УДК 512.644

©2008 р. **В. В. Конаровський**

Інститут математики НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Побудовано алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

We construct an algorithm for solving of linear algebraic equation systems.

1. Вступ.

Важливість систем лінійних алгебраїчних рівнянь зросла після виникнення аналітичної геометрії, яка дозволила звести до дослідження систем рівнянь всі основні питання, пов'язані з дослідженням площин і прямих в просторі. Були розроблені методи, які дозволили розв'язувати як крамерівські системи (формули Крамера, матричний метод [1,2]), так і системи порядку $(n \times m)$ (метод Гаусса [1] та ін.). У статті запропонований ще один метод для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь порядку $(n \times m)$, який є досить простим у своєму застосуванні.

2. Розв'язування систем лінійних однорідних рівнянь (СЛОР).

Розглянемо систем лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij} \in \Im \quad \forall i = \overline{1,s}, \quad \forall j = \overline{1,n}$, $\Im$ — довільне поле.

Перепишемо СЛОР (1) у наступному вигляді:

$$\overline{\alpha}_1 x_1 + \overline{\alpha}_2 x_2 + \ldots + \overline{\alpha}_n x_n = \overline{0}, \tag{2}$$

тут

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{s1}); \\ &\overline{\alpha}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{s2}); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\overline{\alpha}_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{sn}). \end{aligned}$$

Ставиться завдання знайти розв'язки СЛОР (1), тобто знайти такі елементи $x_i,\ i = \overline{1,n}$, що рівняння (2) перетворюється в правильну векторну рівність.

Випишемо матрицю СЛОР (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Нехай $\operatorname{rg} A = r = \operatorname{rg} A^T$, де A^T — транспонована матриця, $0 \le r \le \min(n, s)$.

Допишемо до матриці A^T одиничну, розмірності n:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{s1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{sn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right). \tag{3}$$

За допомогою елементарних перетворень, над рядками матриці (3), зводимо її ліву частину (елементи A^T) до трикутної форми (відповідні перетворення виконуємо і над елементами правої частини), отримаємо

$$B = (B_1 | B_2),$$

де

$$B_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{r1} & \cdots & a'_{s1} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{r2} & \cdots & a'_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & \cdots & a'_{sr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Випишемо вектори-рядки правої частини B.

$$\begin{aligned} &\overline{\beta}_1 = (b_{11},\, b_{12},\, \ldots,\, b_{1n}); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\overline{\beta}_r = (b_{r1},\, b_{r2},\, \ldots,\, b_{rn}); \\ &\overline{\beta}_{r+1} = (b_{r+1,1},\, b_{r+1,2},\, \ldots,\, b_{r+1,n}); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\overline{\beta}_n = (b_{n1},\, b_{n2},\, \ldots,\, b_{nn}). \end{aligned}$$

Теорема 1. $\overline{\beta}_i,\ i = \overline{r+1, n}$ — *утворюють фундаментальну систему розв'язків (ФСР) СЛОР (1).*

Доведення. Доведемо, що $\overline{\beta}_i,\ i = \overline{r+1, n}$ — розв'язки (1).

Зауважимо, i-й вектор-рядок матриці A^T збігається з $\overline{\alpha}_i,\ i = \overline{1, n}$. Припустимо, що елементарними перетвореннями звели j-тий рядок A^T $(1 \le j \le n)$ до нульового вигляду. Це рівносильно наступному:

$$\overline{\alpha}_1 k_1 + \overline{\alpha}_2 k_2 + \ldots + \overline{\alpha}_n k_n = \overline{0}. \qquad (4)$$

Звідси, $(k_1,\, k_2,\, \ldots k_n)$ — розв'язок (4). Виконуючи аналогічні перетворення над рядками одиничної матриці, очевидно, що j-тий рядок отримає вигляд $(k_1,\, k_2,\, \ldots k_n)$. Тобто розв'язок рівняння (4) співпадає з j-тим рядком перетвореної одиничної матриці $\Rightarrow$ j-тий рядок є розв'язок рівняння (2).

Доведемо, що $\overline{\beta}_i,\ i = \overline{r+1, n}$ — лінійно незалежні.

Запишемо B_2.

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки за допомогою елементарних перетворень ми перейшли від одиничної матриці E до B_2, то можемо перейти від B_2 до E. Крім того, $\operatorname{rg} E = n \Rightarrow \operatorname{rg} B_2 = n$ $\Leftrightarrow$ вектори-рядки матриці B_2 лінійно незалежні $\Rightarrow \overline{\beta}_i,\ i = \overline{r+1, n}$ — лінійно незалежні.

Відомо, що ФСР складається з $n - r$ лінійно незалежних розв'язків [1], звідси і випливає дане твердження. Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо ми не можемо за допомогою елементарних перетворень отримати нульових рядків, то розв'язком такої системи буде тривіальний розв'язок.

Висновок 1. Щоб знайти ФСР СЛОР потрібно:

1) виписати матрицю, транспоновану до матриці системи, дописати до неї одиничну (порядок E дорівнює кількості змінних у системі (1));

2) звести ліву частину нової матриці до трикутного вигляду, над елементами правої частини виконуємо ті ж перетворення;

3) виписати вектори-рядки, які знаходяться навпроти нульових рядків перетвореної матриці (ці вектори-рядки утворюють ФСР).

3. Розв'язування систем лінійних неоднорідних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (5)$$

$a_{ij},\, b_i \in \Im \quad \forall i = \overline{1,s}, \quad \forall j = \overline{1,n}.$

У системі (5) перенесемо вліво вільні члени

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 = 0; \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + c_2 = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + c_s = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $c_i = -b_i \quad \forall i = \overline{1,s}$.

Припустимо, що біля c_i знаходиться змінна $k \in \Im$, тобто:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 k = 0; \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + c_2 k = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + c_s k = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Ми отримали СЛОР. Випишемо матрицю системи (7)

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} & c_s \end{pmatrix}.$$

Нехай $\operatorname{rg} C = (n+1) - r$.

Розв'язавши СЛОР (7), наприклад, за допомогою наведеного вище алгоритму, отримаємо ФСР:

$$\begin{array}{l} \overline{\gamma}_1 = (p_{11},\, p_{12},\, \ldots,\, p_{1,n+1}); \\ \overline{\gamma}_2 = (p_{21},\, p_{22},\, \ldots,\, p_{2,n+1}); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\gamma}_r = (p_{r1},\, p_{r2},\, \ldots,\, p_{r,n+1}). \end{array} \tag{8}$$

Але це розв'язки СЛОР (7), а ми шукаємо розв'язки системи (5). Складемо матрицю з координат векторів (8):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & p_{1,n+1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & p_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rn} & p_{r,n+1} \end{pmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень над рядками, приводимо P, якщо це можливо, до наступного вигляду:

$$P' = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} & 1 \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{r1} & p'_{r2} & \cdots & p'_{rn} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Випишемо вектори-рядки P'.

$$\begin{array}{l} \overline{\gamma}'_1 = (p'_{11},\, p'_{12},\, \ldots,\, p'_{1n},\, 1); \\ \overline{\gamma}'_2 = (p'_{21},\, p'_{22},\, \ldots,\, p'_{2n},\, 0); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\gamma}'_r = (p'_{r1},\, p'_{r2},\, \ldots,\, p'_{rn},\, 0). \end{array} \tag{10}$$

Відкинемо останню координату кожного вектора у системі (10):

$$\begin{array}{l} \overline{\gamma}''_1 = (p'_{11},\, p'_{12},\, \ldots,\, p'_{1n}); \\ \overline{\gamma}''_2 = (p'_{21},\, p'_{22},\, \ldots,\, p'_{2n}); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\gamma}''_r = (p'_{r1},\, p'_{r2},\, \ldots,\, p'_{rn}). \end{array}$$

Теорема 2. *Загальний розв'язок системи (5) має вигляд*

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma}''_1 + l_1\overline{\gamma}''_2 + \ldots + l_{r-1}\overline{\gamma}''_r, \tag{11}$$

де $l_k \in \Im,\;\; k = \overline{1, r-1}$.

Доведення. Якщо $\overline{\gamma}_i$, $\overline{\gamma}_j$ — розв'язки СЛОР (7), то $(m_1\overline{\gamma}_i + m_2\overline{\gamma}_j)$ — теж розв'язок, $\forall\, m_1,\, m_2 \in \Im, \;\; \forall\, i,j = \overline{1,r}$.

Звідси випливає, що $\overline{\gamma}'_i$ — розв'язок системи (7).

Система (5) відрізняється від (7) лише змінною k. Очевидно, що системи (7) і (5) будуть еквівалентними, якщо $k = 1 \Rightarrow \overline{\gamma}''_1$ — розв'язок системи (5).

Випишемо приєднану однорідну систему до системи (5).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Розв'язками цієї системи будуть $\overline{\gamma}''_i$ ($i = \overline{2,r}$).

Оскільки система (5) уже має один розв'язок, тоді її стовпець вільних членів розкладається через інші стовпці. Отже ранг (12) буде дорівнювати $(n+1)-r$, але кількість невідомих у СЛОР (12) зменшиться на одиницю, тобто ФСР системи (12) буде входити $(r-1)$ вектор.

Оскільки вектори $\overline{\gamma}_i''$, $i = \overline{2, r}$ лінійно незалежні і їх є $(r-1)$, то вони утворюють ФСР системи (12). $\Rightarrow$ $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1'' + l_1\overline{\gamma}_2'' + \ldots + l_{r-1}\overline{\gamma}_r''$. Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо матрицю P не можна звести до вигляду (9), то система (5) розв'язків не має.*

Доведення. P не можна звести до вигляду (9) лише в тому випадку, коли елементи останнього стовпця дорівнюють нулеві.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси ФСР (7) буде мати вигляд:

$$\begin{array}{l} \overline{\gamma}_1' = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}, 0); \\ \overline{\gamma}_2' = (p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}, 0); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\gamma}_r' = (p_{r1}, p_{r2}, \ldots, p_{rn}, 0). \end{array} \tag{13}$$

Припустимо, що система (5) має розв'язок:

$$\overline{\beta} = (t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

тоді розв'язком (7) буде

$$\overline{\beta}' = (t_1, t_2, \ldots, t_n, 1).$$

Вектор $\overline{\beta}'$ виражається через ФСР (13), тобто:

$$\overline{\beta}' = l_1\overline{\gamma}_1' + l_2\overline{\gamma}_2' + \ldots + l_r\overline{\gamma}_r'. \tag{14}$$

Підставивши значення векторів у (14) і прирівнявши останню координату, отримаємо суперечність. Система (5) розв'язків не має. Теорему доведено.

Висновок 2. Щоб розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь потрібно:

1) перенести вільні члени вліво;
2) дописати біля вільних членів змінну і знайти ФСР утвореної СЛОР;
3) скласти матрицю із знайдених розв'язків СЛОР;
4) звести матрицю, якщо це можливо, до вигляду (9);
5) виписати вектори-рядки перетвореної матриці, опускаючи останню координату;
6) записати розв'язок у вигляді (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1965.— 432с.

2. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.-Л.: Гостехиздат, 1948.— 423с.