УДК 517.9

©2008 р. В.В. Могильова, А.М. Ткачук

Національний університет харчових технологій, Київ

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ НЕЛІНІЙНИМИ СИСТЕМАМИ ІЗ КВАДРАТИЧНИМ КРИТЕРІЄМ ЯКОСТІ

В даній роботі вивчаються задачі управління нелінійними системами із квадратичним критерієм якості. Методом динамічного програмування доведено існування оптимального управління у вигляді управління з оберненим зв'язком.

Control problems of nonlinear systems with quadratic performance criterion is studied in present paper. An existence of optimal control as control with inverse relation is proved by the using of dynamic programming method.

Вступ. Предметом дослідження даної роботи є задача оптимального управління системами нелінійних по фазових переміщеннях диференціальних рівнянь із квадратичним критерієм якості. Ці критерії відіграють роль повної енергії системи і, таким чином, задача оптимального управління є задачею управління з мінімальними затратами. В останній час ці задачі знайшли застосування в фінансовій математиці у зв'язку із регулюванням портфеля цінних паперів при обмежених ресурсах [1].

Задача, яка вивчається в цій роботі, є оберненим результатом до відомої задачі про нелінійний регулятор [2], тобто задачі управління нелінійної по фазових змінних системи із квадратичним критерієм якості. Добре відомо, що у випадку додатної визначеності відповідної матриці квадратичної форми при управлінні в функціоналі, дана задача має розв'язок і, більше того, знаходження оптимального управління зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь типу Ріккаті. При цьому оптимальне управління лінійне по фазових переміщеннях. В подальшому задача узагальнювалася в різних напрямках. В роботах [3], [4] розглядалось узагальнення цієї задачі на нескінченновимірні стохастичні системи, в [5] розглянуто випадок, коли квадратичний функціонал не обов'язково невід'ємно визначений.

Наша робота представляє узагальнення лінійно-квадратичної задачі на випадок управління нелінійними по фазових змінних системами. На відміну від лінійного випадку, розв'язок відповідного рівняння Беллмана уже не можна шукати у вигляді квадратичної форми. В роботі пропонується розв'язувати це рівняння класичним методом характеристик [6], з доведенням можливості продовжуваності локального розв'язку на всю область.

Основні результати. В просторі R^n розглядається наступна задача оптимального управління з квадратичним по управлінню критерієм якості

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = f(t,x) + B(t)u \\ &x(s) = y \end{aligned} \qquad (1)$$

$$I(s,y,u) = \varphi(\tau, x(\tau)) +$$

$$\int_s^\tau [\psi(t,x(t)) + (N(t)u(t), u(t))]dt \to \inf \qquad (2)$$

Тут $t \in [0,T]$, $x \in R^n$, $Q^0 = (0,T) \times R^n$, Q - обмежена підобласть Q^0 з границею ∂Q. Нехай ∂Q є n-вимірна гіперповерхня в R^{n+1}, параметрично задана рівняннями:

$t = \xi_0(s)$, $x = \xi(s)$, $\xi = (\xi_1, ...\xi_n)$, $s = (s_1, ...s_n) \subset D \subset R^n$, D - область в R^n. Будемо вважати, що ξ_0, ξ - гладкі функції своїх аргументів, відображення $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi) : D \to R^{n+1}$ - взаємно однозначне і вектори $\frac{\partial \bar{\xi}(s)}{\partial s_1}$, ... $\frac{\partial \bar{\xi}(s)}{\partial s_n}$ лінійно незалежні, $u \in R^m$ - параметр управління.

Припустимо також, що гіперповерхня ∂Q правильно вкладена в R^{n+1}, тобто кожна послідовність $\{s^{(k)}\}$, для якої існує $s^* \in D$ таке, що $\bar{\xi}(s^{(k)}) \to \bar{\xi}(s^*)$ збігається до s^*. Початкове значення (s, y) належить Q, τ - момент першого досягнення границі Q (момент першого виходу із Q) точкою $(t, x(t))$.

Відносно функцій, що входять в (1), будемо вважати виконаними припущення:

1) функції $\varphi(t,x)$ і $\psi(t,x)$ - невід'ємні, гладкі по своїм аргументам в $\bar{Q}$, причому $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ - ліпшицева по x в $\bar{Q}$ ($\bar{Q}$ - замикання Q);

2)$f(t,x)$ - гладка в $\bar{Q}$ і $\frac{\partial f}{\partial x}$ - ліпшицева по x в $\bar{Q}$;

3)$n \times m$-вимірна матриця $B(t)$ - гладка в $\bar{Q}$;

4)$m \times m$-вимірна матриця $N(t)$ - додатно визначена в $\bar{Q}$ і гладка по t.

Управління $u = u(t,x) \subset R^m$ будемо шукати як управління з оберненим зв'язком, де $u(t,x)$ неперервна в $\bar{Q}$ по сукупності змінних і ліпшицева по x в даній області. Припустимими ж будемо вважати $u = u(t)$, якщо $u(t)$ - неперервна по t і $u(t) \in R^m$.

При цих припущеннях будемо розв'язувати задачу оптимального управління (1), (2).

Для розв'язку задачі динамічного програмування Беллмана, враховуючи умови на праву частину системи (1) і допустимість управління u, із стандартних теорем існування і єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що розв'язок задачі Коші $x_u(t,s,y)$ системи (1) при підстановці в (1) замість u допустимого управління $u(t)$, існує до моменту його виходу на границю області Q.

Позначимо $L_u = \frac{\partial}{\partial t} + (f(t,x) + B(t)u, \frac{\partial}{\partial x})$ - оператор Ляпунова системи (1).

Згідно теореми 4.4 із ([2], ст. 122) рівняння Беллмана задачі (1), (2) має вигляд:

$$\min_{u \in R^m}[L_u V(t,x) + \psi(t,x) + (N(t)u, u)] = 0 \quad (3)$$

з граничною умовою

$$V(t,x) = \varphi(t,x), (t,x) \in \partial Q \quad (4)$$

Або в більш розгорнутому виді:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (f(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}) + \psi(t,x) +$$

$$+ \min_{u \in R^m}\{(B(t)u, \tfrac{\partial V}{\partial x}) + (N(t)u, u)\} = 0 \quad (5)$$

Похідна по u виразу в фігурних дужках має вид:

$$B^*(t)\frac{\partial V}{\partial t} + 2N(t)u,$$

(* - означає транспонування). Прирівнюючи останній вираз до нуля, отримаємо:

$$u = -\tfrac{1}{2}N^{-1}(t)B^*(t)\tfrac{\partial V}{\partial x} \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (3), отримаємо рівняння Беллмана в формі, що явно не включає управління:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (f(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}) + \psi(t,x) -$$

$$-\tfrac{1}{4}(B(t)N^{-1}(t)B^*(t)\tfrac{\partial V}{\partial x}, \tfrac{\partial V}{\partial x}) = 0 \quad (7)$$

До нього потрібно приєднати умову:

$$V(t,x) = \varphi(t,x), (t,x) \in \partial Q \quad (8)$$

Для розв'язності задачі управління (1),(2), згідно вказаної вище теореми ([2], ст. 122) потрібно довести існування в Q гладкого розв'язку крайової задачі (7),(8). Подальша частина роботи пов'язана з доведенням даного факту.

Введемо деякі необхідні позначення і припущення. Позначимо через $p_0 = V_t'$, $p = (p_1, ..., p_n) = (V_{x_1}', ..., V_{x_n}')$, $\bar{p} = (p_0, p)$.

Тоді ліва частина (7) матиме вигляд:

$$F(t,x,\bar{p}) = p_0 + (f(t,x), p) + \psi(t,x) -$$

$$-\frac{1}{4}(B(t)N^{-1}(t)B^*(t)p, p) = 0$$

Оскільки вектор $\frac{\partial F}{\partial \bar{p}}$ завжди має своєю першою компонентою 1, то поверхня

$$F(t,x,\bar{p}) = 0 \quad (9)$$

регулярна.

Для однозначного визначення розв'язку задачі (7),(8) задамо градієнт шуканої функції в точках ∂Q. Очевидно, значення градієнта потрібно шукати серед розв'язків $\bar{p} = \bar{p}(s)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} \bar{p}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s_i} - \frac{\partial \varphi(\bar{\xi}(s))}{\partial s_i} = 0, i = \overline{1,n} \\ F(\bar{\xi}(s), \bar{p}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Будемо вважати, що система рівнянь (10) має гладкий розв'язок $\bar{p} = \bar{p}(s)$, $s \in D$ і початкова поверхня $F : t = \xi_0(s), x = \xi(s), V = \varphi(\bar{\xi}(s)), \bar{p} = \bar{p}(s), s \in D$ неособлива, тобто вектори

$$\frac{F(\xi_0(s),\xi(s),\bar{p}(s))}{\partial \bar{p}}, \frac{\partial \bar{\xi}(s)}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{\xi}(s)}{\partial s_n} \tag{11}$$

лінійно незалежні, для кожного $s \in D$.

Має місце

Теорема 1. *Якщо гіперповерхня ∂Q правильно вкладена в R^{n+1}, виконані умови 1)-4), то крайова задача (7),(8) має єдиний в $\bar{Q}$ розв'язок, неперервний разом зі своїми частинними похідними до другого порядку.*

Доведення. Будемо розв'язувати задачу (7),(8) методом характеристик. Початкова поверхня задається рівняннями:

$$t = \xi_0(s), x = \xi(s),$$

$$V = \varphi(\xi_0(s), \xi(s)), \bar{p} = \bar{p}(s), s \in D \tag{12}$$

Випишемо відповідну систему характеристик:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\alpha} = 1 \\ \frac{dx}{d\alpha} = f(t,x) - \frac{1}{2}B(t)(N(t))^{-1}B^*(t)p \\ \frac{dV}{d\alpha} = p_0 + (p, f(t,x)) - \\ -\frac{1}{2}(B(t)(N(t))^{-1}B^*(t)p, p) \\ \frac{dp_0}{d\alpha} = -(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}, p) - \frac{\partial \psi}{\partial t} + \\ +\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}(B(t)(N(t))^{-1}B^*(t)p, p) \\ \frac{dp}{d\alpha} = -(\frac{\partial f}{\partial x})^* p - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{13}$$

В даній системі два перших рівняння в об'єднані з останнім, розв'язуються незалежно від інших і в силу умов на праві частини мають розв'язки при всіх $(t, x) \in Q$. Невідомі $p_0(\alpha)$ і $V(\alpha)$ знаходяться тоді із двох залишившихся рівнянь простим інтегруванням. Таким чином, розв'язки системи існують, єдині і продовжувані до виходу t і x на границю області Q.

Оскільки початкова поверхня (12) неособлива, а гіперповерхня ∂Q правильно вкладена в R^{n+1}, то за теоремою 6.8 ([6], ст. 529), розв'язок задачі Коші з початковими даними (12) існує, єдиний в деякому околі ∂Q, що міститься всередині області Q, і представляє двічі гладку функцію $V = V(t, x)$.

Подальше доведення будується на можливості продовження даного локального розв'язку на всю область Q. Отже, нехай t_0 - таке значення $t \leq T$, при якому частина гіперповерхні $t = t_0$, яка повністю міститься в вказаному околі ∂Q існування розв'язку, має наступну властивість: розв'язки системи (13), які починаються на цій частині, залишають вказаний окіл існування $V(t, x)$ тільки через ∂Q, для довільного допустимого управління u. В силу компактності $\bar{Q}$ таке t_0 існує. При цьому гіперповерхня $t = t_0$ відтинає від області Q підобласть Q_{t_0} існування розв'язку $V(t, x)$ рівняння (7) з крайовою умовою (8).

Розглянемо тепер задачу оптимізації (1), (2) в Q_{t_0}, $(s, y) \in Q_{t_0}$, а τ - момент першого досягнення границі Q_{t_0}. Із побудови Q_{t_0} випливає, що τ є моментом першого досягнення ∂Q. Із вказаної вище теореми 4.4 ([2], ст. 122) випливає, що розв'язок $V(t, x)$ задачі (7), (8) співпадає з функцією Беллмана задачі (1), (2) при $(t, x) \in Q_{t_0}$. При цьому оптимальне управління задається формулою (6), а його значення на ∂Q визначається виразом

$$\bar{u}(t,x)|_{\partial Q} = -\frac{1}{2}N^{-1}(\xi_0(s))B^*(\xi_0(s))P(s), \tag{14}$$

$s \in D$.

Покажемо, що градієнт функції $V(t, x)$ обмежений деякою константою, яка не залежить від області Q_{t_0}. Для цього, по-перше, покажемо, що функція Беллмана задовольняє рівномірно в Q_{t_0} умову Ліпшиця по просторовій змінній, з константою, що не залежить від t_0.

Оскільки інфінум сім'ї функцій задовольняє умову Ліпшиця, то твердження буде доведено, якщо ми покажемо, що для довільного допустимого управління u, функція $I(s, y, u)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою, яка не залежить від вибору управління.

В (1), (2) від інтегрального функціоналу перейдемо до термінального:

$$\begin{cases} \dot{x_0} = \psi(t,x) + (N(t)u,u) \\ \dot{x} = f(t,x) + B(t)u \end{cases} \quad (15)$$

$$x(s) = y, x_0(s) = 0.$$

$$I(s,y,u) = \varphi(\tau, x(\tau)) + x_0(\tau) \to \inf \quad (16)$$

Тут $\tau = \tau(y)$ - момент виходу точки (t,x(t)) на ∂Q, $x(t)$ - розв'язок задачі Коші $x(s) = y$. Оскільки в області Q_{t_0} задача (15), (16) має розв'язок, при цьому оптимальне управління має вигляд (6), а на ∂Q визначається формулою (14), то інфінум в (16) по всіх допустимих управліннях співпадає з інфінумом по управліннях, які на ∂Q мало відрізняються від $\bar{u}$, тобто для деякого $\delta > 0$ задовольняють умову

$$|u(\xi_0(s)) - \frac{1}{2}N^{-1}(\xi_0(s))B^*(\xi_0(s))P(s)| <$$

$$< \delta, s \in D \quad (17)$$

Покажемо обмеженість градієнта функції $I(s,y,u)$ по y деякою абсолютною константою, яка не залежить ні від u, що задовольняють (17), ні від s і t_0. Для цього, очевидно, достатньо показати гладкість і обмеженість градієнта $\tau(y)$ - моменту виходу. Далі ∂Q зручно переписати в вигляді $\Phi(t,x) = 0$, де Φ - гладка по своїх аргументам функція. Позначимо $x(t,s,y)$ - розв'язок задачі Коші системи (1) з початковими даними (s,y). Тоді момент $\tau(y)$ визначається рівністю

$$\Phi(\tau, x(\tau,s,y)) = 0 \quad (18)$$

В околі кожної точки $(s,y) \in Q$ (s - фіксуємо) застосуємо теорему про неявну функцію до відображення $\Phi(\tau, x(\tau,s,y)) = G(\tau,y)$. Його гладкість по τ і y випливає із гладкості границі області Q і гладкості розв'язку задачі Коші по початкових даних. Обчислимо $\frac{\partial G}{\partial \tau}$ в точці (τ,y), коли τ - момент досягнення границі.

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \Phi'_\tau\Big|_{\partial Q} + \Phi'_x\Big|_{\partial Q}(f(\tau, x(\tau,s,y)) +$$

$$+ B(\tau)u(\tau)) \neq 0 \quad (19)$$

Останнє випливає із того, що поверхня Γ неособлива. Тоді вектор $(1, f(\tau, x(\tau,s,y)) + B(\tau)\bar{u}(\tau)) = (1, f(\tau, x(\tau,s,y)) - \frac{1}{2}B(\tau)N^{-1}(\tau)B^*(\tau)P(\tau))$ і вектори $\xi'_0, ..., \xi'_n$ - лінійно незалежні, тому вектор $(1, f(\tau, x(\tau,s,y)) - \frac{1}{2}B(\tau)\times N^{-1}(\tau)B^*(\tau)P(\tau))$ не належить дотичному простору до ∂Q, а тому не ортогональний до вектора (Φ'_τ, Φ'_x). Тоді, очевидно (19) виконується і для управління, які задовольняють (17) для досить малих δ. Тому співвідношення (18) в околі кожної точки y визначає гладку функцію $\tau(y)$ таку, що

$$\Phi(\tau, x(\tau,s,y)) \equiv 0.$$

Диференціюючи по y останнє співвідношення, отримаємо, що

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(\tau, x(\tau,s,y)) + B(\tau)u(\tau))\right]^{-1}$$

$$\times \frac{x(\tau,s,y)}{\partial y}. \quad (20)$$

Але похідна $\frac{x(\tau,s,y)}{\partial y}$ задовольняє рівняння в варіаціях

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t,s,y))}{\partial x} z,$$

яке є лінійним з обмеженою матрицею, має рівномірно по $t \in [0,\tau], (s,y) \in Q$ обмежені розв'язки. Із останнього та співвідношення (20), внаслідок компактності розглядуваних областей, умови (17), отримаємо обмеженість градієнта $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ деякою сталою, яка не залежить від t_0, s і управління з умовою (17).

Таким чином, $I(s,y,u)$ задовольняє по y умову Ліпшиця з сталою, що не залежить від s і u. Отже і функція Беллмана задовольняє таку ж умову по просторовій змінній, а, значить, у випадку її гладкості, маємо по цим змінним обмежені похідні. Обмеженість її похідної по t випливає тоді із рівняння (7).

Оскільки нуль дає нижнє значення критерію якості, а управління $u \equiv 0$ його верхнє значення в $\bar{Q}$, то і сама функція Беллмана обмежена в $\bar{Q}$.

Попередні оцінки не залежали від t_0, тому ми показали, що у випадку гладкості функції Беллмана, вона сама і всі її частинні похідні приймають значення в деякій обмеженій області, що не залежить від t_0.

Продовжимо тепер отриманий локальний розв'язок на всю область Q. Для цього розглянемо гіперплощину $t = t_0$, $x = s$, як нову початкову поверхню в R^{n+1}. Вона, очевидно, правильно вкладена в R^{n+1}. Нові початкові дані для рівняння (7) будуть мати вигляд:

$$t = t_0, x = s, V = V(t_0, s),$$
$$\bar{p} = gradV(t_0, s). \tag{21}$$

Неважко бачити, що для них виконана умова (11), тобто початкова поверхня неособлива. Тому, внаслідок теореми ([6], ст. 529) розв'язок продовжуваний на інтервал $|t - t_0| \leq h$.

Для доведення теореми, внаслідок компактності $\bar{Q}$, залишилося показати, що h не залежить від t_0.

Із доведення вище вказаної теореми випливає, що потрібний розв'язок задачі (7),(8) будується по її характеристикам, як розв'язкам

$$t = \alpha + t_0, x = \chi(t - t_0, t_0, s), \tag{22}$$
$$V = V(t - t_0, t_0, s), \bar{p} = \bar{p}(t - t_0, t_0, s).$$

системи (13) з початковими даними $t_0, s, V(t_0, s)$, $V_t^{'}(t_o, s)$, $V_{x_i}^{'}(t_o, s)$, $i = \bar{1,n}$, де $s \in R^n$, що $(t_0, s) \in Q$. За доведеним вище, вони належать деякому компакту K простору R^{2n+3}. Неособливість початкової поверхні дозволяє гладко розв'язати друге із рівнянь (22) відносно s в деякому околі t_0. Підставивши отримане співвідношення в два останніх рівняння із (22), отримаємо потрібний, двічі гладкий розв'язок.

Залишилося показати, що окіл розв'язності другого рівняння із (22) не залежить від t_0.

Аналізуючи доведення теореми про неявну функцію, застосовуючи до другого співвідношення в (22), можна помітити, що для незалежності від t_0 околу його розв'язності, враховуючи компактність області початкових данных, достатньо неперервної диференційовності функції $\chi(t - t_0, t_0, s, V(t_0, s), \bar{P}(t_0, s))$ по своїх аргументах. Це випливає із теореми 5.11([5], ст. 410) про диференціювання розв'язку задачі Коші в природній області визначення, яка є відкритою, зв'язною множиною. Тому функція $\chi(t - t_0, t_0, s, V(t_0, s), \bar{P}(t_0, s))$ рівномірно неперервно диференційовна по початкових даних із вказаного компакту K і по t, при $|t - t_0| < h$, де h не залежить від початкових даних із K. Отже функція $V(t, x)$ двічі гладко продовжується на відрізок $[t_0 - h, t_0]$. Внаслідок гладкості вона співпадає в новій області з функцією Беллмана, а значить для неї і її градієнтів справедливі апріорні оцінки, що отримані вище. З них випливає, що нові початкові дані $(t_0 - h, s, V(t_0 - h, s))$, $gradV(t_0 - h, s)$ належать компакту K, що дозволяє знову застосувати описану процедуру. Теорему доведено.

Як наслідок із доведеної теореми, отримується результат про розв'язність вихідної оптимізаційної задачі.

Теорема 2. *При виконані умов теореми 1 задача оптимізації має розв'язок. При цьому оптимальне управління задається формулою (6), де функція V - двічі гладкий розв'язок крайової задачі (7),(8).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ширяев.* Вероятность.—М.:Наука,—1989.—640с.

2. *У.Флеминг, Р.Ришел.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, – 1978. – 316с.

3. *A. Ichikawa.* Dinamic Programing approch to stochastic evolution equatios // SIAM.— J.Control and Optimization, Vol.17.—N1(1979)—p.152-173.

4. *M.Sirbu, G.Tessitore.* Null controllability of aninfinite dimensional SDE with state and cotrol-dependent noise // SIAM.—J.Control and Optimization, Vol.52.—N5(1999).

5. *G.Luo,E.Feng.* Generalized differential Riccati equation and indefinite stochastic LQ control with cross term // Appl.Math.and Computation.—155(2004).—p.121-135.

6. *А.М.Самойленко, М.О.Перестюк, І.О.Парасюк.* Диференціальні рівняння.—Київ.—"Либідь".—2003.—600с.