УДК 517.51

©2008 р. В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НАРІЗНОЮ НЕПЕРЕРВНІСТЮ, КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЮ І ТОЧКОВОЮ РОЗРИВНІСТЮ

Наведено приклад таких топологічних просторів X, Y і Z, що кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним, а деяке нарізно неперервне відображення $g : X \times Y \to Z$ є скрізь розривним. Разом з тим побудовано приклад нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, яка в жодній точці не є квазінеперервною, а значить, є і скрізь розривною.

We provide an example of topological spaces X, Y and Z such that each separately continuous mapping $f : X \times Y \to Z$ is quasi-continuous, and there is a separately continuous mapping $g : X \times Y \to Z$ which is everywhere discontinuous. Besides, we construcy an example of a separately continuous function $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, which is not quasi-continuous at any point (and so, it is everywhere discontinuous).

1. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для довільних околів U і V відповідно точки x в X і точки $y = f(x)$ в Y існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Якщо відображення f квазінеперервне в кожній точці $x \in X$, то воно називається просто *квазінеперервним*. Для відображення $f : X \to Y$ через $C(f)$ ми позначаємо множину всіх його точок неперервності. Кажуть, що відображення f *точково розривне*, якщо множина $C(f)$ всюди щільна в X, тобто її замикання $\overline{C(f)} = X$.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $p = (x, y) \in X \times Y$, $f : X \times Y \to Z$ – відображення і $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо для кожного $x \in X$ і для кожного $y \in Y$ відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервні.

Ще Віто Вольтерра виявив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двох дійсних змінних є квазінеперервною. На це вказує Рене Бер [1, с.94], який виводить цю властивість з доведеної ним в [1] теореми: якщо $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, то для кожного $y \in \mathbb{R}$ множина $C_y(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою, а значить, і всюди щільною в $\mathbb{R}$. З цієї теореми Бера негайно випливає і те, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривною.

Ці результати були значно розвинені у працях багатьох математиків (див., наприклад, [2] і вказану там літературу) і в отриманих ними теоремах виходило так, що якщо нарізно неперервні відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервними, то вони є разом з тим і точково розривними. У зв'язку з цим у праці [3] було поставлене питання: чи існують такі топологічні простори X і Y, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною і разом з тим існує нарізно неперервна функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не є точково розривною? Оскільки відповіді на нього поки що не знайдено, то природно цю проблему послабити, замінивши в ній числову пряму $\mathbb{R}$ на топологічний простір Z. А саме: чи існують такі топологічні простори X, Y і Z, що кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним, а деяке нарізно неперервне відображення $g : X \times Y \to Z$ не є точково розривним? У цій замітці ми даємо ствердну відповідь на це простіше питання і разом з тим наводимо приклад нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, заданої на квадраті простору $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел, яка в жодній точці не є квазінеперервною, а значить, є і скрізь розривною.

2. Добре відомо (див., наприклад, [4]), що у кожного квазінеперервного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний простір Y множина $C(f)$ є залишковою в X, звідки, зокрема, випливає, що для берівського простору X і метризовного простору Y кожне квазінеперервне відображення $f : X \to Y$ є точково розривним. Тому кандидатів на позитивну відповідь проблеми з [3] слід шукати серед не берівських просторів, зокрема, серед просторів, які є першої категорії в собі. Тому природно запитати: чи існують такі простори X і Y першої категорії в собі, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною? Або навіть так: чи існує топологічний простір X першої категорії, такий, що кожна нарізно неперервна функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною?

Простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел з топологією індуктивної границі своїх скінченновимірних підпросторів $\mathbb{R}_n = \{x = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...) : \xi_k \in \mathbb{R}$ при $k = 1, 2, ..., n\}$ (див. [5, с.48]) є множиною першої категорії в собі, бо $\mathbb{R}^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_n$, а множини $\mathbb{R}_n$ ніде не щільні в $\mathbb{R}^\infty$. Але наш перший результат показує, що він для позитивного вирішення останньої проблеми не підходить.

Нехай $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функція Шварца, яка задається правилом $sp(u, v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ при $u^2 + v^2 \neq 0$ і $sp(0, 0) = 0$. Добре відомо, що ця функція нарізно неперервна і розривна тільки в одній точці $(0, 0)$.

Теорема 1. *Формулою*

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} sp(\xi_k, \eta_k),$$

де $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$ *і* $y = (\eta_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$, *визначається нарізно неперервна функція* $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, *яка в жодній точці не є квазінеперервною.*

Доведення. Зафіксуємо $y = (\eta_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$. Існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $\eta_k = 0$ при $k > m$. Оскільки $sp(\xi, 0) = 0$ для довільних ξ, то

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^{m} sp(\xi_k, \eta_k)$$

для довільних $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$. Оскільки координатні функціонали $x \mapsto \xi_k$ на просторі $\mathbb{R}^\infty$ неперервні, то і функція $f_y : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ неперервна, як скінченна сума неперервних функцій. Так само доводиться і неперервність функцій f^x. Таким чином, f – це нарізно неперервна функція.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0)$, де $x_0 = (\xi_k^0)_{k=1}^\infty$ і $y_0 = (\eta_k^0)_{k=1}^\infty$ – довільні точки з $\mathbb{R}^\infty$. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел ε_k і відповідні їй околи

$$U = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : (\forall k \in \mathbb{N})(|\xi_k - \xi_k^0| < \\ < \varepsilon_k)\}$$

і

$$V = \{y = (\eta_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : (\forall k \in \mathbb{N})(|\eta_k - \eta_k^0| < \\ < \varepsilon_k)\}$$

точок x_0 і y_0 в просторі $\mathbb{R}^\infty$. Покажемо, що f не є обмеженою на околі $U \times V$ точки p_0 в $(\mathbb{R}^\infty)^2$. Для цього знайдемо такий номер j, що $\xi_k^0 = 0$ і $\eta_k^0 = 0$ при $k > j$, візьмемо довільний номер n і розглянемо точки $\widetilde{x} = (\widetilde{\xi_k})_{k=1}^\infty$ і $\widetilde{y} = (\widetilde{\eta_k})_{k=1}^\infty$, де $\widetilde{\xi_k} = \xi_k^0$, $\widetilde{\eta_k} = \eta_k^0$ при $k \leq j$, $\widetilde{\xi_k} = \widetilde{\eta_k} = 0$ при $k > j + n$ і $\widetilde{\xi_k} = \widetilde{\eta_k} = \frac{\varepsilon_k}{2}$ при $j < k \leq j + n$. Ясно, що $\widetilde{p} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U \times V$, при цьому

$$f(\widetilde{p}) = \sum_{k=1}^{j} sp(\xi_k^0, \eta_k^0) + \sum_{k=j+1}^{j+n} sp(\frac{\varepsilon_k}{2}, \frac{\varepsilon_k}{2}) = \gamma + n,$$

де

$$\gamma = \sum_{k=1}^{j} sp(\xi_k^0, \eta_k^0),$$

адже $sp(\xi, \xi) = 1$ при $\xi > 0$. Число γ зі зміною номера n само не змінюється, отже,

$\gamma + n \to \infty$ при $n \to \infty$, звідки і випливає, що функція f не є обмеженою на $U \times V$.

З доведеного випливає, що функція f не є обмеженою на жодній відкритій непорожній множині в $(\mathbb{R}^\infty)^2$, а тому не може бути і квазінеперервною в жодній точці з $(\mathbb{R}^\infty)^2$.

3. Нам буде потрібний наступний результат, який є частинним випадком загальної теореми 1 з праці [6].

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – цілком регулярний простір, $f : X \to Y$ – відображення і $x_0 \in X$. Тоді відображення f буде квазінеперервним у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для кожної неперервної функції $g : Y \to \mathbb{R}$ композиція $h = g \circ f : X \to \mathbb{R}$ буде квазінеперервною в точці x_0.*

Звідси негайно випливає

Теорема 3. *Для довільних топологічних просторів X і Y наступні умови рівносильні:*

(i) кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною;

(ii) для довільного цілком регулярного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним.

Зокрема, на основі згаданого у вступі результату Вольтерри-Бера, отримуємо таке:

Теорема 4. *Для довільного цілком регулярного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ є квазінеперервним.*

Розглянемо простір $Z_0 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ всіх функцій $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Цей простір є цілком регулярним, оскільки повна регулярність є мультиплікативною властивістю [7, с.131]. Тому з теореми 4 випливає, що кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Z_0$ є квазінеперервним.

4. Теорема 5. *Нехай $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – деяка нарізно неперервна функція, яка розривна в точці $(0,0)$ і*

$$g(x,y)(u,v) = h(x-u, y-v)$$

для довільних точок (x,y) і (u,v) з арифметичної площини $\mathbb{R}^2$. Тоді відображення $g : \mathbb{R}^2 \to Z_0$ є нарізно неперервним і скрізь розривним.

Доведення. Зафіксуємо точку $y_0 \in \mathbb{R}$ і покажемо, що функція $g_{y_0} : \mathbb{R} \to Z_0$ є неперервною в довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай $z_0 = g_{y_0}(x_0) = g(x_0, y_0)$. Розглянемо довільні точки $q_k = (u_k, v_k)$ при $k = 1, ..., n$ з $\mathbb{R}^2$ і число $\varepsilon > 0$. Їм відповідає базисний окіл

$$W = \{z \in Z_0 : \max_{k=1,\dots,n} |z(q_k) - z_0(q_k)| < \varepsilon\}$$

точки z_0 у просторі Z_0.Оскільки всі функції $\varphi_k(x) = h(x - u_k, y_0 - v_k)$ при $k = 1, ..., n$ неперервні, то існує таке $\delta > 0$, що

$$\max_{k=1,\dots,n} |\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)| < \varepsilon,$$

як тільки

$$|x - x_0| < \delta.$$

В такому разі, якщо $|x - x_0| < \delta$, то $z = g_{y_0}(x) \in W$, бо $z(q_k) = \varphi_k(x)$ і $z_0(q_k) = \varphi_k(x_0)$ при $k = 1, ..., n$. Це і дає нам неперервність відображення g_{y_0} у точці x_0. Таким чином, всі y-розрізи g_y відображення g є неперервними. Аналогічно встановлюється і неперервність x-розрізів $g^x : \mathbb{R} \to Z_0$. Отже, g – нарізно неперервне відображення.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Покажемо, що g розривне в точці p_0. Оскільки функція h розривна в точці $(0,0)$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного $\delta > 0$ існує така точка (u_δ, v_δ) з квадрата $(-\delta, \delta)^2$, що

$$|h(u_\delta, v_\delta) - h(0,0)| \geq \varepsilon.$$

Розглянемо окіл W_0 точки $z_0 = g(p_0)$ з простору Z_0, який задається так:

$$W_0 = \{z \in Z_0 : |z(p_0) - z_0(p_0)| < \varepsilon\}.$$

Для точки $z = g(x,y)$, де $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, будемо мати

$$z(p_0) - z_0(p_0) = h(x - x_0, y - y_0) - h(0,0).$$

Для довільного $\delta > 0$ розглянемо базисний окіл

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \delta \text{ і } |y - y_0| < \delta\}$$

точки (x_0, y_0) в $\mathbb{R}^2$ і точки $x_\delta = x_0 + u_\delta$ та $y_\delta = y_0 + v_\delta$. Для точки $z_\delta = g(x_\delta, y_\delta)$ будемо мати

$$|z_\delta(p_0) - z_0(p_0)| = |h(u_\delta, v_\delta) - h(0,0)| \geq \varepsilon,$$

отже, $z_\delta \notin W_0$. Крім того, очевидно, $(x_\delta, y_\delta) \in O$. Це показує розривність g у точці p_0.

Якщо за h в теоремі 5 взяти класичну функцію Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то відповідна функція g дасть нам відомий приклад Гофмана-Йорґенсена нарізно неперервної скрізь розривної функції.

Таким чином, ми прийшли до такого результату:

Теорема 6. *Нехай $Z_0 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ – простір всіх функцій $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Тоді кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Z_0$ є квазінеперервним і разом з тим існує нарізно неперервне і скрізь розривне (а значить, і не точково розривне) відображення $g : \mathbb{R}^2 \to Z_0$.*

Результати цієї замітки були анонсовані в тезах [8] і [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser 3. – 1899. – 3. – P.1-123.

2. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук.: 010101. – Чернівці, 1999. – 345 с.

3. *Maslyuchenko V.K.* Connections between joint and separate properties of functions of several variables. In "Some open problems of functional analysis and function theory" (Editors: V.K. Maslyuchenko, A.M. Plichko).– Extracts math. – 2005.– **20**, N1. – P.51-70.

4. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch.. – 1988-1989. – **14**, №3. – P. 259-306.

5. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

6. *Маслюченко В.К.* Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 213 - 218.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

8. *Григор'єва О.І., Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Деякі приклади нарізно неперервних функцій, що пов'язані з простором $\mathbb{R}^\infty$ // Міжнар. конф. "Диф. рівн. та їх заст.". Тези доповідей. – Чернівці, 11-14 жовтня, 2006. – С. 30.

9. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* До питання про зв'язки між нарізною неперервністю, квазінеперервністю і точковою розривністю // IV Всеукраїнська наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу". Тези доповідей. – Ів.-Франківськ, 10-12 вересня, 2008. – С. 62.