

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці

ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для дослідження системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом та крайовими умовами вигляду $Ax(0) + Bx(T) + C \int_0^T x(t)dt = d$ запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу, в якому відсутнє визначальне рівняння. Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

We propose a modification of a numerical-analytic method without a determining equation for investigation of a system of differential equations with a transformed argument and boundary conditions in the form $Ax(0) + Bx(T) + C \int_0^T x(t)dt = d$. Sufficient conditions for the existence of a unique solution of a boundary value problem and an error estimation of the constructed successive approximations are obtained.

У праці [1] за допомогою класичної схеми чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [2, 3] досліджено питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \quad (1)$$

$$Ax(0) + Bx(T) + C \int_0^T x(t)dt = d, \quad (2)$$

де $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$; $x, f \in R^n$; $\lambda : [0, T] \rightarrow [0, T]$ – довільне неперервне відображення; A, B, C – сталі $n \times n$ матриці, d – сталий n -вимірний вектор.

Виявляється, для крайової задачі (1), (2) можна запропонувати модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де не виникатиме так зване визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Як і раніше [1], функцію $f(t, x, y)$ вважатимемо неперервною по t, x, y в області $G = [0, T] \times D \times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n .

Припускаємо також, що функція $f(t, x, y)$ в області G обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, та задовольняє умову Ліпшица по x, y з матрицею $K =$

$$\{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}:$$

$$|f(t, x, y)| \leq M, \quad (3)$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq K(|\bar{x} - \bar{x}| + |\bar{y} - \bar{y}|), \quad (4)$$

де

$$|f(t, x, y)| = (|f_1(t, x, y)|, \dots, |f_n(t, x, y)|)$$

і нерівність між векторами розуміється по компонентно.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема. Нехай виконуються умови:

I) матриця $H = A + B + TC$ є невивродженою;

II) вектор $w_0 = H^{-1}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = TSM$ -околом, де $S = |H^{-1}B| + \frac{T}{2}|H^{-1}C| + E$;

III) найбільше за модулем власне значення матриці $Q = 2TSK$ менше за одиницю.

Тоді крайова задача (1), (2) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0, \quad x_m(t) = w_0 -$$

$$-H^{-1}B \int_0^T f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s)))ds -$$

$$\begin{aligned}
& -H^{-1}C \int_0^T \int_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s))) ds dt + \\
& + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s))) ds, \\
& m = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \quad (5)$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \leq Q^m(E - Q)^{-1}\beta \quad (6)$$

для всіх $m = 1, 2, \dots$ і $t \in [0, T]$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (5) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що всі функції $x_m(t)$ містяться в області D . На підставі (5), враховуючи (3), маємо:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - w_0| & \leq |H^{-1}B|MT + |H^{-1}C|M\frac{T^2}{2} + \\
& + Mt \leq T \left(|H^{-1}B| + \frac{T}{2}|H^{-1}C| + E \right) M = \\
& = TSM = \beta.
\end{aligned} \quad (7)$$

Тому, з врахуванням умови II), $x_1(t) \in D$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \dots$ і $t \in [0, T]$ функції $x_m(t)$ вигляду (5) не виходять за межі області D .

Покладаючи $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t) - x_m(t)|$, на підставі (5) із врахуванням (4) маємо:

$$\begin{aligned}
r_{m+1}(t) & \leq |H^{-1}B|K \int_0^T \omega_m(s) ds + \\
& + |H^{-1}C|K \int_0^T \int_0^t \omega_m(s) ds dt + \\
& + K \int_0^t \omega_m(s) ds.
\end{aligned} \quad (8)$$

де $\omega_m(s) = r_m(s) + r_m(\lambda(s))$.

Згідно з (7),

$$r_1(t) = |x_1(t) - w_0| \leq \beta,$$

тому із (8) при $m = 1$ знаходимо:

$$\begin{aligned}
r_2(t) & \leq |H^{-1}B|K \cdot 2\beta T + \\
& + |H^{-1}C|K \cdot 2\beta \frac{T^2}{2} + K \cdot 2\beta T = \\
& = 2T \left(|H^{-1}B| + \frac{T}{2}|H^{-1}C| + E \right) K\beta = \\
& = 2TSK\beta = Q\beta.
\end{aligned}$$

Індукцією можна довести, що для всіх $t \in [0, T]$

$$r_{m+1}(t) \leq Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$\begin{aligned}
|x_{m+j}(t) - x_m(t)| & \leq \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t) \leq \\
& \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta.
\end{aligned} \quad (9)$$

Умова III) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \quad (10)$$

Тоді із (9) та (10) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t)$ вигляду (5) рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ для всіх $t \in [0, T]$ і

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) = x^*(t). \quad (11)$$

Оскільки, в чому легко переконатися безпосередньою перевіркою, всі послідовні наближення $x_m(t)$ задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t)$ також їх задовольняє.

При $j \rightarrow \infty$ із (9), враховуючи (11) та (10), для всіх $m = 1, 2, \dots$ і $t \in [0, T]$ отримуємо оцінку (6).

Крім цього, переходячи із врахуванням (11) у (5) до границі при $m \rightarrow \infty$, бачимо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = w_0 - H^{-1}B \int_0^T f(s, x(s), x(\lambda(s))) ds -$$

$$-H^{-1}C \int_0^T \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda(s))) ds dt + \\ + \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda(s))) ds.$$

Отже, гранична функція $x^*(t)$ справді є розв'язком крайової задачі (1), (2). Доведемо тепер єдиність цього розв'язку.

Нехай $y(t)$ – довільний розв'язок крайової задачі (1), (2). Тоді, як легко перевірити, він є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = w_0 - H^{-1}B \int_0^T f(s, y(s), y(\lambda(s))) ds - \\ - H^{-1}C \int_0^T \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda(s))) ds dt + \\ + \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda(s))) ds.$$

Аналогічно, як і вище, нескладно встановити, що для всіх $t \in [0, T]$

$$|y(t) - x_0(t)| = |y(t) - w_0| \leq TSM = \beta,$$

$$|y(t) - x_1(t)| \leq 2TSK\beta = Q\beta,$$

і, за індукцією,

$$|y(t) - x_m(t)| \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Таким чином, $x_m(t) \rightarrow y(t)$ при $m \rightarrow \infty$ рівномірно на $[0, T]$. З єдиності границі послідовності випливає, що $y(t) = x^*(t)$ для всіх $t \in [0, T]$. Єдиність розв'язку $x^*(t)$ доведено. Теорему доведено.

Розглянемо часткові випадки крайових умов (2).

1) Нехай $C = 0$, тобто маємо лінійні двоточкові крайові умови вигляду

$$Ax(0) + Bx(T) = d.$$

В цьому випадку

$$H = A + B, \quad w_0 = (A + B)^{-1}d,$$

$$S = |(A + B)^{-1}B| + E,$$

$$\beta = TSM, \quad Q = 2TSK$$

і отримуємо результати, раніше наведені в праці [4].

2) Нехай $A = 0$, $B = 0$, $C = E$, тобто маємо інтегральні крайові умови вигляду

$$\int_0^T x(t) dt = d.$$

В цьому випадку

$$H = TE, \quad w_0 = \frac{1}{T}d, \quad S = \frac{3}{2}E,$$

$$\beta = \frac{3}{2}TM, \quad Q = 3TK$$

і отримуємо результати, раніше наведені в працях [4, 5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.* Одна крайова задача для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія "Математика". — 2011. — Т. 1, № 4. — С. 123-127.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук. думка, 1985. — 224 с.
3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. *Філіпчук М.П.* Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці, 1999. — 142 с.
5. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2001. — Вип. 7. — С. 243-250.