УДК 517.925

©2008 р. О. В. Матвій, С. А. Пернай, І. М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Схема апроксимації систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь застосована до лінійних стаціонарних систем із запізненням. Встановлена оцінка межі запізнення при якому нульовий розв'язок системи із запізненням є асимптотично стійкий.

An approximation scheme for differential-difference equations by systems of ordinary differential equations is applied to linear systems with time lag. An estimate for time lag when the trivial solution is asymptotically stable is obtained.

1. Дослідження стійкості лінійних систем із запізненням є важливою прикладною задачею, яка вивчається у багатьох наукових роботах [1-4]. Для лінійних систем із сталими коефіцієнтами та сталими запізненнями умовою їх асимптотичної стійкості є від'ємність дійсних частин коренів відповідних квазіполіномів. Знаходження всіх коренів квазіполіномів є достатньо складною задачею, тому важливе значення при дослідженні на стійкість набувають ознаки від'ємності дійсних частин всіх коренів квазіполінома.

В інженерній практиці системи із запізненням часто замінюються системами без запізнення на основі того, що воно мале [2, 3]. При цьому вважається, що режим стійкості системи із запізненням аналогічний режиму стійкості систем без запізнення. Важливою задачею в цьому випадку є знаходження межі запізнення, для якої зберігаються ці якісні властивості розв'язків [5-8].

У даній роботі здійснено аналіз ряду алгоритмів, які дозволяють оцінити верхню межу величини запізнення при якому зберігається стійкість. Застосовано схему апроксимації систем із запізненням системою звичайних диференціальних рівнянь, яка дозволяє більш точно оцінити область стійкості лінійних систем із запізненням. Схему апроксимації рівнянь із запізненням поширено на один клас диференціально-функціональних рівнянь.

2. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \qquad (1)$$

де A, B – матриці розмірності $n \times n$, $x \in R^n$, $\tau > 0$.

Відомо [1], що необхідною і достатньою умовою стійкості розв'язків системи (1) є розміщення нулів її квазіполінома

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - A - Be^{-\lambda\tau}) \qquad (2)$$

в півплощині $Re\lambda < 0$.

Перевірка цього критерію на практиці є достатньо складною, тому розглядають інші достатні умови стійкості, які простіші для перевірки. Зокрема, при малому запізненні τ система (1) замінюється системою без запізнення [5-8]

$$x'(t) = (A+B)x(t). \qquad (3)$$

Теорема 1 [6]. *Якщо нульовий розв'язок системи* (3) *асимптотично стійкий, то існує додатна стала* $\Delta = \Delta(A,B) > 0$ *така, що при умові* $0 \le \tau \le \Delta$ *нульовий розв'язок системи* (1) *також асимптотично стійкий.*

Розглянемо алгоритми знаходження величини запізнення Δ при якому теорема 1 є вірною.

Відзначимо, що перші оцінки величини Δ були встановлені в роботі [7]. Однак на практиці вони виявились дуже грубими.

Подальше їх уточнення було здійснено в роботах [5,8].

Якщо нульовий розв'язок системи (3) асимптотично стійкий, тоді для довільної симетричної додатновизначеної матриці C існує єдина додатновизначена матриця H, яка є розв'язком рівняння Ляпунова [7]

$$(A^T + B^T)H + H(A + B) = -C. \qquad (4)$$

Теорема 2 [8]. *Якщо нульовий розв'язок системи* (3) *асимптотично стійкий, тоді при* $0 \leq \tau \leq \Delta$, *де*

$$\Delta = \lambda_{\min}(C)[2(||A|| + ||B||)||HB||]^{-1} \times$$
$$\times (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{\frac{1}{2}}, \qquad (5)$$

нульовий розв'язок системи (1) *також асимптотично стійкий.*

Зауваження. *Обчислення значення* Δ *за формулою* (5) *є достатньо технічно складним. Величину* Δ *можна покращити за рахунок вдалого вибору матриці* C.

В роботі [9] описана проста достатня умова стійкості розв'язків системи (1) при всіх $\tau \in [0; \Delta]$, $\Delta > 0$.

Теорема 3 [9]. *Система* (1) *стійка при будь-якому запізненні* $\tau \in [0; \Delta]$, *якщо виконуються наступні умови:*

1) матриця $A + B$ *стійка;*

2) справджується матрична рівність

$$(E+j\omega(A+B)^T)(E-j\omega(A+B)) - \Delta^2 B^T B > 0, \qquad (6)$$
$$\forall \omega \geq 0, \ \ j = \sqrt{-1}.$$

3. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах добре вивчені в працях [10 - 12] на скінченному інтервалі.

Якщо нульовий розв'язок рівняння із запізненням асимптотично стійкий, можна розглядати близькість і на нескінченному інтервалі [13,14].

У випадку системи диференціальних рівнянь із запізненням (1) апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд [10, 14]

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= Ay_0(t) + By_m(t), \\ y_j'(t) &= \mu(y_{j-1}(t) - y_j(t)), \\ j &= \overline{1,m}, \ \ m \in \mathrm{N}, \ \ \mu = \tfrac{m}{\tau}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Для характеристичного многочлена системи (7)

$$D_m(\lambda) =$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda E - A & 0 & \dots & 0 & -B \\ -\mu E & (\mu - \lambda E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\mu E & (\mu - \lambda)E \end{vmatrix} \qquad (8)$$

має місце рівність [14]

$$D_m(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - B\left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^m\right) \times$$
$$\times (\mu + \lambda)^{mn}, \qquad (9)$$

а для фіксованих $\lambda \in \mathrm{Z}$ послідовність функцій

$$\Psi_m(\lambda) = \frac{D_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, \ \ m \in N \qquad (10)$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2).

Оскільки нулі функцій $D_m(\lambda)$ і $\Psi_m(\lambda)$, згідно рівності (10), збігаються, то нулі характеристичного многочлена (9) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних нулів квазіполінома (2).

Теорема 4 [14]. *Якщо нульовий розв'язок рівняння* (1) *експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує* $m_0 > 0$ *таке, що при* $m \geq m_0$ *нульовий розв'язок системи* (7) *експоненціально стійкий (нестійкий).*

Якщо для всіх $m \geq m_0$ *нульовий розв'язок системи* (7) *експоненціально стійкий (нестійкий), тоді й нульовий розв'язок рівняння* (1) *експоненціально стійкий (нестійкий).*

Теорему 4 можна використати для знаходження верхньої межі запізнення у системі (1) для якої зберігається стійкість.

Розглянемо випадок системи диференціальних рівнянь із запізненням (1) другого порядку. У цьому випадку, обчислюючи визначник (8), дістаємо характеристичний многочлен

$$D_m(\lambda) = s^{2\cdot m+2}\cdot\left(\frac{m}{\tau}\right)^2 + s^{2\cdot m+1}(-a_{11}\frac{m}{\tau}-$$
$$-a_{22}\frac{m}{\tau} - 2\cdot\left(\frac{m}{\tau}\right)^2) + s^{2\cdot m}(a_{11}a_{22} + a_{11}\frac{m}{\tau}+$$
$$+a_{22}\frac{m}{\tau} + \left(\frac{m}{\tau}\right)^2 - a_{21}a_{12}) + s^{m+1}(-b_{22}\frac{m}{\tau}-$$
$$-b_{11}\frac{m}{\tau}) + s^m(a_{11}b_{22} + b_{22}\frac{m}{\tau} + b_{11}a_{22}+ \quad (11)$$
$$+b_{11}\frac{m}{\tau} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}) + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь, у зручному вигляді для числового знаходження його нулів на ЕОМ.

Для обчислення нулів многочленів розроблено ряд стандартних процедур у спеціалізованих пакетах Mathematica, Maple, Mathlab, Mathcad. Усі нулі многочленна степеня $n < 100$ можна обчислити використовуючи вбудовану функцію Polyroots(v) із пакету Mathcad. Тут v – $n+1$ вимірний вектор коефіцієнтів многочлена. Результатом виконання цієї функції є вектор r, в якому знаходяться нулі многочлена, що розглядається.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням [9]

$$\begin{aligned} &x_1'(t) = x_2(t) - 0,7x_2(t-\tau),\\ &x_2'(t) = 1,9x_1(t) - 0,5x_2(t) - 2x_1(t-\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Встановимо межі запізнення τ , при якій нульовий розв'язок системи (1) асимптотично стійкий. Щоб скористатися формулою (5), визначаємо матрицю H із рівняння (4). Покладаючи $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ дістаємо $H = \begin{pmatrix} 9,667 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_{\min}(H) = 1,087$, $\lambda_{\max}(H) = 12,581$.

Отже згідно теореми 2 система (12) асимптотично стійка при $\tau \le 2,281\cdot 10^{-3}$.

У роботі [9] верхня межа запізнення для якої система є стійкою задається співвідношенням $\tau \le 0,405$.

Застосовуючи схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь і теорему 4 дістаємо, що система (12) є стійкою при $\tau \le 0,81$. Остання оцінка є досить точною, оскільки при $\tau = 0,811$ згідно теореми 4 система (12) вже є нестійкою.

Наведені приклади показують, що застосування схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь дозволяє розширити область стійкості диференціально-різницевих рівнянь.

5. Поширимо схему апроксимації рівнянь із запізненням [10,14] на лінійні диференціально-функціональні рівняння вигляду

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\int_{-\tau}^{0} x(t+s)ds, \quad (13)$$

де A, B, C – дійсні числа, $\tau > 0$.

Характеристичний квазіполіном рівняння (13) має вигляд

$$\lambda = A + Be^{-\lambda\tau} + \frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\tau}). \quad (14)$$

Замінюючи інтеграл у правій частині рівняння (13) за формулою лівих прямокутників дістанемо диференціально-різницеве рівняння

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)+$$
$$+C\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x(t - \tau + \frac{i\tau}{n}), \quad (15)$$

характеристичне рівняння якого має вигляд

$$\lambda = A + Be^{-\lambda\tau} + C\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(-\tau+\frac{i\tau}{n}\right)\lambda}. \quad (16)$$

Лема 1. *Для фіксованих* $\lambda \in Z$ *характеристичне рівняння* (16) *апроксимує квазіполіном* (14) *при* $n \to \infty$.

Доведення. Квазіполіном (16) можна представити у вигляді

$$\lambda = A + Be^{-\lambda\tau} + C\frac{e^{-\lambda\tau}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i\tau\lambda}{n}}}{n}. \quad (17)$$

Використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії маємо

$$\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i\lambda}{n}} = \frac{1-e^{\lambda\tau}}{1-e^{\frac{\lambda\tau}{n}}}.$$

Тоді рівність (17) перепишемо так

$$\lambda = A + Be^{-\lambda\tau} + \frac{Ce^{-\lambda\tau}(1-e^{\lambda\tau})}{n(1-e^{\frac{\lambda\tau}{n}})}. \qquad (18)$$

При $\lambda \neq 0$ та $x \in R$ має місце границя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-e^{\frac{\lambda}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\lambda$.

Переходячи тепер у рівності (18) до границі при $n \to \infty$ одержимо рівність

$$\lambda = A + Be^{-\lambda\tau} - \frac{C(e^{-\lambda\tau}-1)}{\lambda},$$

яка співпадає із квазіполіномом (14).

Лема 1 доведена.

Апроксимуємо ДРР (15) системою звичайних диференціальних рівнянь за схемою [10,12,14]

$$\begin{cases} z_0'(t) = Az_0(t) + Bz_m(t) + C\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} z_{l_i}(t), \\ z_i'(t) = m(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1,m}, \\ \qquad l_i = \left[\left(\frac{i\tau}{n} - \tau\right)m\right]. \end{cases} \qquad (19)$$

Характеристичний многочлен цієї системи має вигляд

$$D_m(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & \dots & \frac{C}{n} & B+\frac{C}{n} \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu & -(\mu+\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (20)$$

Нулі характеристичного многочлена (20) апроксимують [12,14] неасимптотичні нулі квазіполінома (16). Тоді, згідно леми 1, нулі характеристичного многочлена (20) будуть наближати і неасимптотичні нулі квазіполінома (14) для лінійного диференціально-функціонального рівняння (13).

Приклад. Розглянемо рівняння

$$x'(t) = \int_{-1}^{0} x(t+s)ds, \qquad (21)$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda^2 = 1 - e^{-\lambda}. \qquad (22)$$

Апроксимуємо рівняння (21) диференціально-різницевим рівнянням

$$z'(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z(t-1+\frac{i}{n}),$$

якому поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду (19).

Характеристичний многочлен апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь буде мати вигляд

$$D_m(s) = s^{m+1} - ms^m - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m^{l_i}s^{m-l_i}, \qquad (23)$$

де $l_i = \left[\left(\frac{i\tau}{n} - \tau\right)m\right]$.

За допомогою функції Polyroots із пакету Mathcad знаходимо корінь многочлена (23) із найбільшою дійсною частиною при $n = 25$ і $m = 17$. Дістаємо $\lambda = 0,697$.

Корінь квазіполінома (22) з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda = 0,7109$. Це значення добре узгоджується із одержаним вище наближеним значенням, згідно нашого алгоритму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовський Н.Н.* Некоторые задачи устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.

2. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука,1981. – 448 с.

3. *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

4. *Слюсарчук В.Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: 2003. – 288 с.

5. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киевского ун-та, 1987. – 236 с.

6. *Цин Юань-Сунь, Лю Юн-Цин, Ван Лянь.* Влияние запаздывания на устойчивость динамических систем. – Труды I-го Международного Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. – М.: 1961. – С.79-94.

7. *Qin Yuan-xun, Lion-quinq, Wang Lian.* Effect of time lags on stability of dynamical system. // Scientica sinica. – 1960. – V10, № 6. – P.26-42.

8. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом. // Укр. мат. журн., 1983. – Т.35, №2. – С. 261-264.

9. *Баркин А.И.* Устойчивость линейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №3. – С.3-7.

10. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, №2.-С.226-245.

11. *Оболенский А.Ю., Чернецкая Л.Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электрон. моделирование. – 1993. – 15, №4. – С. 8-13.

12. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь і моделювання процесів електродинаміки // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. – мат. наук. – 1998. – №2. – С.111-118.

13. *Янушевський Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

14. *Черевко І.М., Матвій О.В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – 7, №2. – С.208-216.