що завершує доведення леми 2.

Зрозуміло, що при виконанні умов леми 2 рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) +$$
$$+B(\varphi,t)u^1(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}^2$, породжений функцією

$$x = u^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)c^2(\varphi,\tau)d\tau,$$

де $c^2(\varphi,\tau) = B(\varphi,\tau)u^1(\varphi,\tau+\Delta) + c(\varphi,\tau)$, і ця функція на торі $\mathcal{T}_\infty$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|u^2(\varphi) - u^2(\bar\varphi)\| \le \Gamma^2\|\varphi-\bar\varphi\|,\ \Gamma^2 = const > 0.$$

Лема 3. *При виконанні умов леми 2 для будь-якого* $k \in N\bigcup\{0\}$ *рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) +$$
$$+B(\varphi,t)u^k(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}^{k+1}$, *породжений функцією*

$$x = u^{k+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)c^{k+1}(\varphi,\tau)d\tau,$$

де $c^{k+1}(\varphi,\tau) = B(\varphi,\tau)u^k(\varphi,\tau+\Delta) + c(\varphi,\tau)$, *причому функція* $u^k(\varphi)$ *задовольняє на торі* $\mathcal{T}_\infty$ *умову Ліпшиця*

$$\|u^k(\varphi) - u^k(\bar\varphi)\| \le \Gamma^k\|\varphi-\bar\varphi\| \qquad (8)$$

з коефіцієнтом $\Gamma^k = const > 0$.

Доведення цієї леми здійснюється методом повної математичної індукції і не викликає особливих труднощів.

Наступне твердження надає достатні умови існування інваріантного тору рівняння (1).

Теорема. *Нехай виконуються умови леми 2 та справджується нерівність* $2KB^0 < \gamma$. *Тоді послідовність* $\{u^k(\varphi)\}_{k=1}^\infty$ *рівномірно відносно* $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ *збігається за нормою простору* $\mathfrak{M}$ *до неперервної на* $\mathcal{T}_\infty$ *функціїї* $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор* $\mathcal{T}$ *рівняння (1).*

Якщо множина чисел Γ^k $(k \in N)$ *обмежена, то ця функція задовольняє умову Ліпшиця, тобто* $\forall\{\varphi,\bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u(\varphi) - u(\bar\varphi)\| \le U\|\varphi-\bar\varphi\|, \qquad (9)$$

де $U = const > 0$.

Доведення. При умові, що $2KB^0 < \gamma$, методом повної математичної індукції переконуємося в правильності оцінок

$$\|c^k(\varphi,\tau)\| \le \frac{C^0\gamma}{\gamma - 2KB^0},$$

$$\|u^k(\varphi)\| \leq \frac{2KC^0}{\gamma - 2KB^0},$$

які діють рівномірно відносно $k \in N$.

З нерівностей

$$\|c^{k+1}(\varphi,\tau) - c^k(\varphi,\tau)\| \leq$$
$$\leq B^0\|u^k(\varphi,\tau+\Delta) - u^{k-1}(\varphi,\tau+\Delta)\|,$$
$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\| \leq$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\|\|c^{k+1}(\varphi,\tau) - c^k(\varphi,\tau)\|d\tau,$$

поклавши

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty} \|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|,$$

неважко одержати індуктивну оцінку

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 \leq$$
$$\leq \frac{2KB^0}{\gamma}\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0,$$

що приводить до нерівності

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 \leq$$
$$\leq \left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^k \|u^1(\varphi) - u^0(\varphi)\|_0.$$

Таким чином одержуємо оцінку

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 \leq \left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^k \frac{4KC^0}{\gamma - 2KB^0},$$

з якої при $2KB^0 < \gamma$ випливає фундаментальність послідовності $\{u^k(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$. Отже, ця послідовність рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$.

Залишається показати, що ця функція визначає інваріантний тор рівняння (1). При всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ справджуються тотожності

$$\frac{du^{k+1}(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+B(\varphi,t)u^k(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t) \qquad (10)$$

і ряди $\sum_{j=1}^{\infty}\{p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) + +b_{sj}(\varphi,t)u_j^k(\varphi,t+\Delta)\}$ збігаються рівномірно відносно k та $t \in R^1$ при всіх $s \in N$, оскільки вони мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2KC^0}{\gamma - 2KB^0}\{\sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty} |p_{sj}| + \sup_{y\in\mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(y)|\}.$$

У цьому разі

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+b_{sj}(\varphi,t)u_j^k(\varphi,t+\Delta)\} \to$$
$$\to \sum_{j=1}^{\infty}\{p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j(\varphi_t(\varphi)) +$$
$$+b_{sj}(\varphi,t)u_j(\varphi,t+\Delta)\} \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

при $k \to \infty$ рівномірно відносно $t \in R^1$. Це дає можливість у рівності (10) перейти у покоординатному сенсі до границі при $k \to \infty$ і одержати тотожність (4). За умови, що $\Gamma^k \leq U \; \forall k \in N$, для доведення нерівності (9) достатньо перейти до границі при $n \to \infty$ у нерівності (8). Теорему доведено.

Одержані результати є новими і для систем у скінченновимірних просторах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Т. I: Аналитические методы. — Киев: ИМ АН УССР, 1970. — С. 495-499.

2. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Счётные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Издательство Института математики НАН Украины, 1993. — 308 с.

3. *Samoilenko A.M., Teplinskiy Yu.V.* Countable Systems of Differential Equations.— VSP, Utrecht-Boston, 2003. — 287 p.

4. *Самойленко А.М., Теплінський Ю.В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. — Київ: Видавництво Інституту математики НАН України, 2008. — 496 с.