УДК 517.925

©2008 р. І. І. Король

Ужгородський національний університет

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням у резонансному випадку.

We consider a numerically-analytic investigation method for periodic solutions of nonlinear differential equation systems with delays in resonance case.

Диференціальні рівняння з відхиляючим аргументом, зокрема рівняння з запізненням, знаходять своє широке практичне застосування при дослідженні різноманітних прикладних задач. Їх дослідженню присвячена велика кількість праць як українських, так і закордонних вчених, зокрема [1-5].

У даній роботі для дослідження існування та наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням застосовано чисельно-аналітичний алгоритм, який був раніше запропонований для дослідження періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [6].

Розглянемо лінійну неоднорідну T - періодичну систему диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + h(t), \qquad (1)$$

де матриці-функції $A(t)$, $B(t)$ і вектор-функція $h(t)$ є неперервними при $t\in\mathbb{R}$, $A(t+T)=A(t)$, $B(t+T)=B(t)$, $h(t+T)=h(t)$, $x,h\in\mathbb{R}^n$. Дослідимо T - періодичні розв'язки системи (1), тобто

$$x(t+T)=x(t), \quad x(t)=\begin{cases} x(t), & t\in[0,T],\\ x(T+t), & t\in[-\Delta,0],\end{cases}$$

Відомо [1], що розв'язок системи (1) має вигляд

$$\begin{aligned} x(t,x_0)=W(0,t)x_0+\int\limits_0^t W(s,t)h(s)ds+\\ +\int\limits_0^\Delta W(s,t)B(s)x(s-\Delta,x_0)ds,\end{aligned} \qquad (2)$$

де рядки матриці $W(s,t)$ є розв'язками спряженої до (1) системи

$$\frac{dw(t)}{dt} = -w(t)A(t) - w(t)B(t+\Delta), \qquad (3)$$

і $W(t,t)=E_n$, $W(s,t)\equiv 0$ при $t\le s\le t+\Delta$.

При цьому розглянемо критичний випадок – коли

A) відповідна лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta), \qquad (4)$$

має k лінійно незалежних T - періодичних розв'язків, $1\le k\le n$.

Нехай $\psi_1(t),\dots,\psi_k(t)$ – лінійно незалежні T - періодичні розв'язки спряженої системи (3), тоді без обмеження загальності можемо прийняти, що

$$W(s,t)=\begin{pmatrix}\Psi(s,t)\\ \Theta(s,t)\end{pmatrix},$$

де $\Psi(s,t)=col\big(\psi_1(t),\dots,\psi_k(t)\big)$ – $(k\times n)$ - матриця, а рядки $((n-k)\times n)$ - вимірної матриці $\Theta(s,t)$ утворені тими розв'язками системи (3), які не є T - періодичними. Підставимо (2) у періодичні крайові умови:

$$x(0)=W(0,0)x_0+\int\limits_0^\Delta W(s,0)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$\begin{aligned} x(T)=W(0,T)x_0+\int\limits_0^T W(s,T)h(s)ds+\\ +\int\limits_0^\Delta W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds,\end{aligned}$$

Отже,

$$\Big(W(0,0)-W(0,T)\Big)x_0+$$
$$+\int_0^{\Delta}\Big(W(s,0)-W(s,T)\Big)B(s)x(s-\Delta)ds=$$
$$=\int_0^T W(s,T)h(s)ds.$$

Беручи до уваги T - періодичність по t матриці $\Psi(s,t)$, одержимо

$$\left(\begin{array}{c}0\\ \Theta(0,0)-\Theta(0,T)\end{array}\right)x_0=$$
$$=\int_0^T\left(\begin{array}{c}\Psi(s,T)\\ \Theta(s,T)\end{array}\right)h(s)ds- \qquad (5)$$
$$-\int_0^{\Delta}\left(\begin{array}{c}0\\ \Theta(s,0)-\Theta(s,T)\end{array}\right)B(s)x(s-\Delta)ds.$$

Алгебраїчна система (5) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds=0,$$

і при цьому початковим значенням T - періодичного розв'язку системи (1) є

$$x_0=P_{G_k}\xi+$$
$$+G^+\Big(\int_0^T\Theta(s,T)h(s)ds-\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\Big),$$

де $G(s)=\Theta(s,0)-\Theta(s,T)$, $G=G(0)$ є $((n-k)\times n)$-вимірними матрицями рангу $(n-k)$, G^+ — єдина псевдообернена матриця до G.

Лема 1. *Якщо система (4) має k лінійно незалежних T- періодичних розв'язків, то для кожної T- періодичної функції $h(t)$ існує функція $H(t)$ періоду T така, що система*

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+B(t)x(t-\Delta)+h(t)-H(t), \quad (6)$$

має k - параметричну сім'ю T - періодичних розв'язків.

Доведення. Як було показано вище, система (6) має T -періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^T \Psi(s,T)\big(h(s)-H(s)\big)ds=0.$$

Покладемо

$$H(s)=\Psi^*(s,T)\cdot\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}^n,$$

тоді

$$\int_0^T \Psi(s,T)\big(h(s)-\Psi^*(s,T)\cdot\alpha\big)ds,$$

$$\int_0^T \Psi(s,T)\Psi^*(s,T)ds\cdot\alpha=\int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds.$$

Позначимо

$$P(t)=\begin{pmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^t \Psi(s,t)\Psi^*(s,T)ds\\ \int_0^t \Theta(s,t)\Psi^*(s,T)ds\end{pmatrix},$$

$$U(s,t)=\left(\begin{array}{c}U_1(s,t)\\ U_2(s,t)\end{array}\right)=$$
$$=\left(\begin{array}{c}\Psi(s,t)-P_1(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T)\\ \Theta(s,t)-P_2(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T)\end{array}\right),$$

$$V(s,t)=\begin{pmatrix}V_1(s,t)\\ V_2(s,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\end{pmatrix}P_1^{-1}(T)\Psi(s,T).$$

Оскільки рядки матриці $\Psi(s,t)$ є лінійно незалежними розв'язками системи (3), то $detP_1(t)\neq 0$, а тому

$$\alpha=P_1^{-1}(T)\int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds,$$
$$H(s)=\Psi^*(s,T)P_1^{-1}(T)\int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds,$$

а T - періодичні розв'язки системи (6) мають вигляд

$$x(t,x_0)=W(0,t)x_0+$$
$$+\int_0^{\Delta} W(s,t)B(s)x(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^t W(s,t)\Big\{h(s)- \qquad (7)$$
$$-\Psi^*(s,T)P_1^{-1}(T)\int_0^T\Psi(\sigma,T)h(\sigma)d\sigma\Big\}ds.$$

Лема доведена.

Для знаходження початкового значення T - періодичного розв'язку системи (6) підставимо (7) у T - періодичні крайові умови:

$$x(0,x_0)=W(0,0)x_0+$$
$$+\int_0^{\Delta} W(s,0)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$x(T,x_0)=W(0,T)x_0+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds+\int_0^{T}W(s,T)h(s)ds-$$
$$-\int_0^{T}W(s,T)\Psi^*(s,T)dsP_1^{-1}(T)\int_0^{T}\Psi(\sigma,T)h(\sigma)d\sigma=$$
$$=W(0,T)x_0+\int_0^{\Delta}W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^{T}\begin{pmatrix}\Psi(s,T)\\ \Theta(s,T)\end{pmatrix}h(s)ds-$$
$$-\begin{pmatrix}P_1(T)\\ P_2(T)\end{pmatrix}P_1^{-1}(T)\int_0^{T}\Psi(s,T)h(s)ds=$$
$$=W(0,T)x_0+\int_0^{\Delta}W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^{T}\begin{pmatrix}0\\ \Theta(s,T)-P_2(T)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T)\end{pmatrix}h(s)ds.$$

Таким чином, x_0 повинно задовольняти алгебраїчну систему

$$Gx_0=\int_0^{T}U_2(s,T)h(s)ds-\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

отже

$$x_0=P_{G_k}\xi+$$
$$+G^+\left\{\int_0^{T}U_2(s,T)h(s)ds-\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\right\}.$$

Остаточно T - періодичні розв'язки системи (6) можемо записати у вигляді

$$x(t,\xi)=W(0,t)P_{G_k}\xi+$$
$$+W(0,t)G^+\left\{\int_0^{T}U_2(s,T)h(s)ds-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\right\}+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,t)B(s)x(s-\Delta))ds+$$
$$+\int_0^{t}U(s,t)h(s)ds-\int_t^{T}V(s,t)h(s)ds,\ \ \xi\in\mathbb{R}^k,$$

де P_{G_k} — $(n\times k)$ - вимірна матриця-ортопроектор з простору R^n на нуль простір $Ker(G)$ матриці G, причому її стовпці є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $Ker(G)$ матриці G:

$$P_{G_k}:R^k\to Ker(G),\quad Ker(G)=P_{G_k}R^n.$$

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+B(t)x(t-\Delta)+f(t,x(t),x(t-\Delta)),\ (8)$$

де $t\in\mathbb{R}$, $x:D\to\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}\times D\times D\to\mathbb{R}^n$, $A(t)$, $B(t)$, $f(t,x,y)$ – неперервні по своїм змінним, періодичні по t зі спільним періодом T: $A(t+T)=A(t)$, $B(t+T)=B(t)$, $f(t+T,x,y)=f(t,x,y)$, $D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le a\}$.

Введемо до розгляду відображення $Lx:C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, сім'ю k - параметричних відображень $N_\xi x:C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, де ξ – k -вимірний параметр, і функціонал $\mu(x):C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^k$:

$$(Lx)(t)\stackrel{def}{=}\int_0^{t}U(s,t)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds-$$
$$-\int_t^{T}V(s,t)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds+$$
$$+W(0,t)G^+\int_0^{T}U_2(s,T)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds,$$

$$(N_\xi x)(t)\stackrel{def}{=}W(0,t)P_{G_k}-$$
$$-W(0,t)G^+\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,t)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$\mu(x)\stackrel{def}{=}\int_0^{T}\Psi(s,t)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds.$$

Для наближеного знаходження T - періодичних розв'язків системи (8) побудуємо послідовність T- періодичних функцій

$$x_m(t,\xi)=x_0^{m-1}(t,\xi)+$$
$$+W(0,t)G^+\int_0^{T}U_2(s,T)f(s,x_{m-1}(s,\xi),x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds+$$
$$+\int_0^{t}U(s,t)f(s,x_{m-1}(s,\xi),x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds-$$
$$-\int_t^{T}V(s,t)f(s,x_{m-1}(s,\xi),x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds,\quad (9)$$
$$x_0^m(t,\xi)=W(0,t)P_{G_k}\xi-$$
$$-W(0,t)G^+\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x_m(s-\Delta,\xi)ds+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,t)B(s)x_m(s-\Delta,\xi)ds,\ \ m\in\mathbb{N},$$

де $x_0^0(t,\xi)$ – T - періодичний розв'язок лінійної однорідної системи (4):

$$x_0(t,\xi)=x_0^0(t,\xi)=W(0,t)P_{G_k}\xi-$$
$$-W(0,t)G^{+}\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x_0^0(s-\Delta,\xi)ds+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,t)B(s)x_0^0(s-\Delta,\xi)ds.$$

Розглянемо критичний випадок – коли виконується умова **A**. Крім того, припускаємо, що в області $(t,x,y)\in\Omega=\mathbb{R}\times D\times D$ справджуються наступні умови:

B) вектор-функція $f(t,x,y)$ задовольняє умови обмеженості та Ліпшица

$$|f(t,x,y)|\le m(t), \tag{10}$$

$$|f(t,x',y')-f(t,x'',y'')|\le$$
$$\le K_1(t)|x'-x''|+K_2(t)|y'-y''|,$$

де $m(t)$ – неперервна T - періодична вектор-функція з невід'ємними елементами, $K_1(t)$, $K_2(t)$ – $(n\times n)$ - вимірні неперервні T - періодичні матриці-функції з невід'ємними елементами. Матричні та векторні нерівності розуміємо покомпонентно;

C) існує непорожня множина точок $\xi\in D_0\in\mathbb{R}^k$, $D_0\subset D$ така, що вектор-функція $x_0^0(t,\xi)$ лежить в області D разом із своїм $(E+Q_N)^{-1}\beta$ - околом,

$$\beta=\max_{t\in[0,T]}\left\{\int_0^T|W(0,t)G^{+}U_2(s,T)|m(s)ds+\right.$$
$$\left.+\int_0^t|U(s,t)|m(s)ds+\int_t^T|V(s,t)|m(s)ds\right\}; \tag{11}$$

D) спектральні радіуси операторів Q_N і $Q=Q_N+Q_L$ менші за одиницю, де

$$(Q_Lx)(t)=\int_0^t|U(s,t)|(K_1(s)+K_2(s))x(s)ds+$$
$$+\int_t^T|V(s,t)|(K_1(s)+K_2(s))x(s)ds+$$
$$+\int_0^t|W(0,t)G^{+}U_2(s,T)|(K_1(s)+K_2(s))x(s)ds,$$

$$(Q_Nx)(t)=$$
$$=\int_0^{\Delta}|(W(s,t)-W(0,t)G^{+}G(s))B(s)|x(s-\Delta)ds.$$

Зауважимо, що

$$(Lx)(t)=\int_0^t W(s,t)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds+$$
$$+W(0,t)G^{+}\int_0^T U_2(s,T)f(s,x(s),x(s-\Delta))ds- \tag{12}$$
$$-P(t)P_1^{-1}(T)\mu(x).$$

Дослідимо умови існування T - періодичного розв'язку системи (8). Необхідні умови існування містить наступне твердження.

Лема 2. *Нехай виконується умова* **A** *і* $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ *є* T*- періодичним розв'язком системи з запізненням (8). Тоді значення параметра* $\xi=\xi^*$ *таке, що* $\mu(\varphi(\cdot,\xi^*))=0$ *і* $\varphi(t)$ *приймає початкове значення*

$$\varphi(0)=\varphi(0,\xi^*)=W(0,0)P_{G_k}\xi^*+$$
$$+W(0,0)G^{+}\left\{\int_0^T\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\Delta}G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\}+ \tag{13}$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,0)B(s)\varphi(s-\Delta)ds.$$

Доведення. Нехай функція $\varphi(t)$ є T - періодичним розв'язком системи (8). Тоді

$$\varphi(t)\equiv W(0,t)\varphi_0+$$
$$+\int_0^{\Delta}W(s,t)B(s)\varphi(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^t W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

При підстановці $\varphi(t)$ в T - періодичні крайові умови одержимо, що

$$\Big(W(0,0)-W(0,T)\Big)\varphi_0=$$
$$=-\int_0^{\Delta}(W(s,0)-W(s,T))\,B(s)\varphi(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^T W(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds,$$

$$\begin{pmatrix}0\\G\end{pmatrix}\varphi_0=-\int_0^{\Delta}\begin{pmatrix}0\\G(s)\end{pmatrix}B(s)\varphi(s-\Delta)ds+$$
$$+\int_0^T\begin{pmatrix}\Psi(s,T)\\\Theta(s,T)\end{pmatrix}f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi)=0$. При цьому маємо, що

$$P_{G_k^*}\left\{\int_0^T \Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\} = 0,$$
$$\varphi_0 = P_{G_k}\xi^* + G^+\left\{\int_0^T \Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\},$$

і $\varphi(0)$ має вигляд (13). Тут $P_{G_k^*}$ — $(k\times n)$- вимірна матриця-ортопроектор з простору R^n на нуль простір $Ker(G^*)$ матриці G^*, причому рядки матриці $P_{G_k^*}$ утворюють повний базис ядра матриці G^*:

$$P_{G_k^*} : R^n \to Ker(G^*), \quad Ker(G^*) = P_{G_k^*}R^n,$$
$$rank(P_{G_k}) = rank(P_{G_k^*}) = k = n - rank(G).$$

Вкажемо достатні умови існування T - періодичного розв'язку системи (8).

Лема 3. *Нехай виконується умова* **A**. *Якщо при цьому параметр $\xi=\xi^*$ і функція $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ такі, що виконується система рівнянь*

$$\varphi = (N_\xi + L)\varphi, \tag{14}$$

$$\mu(\varphi) = 0, \tag{15}$$

тоді $\varphi(t)$ є T - періодичним розв'язком системи із запізненням (8) і приймає початкове значення (13).

Доведення. Нехай параметр $\xi=\xi^*$ і функція $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ задовольняють рівняння (14), (15), тоді з (12) випливає, що

$$\varphi(t) \equiv W(0,t)P_{G_k}\xi^* +$$
$$+ W(0,t)G^+\left\{\int_0^T \Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\} +$$
$$+ \int_0^\Delta W(s,t)B(s)\varphi(s-\Delta))ds +$$
$$+ \int_0^t W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

Підставляючи $t=0$ в останню тотожність бачимо, що $\varphi(t)$ приймає початкове значення (13), а диференціюючи її переконуємося, що $\varphi(t)$ задовольняє систему (8). Підставимо тепер $\varphi(t)$ в крайові умови:

$$\begin{aligned}
&\varphi(0)-\varphi(T) = (W(0,0)-W(0,T))\,\varphi_0 + \\
&+ \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta))ds - \\
&- \int_0^\Delta W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix}\varphi_0 + \int_0^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix} B(s)\varphi(s)ds - \\
&- \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(s,T) \end{pmatrix} f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta)) = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ GG^+ - E_{n-k} \end{pmatrix} \int_0^T \{\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds\} = \\
&= -P_{G_k^*}\int_0^T \Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Лема доведена.

На підставі аналізу властивостей послідовності $\{x_m(t,\xi)\}$, за аналогією до теореми 2 [6] можемо довести наступне твердження, яке обґрунтовує можливість застосування запропонованої схеми для наближеної побудови T - періодичного розв'язку системи з запізненням (8).

Теорема 1. *Нехай система* (8) *задовольняє умови* ***A*** – ***D***. *Тоді*

1) *послідовність функцій $x_m(t,\xi)$ вигляду (9) при $m\to\infty$ рівномірно збігається відносно $(t,\xi)\in\mathbb{R}\times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$ і при всіх натуральних m справджуються оцінки збіжності*

$$|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le (E-Q)^{-1}(Q)^m\beta;$$

2) *гранична функція $x^*(t,\xi)$ є T- періодичною по t і приймає початкове значення*

$$\begin{aligned}
&x^*(0) = x^*(0,\xi^*) = W(0,0)P_{G_k}\xi^* + \\
&+ W(0,0)G^+\left\{\int_0^T \Theta(s,T)f(s,x^*(s),x^*(s-\Delta))ds - \right. \\
&\left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)x^*(s-\Delta)ds\right\} + \\
&+ \int_0^\Delta W(s,0)B(s)x^*(s-\Delta)ds;
\end{aligned} \tag{17}$$

3) *функція* $x^*(t) = x^*(t, \xi^*)$ *є* T*- періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь* (8) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi = \xi^*$ *є розв'язком рівняння (15).*

Доведення. З (9), (10), (11) та вигляду операторів N_ξ, L випливає, що

$$|x_1(t,\xi) - x_0^0(t,\xi)| = \beta,$$

$$|x_2(t,\xi) - x_0^0(t,\xi)| =$$
$$= \left|\big((N_\xi + L)x_1(\cdot,\xi)\big)(t) - (N_\xi x_0^0(\cdot,\xi))(t)\right| \le$$
$$\le \left|\big(N_\xi(x_1(\cdot,\xi) - x_0^0(\cdot,\xi))\big)(t)\right| + |(Lx_1(\cdot,\xi))(t)| \le$$
$$\le \big(Q_N |x_1(\cdot,\xi) - x_0^0(\cdot,\xi)|\big)(t) + \beta \le (E + Q_N)\beta.$$

За індукцією можемо показати, що

$$|x_m(t,\xi) - x_0^0(t,\xi)| \le \left(\sum_{i=0}^{m-1} Q_N^i\right)\beta,$$

тоді з умови **D** випливає, що

$$|x_m(t,\xi) - x_0^0(t,\xi)| \le (E - Q_N)^{-1}\beta,$$

тобто $x_m(t,\xi) \in D$ при всіх $\xi \in D_0$. Крім того,

$$|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le \left|x_0^m(t,\xi) - x_0^{m-1}(t,\xi)\right| +$$
$$+ \left|\big(L(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi))\big)(t)\right| \le$$
$$\le \big(Q|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)|\big)(t) \le$$
$$\le \big(Q^2|x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)|\big)(t) \le$$
$$\le \big(Q^m\, |x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|\big)(t) \le Q^m\beta\,.$$

Міркуючи далі так, як і при доведенні теореми 2 [6], завершуємо доведення теореми.

Конструктивні достатні умови існування T- періодичних розв'язків, для перевірки яких не потрібно шукати граничну функцію $x^*(t,\xi)$ послідовності (9), а досить знати тільки послідовні наближення $x_m(t,\xi)$, містить наступне твердження, яке можемо довести за аналогією до теореми 3 [6].

Теорема 2. *Нехай для системи* (8) *виконуються припущення* ***A*** *–* ***D*** *і, крім того:*

1) *існує опукла, замкнена область* $D_1 \subset D_0$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *в області* D_1 *міститься єдина особлива точка* $\xi = \xi_m$ *ненульового індексу відображення* $\Delta_m(\xi) : D_0 \to \mathbb{R}^k$*:*

$$\Delta_m(\xi) \stackrel{def}{=} \int_0^T \Psi(s,t) f(s, x_{m-1}(s,\xi), x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds;$$

2) *на границі* ∂D_1 *області* D_1 *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(E - Q_N)^{-1} Q_N^m \beta,$$

де

$$Q_1 = \int_0^T |\Psi(s,T)|\big(K_1(s) + K_2(s)\big)ds.$$

Тоді система (8) *має* T*- періодичний розв'язок* $x(t) = x^*(t,\xi^*)$ *з початковим значенням* $x(0) = x^*(0,\xi^*)$ *вигляду (17), де* $\xi^* \in D_1$.

У даній роботі обгрунтовано чисельно-аналітичний алгоритм інтегрування періодичних систем диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом. Побудовано рівномірно збіжну послідовність k- параметричних періодичних наближень, встановлено умови збіжності та оцінки похибки. Досліджено зв'язок граничної функції цієї послідовності з точним періодичним розв'язком вихідної системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием — К.: Вища школа, 1979 — 248 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. *Хейл Дж.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.

4. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Доп.НАН України. — 1991.— N 9.— С.9—13.

5. Стельмащук Л.В. Періодичні розв'язки диференціальних рівнянь з запізненням: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: НАН Украины. Ін-т матем. – К., 2004. – 16 с.

6. Король І.І., Перестюк М.О. Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М.Самойленка// Укр. мат. журн. — 2006.— **58**, №4. — С.472—488.