УДК 517.956.4

©2008 р. Г. С. Пасічник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для виродженого рівняння типу Колмогорова другого порядку з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \to \infty$ будується фундаментальний розв'язок задачі Коші та встановлюються оцінки його похідної за основною змінною.

We construct a fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate equation of Kolmogorov's type of the second order with coefficients admitting growth as $|x| \to \infty$, and estimate its derivative with respect to the main variable.

Вироджені рівняння типу Колмогорова є узагальненням рівняння дифузії з інерцією, яке вперше одержав А.Н. Колмогоров при математичному моделюванні броунівського руху фізичної системи з n степенями свободи. При цьому враховувалась інерція системи. Це досягається тим, що стан системи задається значеннями її n координат $y_1, ..., y_n$ та їх похідних за часом $\dot{y}_1, ..., \dot{y}_n$. Найпростіше рівняння Колмогорова у випадку $n = 1$ має вигляд

$$(\partial_t + \dot{y}_1 \partial_{y_1} - \partial^2_{\dot{y}_1})u = f.$$

Це рівняння є виродженим за y_1 параболічним за Петровським відносно змінних t і $\dot{y}_1$. Воно належить до класу ультрапараболічних рівнянь.

У роботі розглядається рівняння, вироджене за двома змінними. Вивченню рівнянь з цього класу присвячені роботи С.Д. Ейдельмана, Г.П. Малицької, Л.М. Тичинської, С.Д. Івасишена, Л.Н. Андросової та О.Г. Возняк [1 – 3].

Основним у вивченні задачі Коші є поняття фундаментального розв'язку задачі Коші. Найбільш повні результати одержано у випадку, коли коефіцієнти є обмеженими. Зазначимо, що побудова і вивчення фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) проводиться з допомогою методу параметрикса Леві.

1. Нехай n-мірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, ..., x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, ..., x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, ..., x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 и n_3 – такі числа з $\mathbb{N}$, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ и $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}^n_+$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l}) \in \mathbb{Z}^{n_l}_+$, $l \in \{1, 2, 3\}$. T– задане додатне число, $\Pi_H = \mathbb{R}^n \times H$, $H \subset \mathbb{R}^n$.

Розглядається задача Коші для виродженого рівняння другого порядку типу Колмогорова

$$(S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, (t, x) \in \Pi_{0,T]}. \quad (1)$$

Тут

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}},$$

а $A(t, x, \partial_{x_1}) :=$

$$:= \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t, x) \partial_{x_{1i} x_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x)$$

диференціальний вираз за x_1 з коефіцієнтами, залежними від t і x. Змінні t та x_1 називатимемо основними [1].

Сформулюємо умови на конфіцієнти рівняння.

A_1. Існує неперервна функція $D:\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$;

2) функції $a_{ij}(t,x)$, $\{i,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, $b_j(t,x)\equiv a_j(t,x)(D(x))^{-1}, j\in\{1,...,n_1\}$, та $b_0(t,x)\equiv a_0(t,x)(D(x))^{-2}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, обмежені;

3) рівняння

$$(S-\sum_{i,j=1}^{n_1}a_{ij}(t,x)\partial_{x_{1i}x_{1j}}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,x)\partial_{x_{1j}}(-i\partial_{x_{1n_1+1}})-$$
$$-b_0(t,x)(-i\partial_{x_{1n_1+1}})^2)v(t,x,x_{1n_1+1})=0$$

з обмеженими коефіцієнтами та додатковою просторовою змінною x_{1n_1+1} є рівномірно параболічним.

A_2. Коефіцієнти рівняння мають неперервні похідні $\partial^l_{x_1}a_{ij}$, $\partial^l_{x_1}a_j$, $\{i,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, $\partial^l_{x_1}a_0$, $||l||\le 2$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial^l_{x_1}a_{ij}(t,x)|\le C(D(x))^{||l||(1-\epsilon)},\quad |l|\le 2,$$
$$|\partial^l_{x_1}a_j(t,x)|\le C(D(x))^{1+||l||(1-\epsilon)},\quad |l|\le 2,$$
$$|\partial^l_{x_1}a_0(t,x)|\le C(D(x))^{2+||l||(1-\epsilon)},\quad |l|\le 2,$$

де $C>0$, $\epsilon\in(0,1)$; функції a_{ij},b_j, b_0, $\{i,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, є неперервними за t рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$.

A_3. Похідні $\partial^l_{x_1}a_{ij}$, $\{i,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, $\partial^l_{x_1}a_j$, $j\in\{1,...,n_1\}$, $\partial^l_{x_1}a_0$, $|l|\le 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за x відносно спеціальної відстані з [1] рівномірно щодо $t\in[0,T]$.

Рівняння, для якого виконується умова A_1 називаємо дисипативним, а функцію D – характеристикою дисипації рівняння.

2. Щоб побудувати ФРЗК для рівняння (1), скористаємось процедурою Леві. Для цього спочатку опишемо головний член формули для ФРЗК.

Розглянемо допоміжне рівняння

$$(S-\sum_{i,j=1}^{n_1}a_{ij}(t,x)\partial_{x_{1i}x_{1j}}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y)\partial_{x_{1j}}(-i\partial_{x_{1n_1+1}})-$$
$$-b_0(t,y)(-i\partial_{x_{1n_1+1}})^2)v(t,x,x_{1n_1+1})=0,$$
$$(t,x,x_{1n_1+1})\in\Pi_{(0,T]}\times\mathbb{R},\qquad (2)$$

де y – фіксована точка простору $\mathbb{R}^n$.

За умов A_1 та неперервності за t коефіцієнтів рівняння (2) для нього існує ФРЗК $Z_0(t,x;\tau,\xi;x_{1n_1+1}-\xi_{1n_1+1};y)$, $0\le\tau<t\le T$, $(x,\xi,y)\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_{1n_1+1},\xi_{1n_1+1}\}\subset\mathbb{R}$, для якого правильна оцінка

$$|\partial^{k_1}_{x_1}\partial^{k_{1n_1+1}}_{x_{1n_1+1}}Z_0(t,x;\tau.\xi;x_{1n_1+1}-\xi_{1n_1+1};y)|\le$$
$$\le C_{k_1k_{1n_1+1}}(t-\tau)^{-\frac{n_1+1+3n_2+5n_3+|k_1|+k_{1n_1+1}}{2}}\times$$
$$\times\exp\{-c\tfrac{|x_{1n_1+1}-\xi_{1n_1+1}|^2}{(t-\tau)}\}E_c(t,x;\tau,\xi),|k_1|\le 2,$$
$$c>0,\ k_{1n_1+1}\in\mathbb{Z}^{n_1}_+,\ C_{k_1k_{1n_1+1}}>0,$$

де [1]

$$E_c(t,x;\tau,\xi);=\exp\left\{-c\left(\tfrac{|x_1-\xi_1|^2}{4(t-\tau)}+\right.\right.$$
$$+3\tfrac{|x_2+2^{-1}(t-\tau)(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2}{(t-\tau)^3}+$$
$$\left.\left.+180\tfrac{|x_3+2^{-1}(t-\tau)(x'_2+\xi'_2)+12^{-1}(t-\tau)^2(x'_1+\xi'_1)-\xi_3|^2}{(t-\tau)^5}\right)\right\}.$$

При цьому, зокрема, функція $\partial^{k_1}_{x_1}Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y),z=z_1+iz_2\in\mathbb{C}$, як функція аргументу $(t-\tau)^{-1/2}z$ при фіксованих t, τ, x, ξ є цілою функцією, для якої правильні оцінки

$$|\partial^{k_1}_{x_1}Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)|\le$$
$$\le C_{k_1}(t-\tau)^{-\frac{(n_1+3n_2+5n_3+|k_1|+1)}{2}}E_c(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c\frac{|z_1|^2}{t-\tau}+c'\frac{|z_2|^2}{t-\tau}\},$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{C},\quad (3)$$

де $C_k>0$, $c>0$, $c'>0$, $d\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^n_+$.

Нехай $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$ – перетворення Фур'є $Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)$ за z. Тоді $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$, $0\le\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є ФРЗК для рівняння

$$(S-\sum_{i,j=1}^{n_1}a_{ij}(t,y)\eta\partial_{x_{1i}x_{1j}}-\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y)\partial_{x_{1j}}-$$
$$-b_0(t,y)\eta^2)v(t,x)=0,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

для довільно фіксованих точок $\eta\in\mathbb{R}$ і $y\in\mathbb{R}^n$.

З оцінок (3) на підставі властивостей перетворення Фур'є випливають оцінки

$$|\partial^{k_1}_{x_1}\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;z;y)|\le$$
$$\le C_{k_1}(t-\tau)^{-(n_1+3n_2+5n_3+|k_1|)/2}E_c(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c(t-\tau)\eta^2\},\quad 0\le\tau<t\le T,$$
$$\{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \eta\in\mathbb{R},\quad k\in\mathbb{Z}^n_+\quad (4)$$

Візьмемо

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv \hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;D(y);y).$$

За допомогою оцінок (4) одержуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_{k_1}(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|}{2}}\times$$
$$\times E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^2\},$$
$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (5)$$

Зауважимо, що функція $\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФРЗК для рівняння

$$\left(S - \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,y)\partial_{x_{1i}x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,y)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1j}} - \right.$$
$$\left. -a_0(t,y)\right)v(t,x,)=0, \quad (6)$$

для кожної фіксованої точки $y \in \mathbb{R}^n$.

Для ФРЗК $\hat{Z}$ правильні властивості, аналогічні відповідним властивостям для параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами.

Властивість 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (6) задовольняють умови A_1 та A_2. Тоді правильна оцінка*

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{y_1}^{r_1}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|+|r_1|(1-\varepsilon)}{2}}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^2\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y,y'\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$k_1 \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |r_1| \le 2.$$

Властивість 2. *Нехай коефіцієнти рівняння (6) задовольняють умови A_1 – A_3. Тоді справджуються оцінки*

$$\forall R>0 \ \exists C>0 \ \forall \{y,y'\} \subset Q_R:$$
$$\left|\Delta_{y_1}^{y_1'}\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{y_1}^{r_1}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le$$
$$\le C(d(y,y'))^{\lambda}(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|+|r_1|(1-\varepsilon)}{2}}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$\{x,\xi,y,y'\} \subset \mathbb{R}^n, \ k_1 \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |r_1| \le 2.$$

Властивість 3. *Нехай виконуються умови A_1 та A_2 і функція $Q(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, неперервна і для неї правильні оцінки*

$$|Q(t,x,\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3-\gamma}{2}-1}\times$$
$$\times E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \gamma \in (0;1], \quad (7)$$

та

$$\forall R>0 \ \exists \lambda_1 \in (0;1, \lambda_1 < \gamma, \ \forall\{x,x'\}) \subset Q_R:$$
$$|\Delta_{x_1}^{x_1'}Q(t,x,\tau,\xi)| \le C(d(x,x'))^{\lambda_1}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3-\lambda_2}{2}-1}\times$$
$$\times\left(E_C(t,x;\tau,\xi)+E_C(t,x';\tau,\xi)\right),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_2 := \gamma - \lambda_1. \quad (8)$$

Тоді функція $W(t,x;\tau,\xi) =$

$$= \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{Z}(t,x;\theta,y;y)Q(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1}u$, $|k_1| \le 2$, і Su, для яких праильні формули

$$\partial_{x_1}^{k_1}W(t,x;\tau,\xi) =$$
$$= \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1}\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)Q(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$|k_1|<2,$$
$$\partial_{x_1}^{k_1}W(t,x;\tau,\xi) =$$
$$= \int_\tau^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1}\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)Q(\theta,y;\tau,\xi)dy +$$
$$+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1}\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)dy\times$$
$$\times\Delta_y^{X(t-\theta)}Q(\theta,x;\tau,\xi)dy +$$
$$+ \int_\tau^{t_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1}\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)dy\right)\times$$
$$\times Q(\theta,X(t-\theta);\tau,\xi)d\theta, \quad |k|=2,$$
$$SW(t,x;\tau,\xi) = Q(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \int_\tau^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)Q(\theta,y;\tau,\xi)dy +$$
$$+ \int_\tau^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\times$$
$$\times\Delta_y^{X(t-\beta)}Q(\theta,y;\tau,\xi)dy +$$
$$+ \int_\tau^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} S\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)dy\right)\times$$
$$\times Q(\theta,X(t-\theta);\tau,\xi)d\theta,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ t_1 := \tfrac{t+\tau}{2}.$$

Доведення наведених властивостей здійснюється аналогічно як в [1] для параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами.

3. Наведемо основну теорему, що стосується ФРЗК рівняння (1).

Теорема. *Нехай виконуються умови* A_1 – A_3. *Тоді для рівняння (1) існує ФРЗК* $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *для якого правильні оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3+|k_1|}{2}}\times$$
$$\times E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad |k_1|\le 2.\quad (9)$$

4. ФРЗК для рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\hat Z(t,x;\tau,\xi;x)+W(t,x;\tau,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де $Q(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ – функція, яку підбираємо так, щоб функкія $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ була розв'язком рівняння (1) для довільної фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\pi_{[0;T]}$. Тут
$W(t,x;\tau,\xi)=$

$$=\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat Z(t,x;\theta,y;x)Q(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Припускатимемо, що шукана функція Q є неперервною і для неї правильні оцінки (7), (8).

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (9) і використавши припущення відносно q, одержимо на підставі властивості 3 для Q інтегральне рівняння

$$Q(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+$$
$$\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad (10)$$

де
$K(t,x;\tau,\xi)=\sum\limits_{i,j=1}^{n_1}a_{ij}(t,x)\times$

$$\times(\partial_{x_{1i}\gamma_{ij}}+\partial_{x_{1j}\gamma_{ii}}+\partial_{\gamma_{1i}\gamma_{ij}})\hat Z(t,x;\tau,\xi;\gamma)\Big|_{\gamma=x}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,x)\partial_{\gamma_{ij}}\hat Z(t,x;\tau,\xi;\gamma)\Big|_{\gamma=x}.$$

Оцінимо ядро K. Використовуючи умови на коефіцієнти рівняння, оцінки (5), властивість 1, маємо

$$|K(t,x,\tau,\xi)|\le C_0(t-\tau))^{-\frac{n_1+3n_2+5n_3-\gamma}{2}}\times$$
$$\times E_c(t,\tau,x-\xi),\qquad (11)$$

де $\gamma:=(2\varepsilon-1)/2$.

Оцінка (11) дозволяє розвязувати рівняння (10) методом послідовних наближень. При цьому Q визначається формулою

$$Q(t,x,\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,x,\tau,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad (12)$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\ge 2$
$K_m(t,x;\tau,\xi)=$

$$=\int\limits_\tau^t d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy.$$

Повторюючи процедуру оцінки повторних ядер, як в [1] для параболічних рівнянь, одержуємо, що ряд (12) збігається абсолютно й рівномірно і для його суми Q справджується оцінка (7). Аналогічно [1] доводиться правильність оцінки (8), а з допомогою властивості 3 одержуємо (9) для $\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

2. *Ейдельман С.Д., Малицька Г.П.* Про рівняння дифузії з інерцією, коефіцієнти яких ростуть // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – №2. – С.106–110.

3. *Малицька Г.П.* О вырождающихся параболических уравнениях с возростающими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. –Т.41, №2. – С.176–182.