УДК 517.956

©2008 р. В. В. Ковдриш

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ШИРИНА ЧЛЕНІВ РЯДУ КОМУТАНТІВ ТА ЧЛЕНІВ ЕНГЕЛЕВОГО РЯДУ ГРУПИ $UT_n(\mathbb{Z}), n \geq 3$

Встановлено, що вербальна ширина членів ряду комутантів групи $UT_n(\mathbb{Z})$ унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел, $n \geq 3$, дорівнює одиниці.

We prove that the verbal width of members of the derived series of the group $UT_n(\mathbb{Z})$ of the unit triangular matrixes over the ring of integers, $n \geq 3$, is one.

1. Нехай G — довільна група, wG — її вербальна підгрупа, породжена деяким груповим словом w. Шириною вербальної підгрупи wG називається таке найменше число k, що будь-який елемент із wG можна подати у вигляді добутку не більше ніж k значень слів w і w^{-1} в групі G. Якщо такого k не існує, то вважають, що wG має нескінченну ширину. Поняття ширини вербальної підгрупи wG ввів Ф.Холл, а термін "ширина" було введено Ю.І.Мерзляковим [1] (див. також [2, §12]). Ширина вербальних підгруп в різних групах і класах груп досліджувалась різними авторами (див. [3],[4]). В нашій попередній публікації [6] досліджувалась ширина членів нижнього центрального ряду груп унітрикутних матриць над комутативними кільцями з одиницею; було встановлено, що вона дорівнює 1. А в публікації [5] було досліджено ширину вербальних підгруп, породжених словами виду $x^k, k > 1$ в унітрикутних групах над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел. В даній статті продовжується дослідження ширини вербальних підгруп унітрикутних груп над $\mathbb{Z}$. А саме, встановлено, що ширина членів ряду комутантів і ширина членів енгелевого ряду також дорівнює одиниці.

2. Нехай, $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, n — фіксоване натуральне число, $n \geq 2$, $UT_n(\mathbb{Z})$ — група верхніх унітрикутних матриць порядку n над кільцем $\mathbb{Z}$, $UT_n^m(\mathbb{Z})$ — підгрупа матриць з $UT_n(\mathbb{Z})$ в яких над головною діагоналлю знаходиться m нульових діагоналей, $1 \leq m \leq n-1$, $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — комутатор довільних двох матриць. Символом e_{ij} $(i,j = 1,2,...,n)$ далі позначатимемо матричну одиницю порядку n, тобто $n \times n$-матрицю у якої на перетині i-го рядка та j-го стовпця знаходиться одиниця, а решта елементів є нулями, а символом e — одиничну матрицю, порядку n.

Для деякого натурального числа n розглянемо послідовність чисел $\{m_s\}_{n=1}^{\mu}$, де $m_s = 2^s - 1$ і $\mu = [\log_2(n-1)] + 1$

Нехай
$$a = e + \sum_{j-i=m_s+1} e_{ij} \qquad (1)$$
Зрозуміло, що матриця a міститься в підгрупі $UT_n^{m_s}(\mathbb{Z})$. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Для довільної матриці* $b \in UT_n^{m_{s+1}}(\mathbb{Z})$ *рівняння*
$$[a,x] = b \qquad (2)$$
має принаймні один розв'язок в групі $UT_n^{m_s}(\mathbb{Z})$

Доведення. Нехай
$$b = e + \sum_{j-i>m_{s+1}} \beta_{ij} e_{ij}$$
— деяка матриця з $UT_n^{m_{s+1}}(\mathbb{Z})$,
$$x = e + \sum_{j-i>m_s} x_{ij} e_{ij}$$
— унітрикутна матриця з невідомими елементами. Покладемо
$$ax = e + \sum_{j-i>m_s} \gamma_{ij} e_{ij},$$

$$xa = e + \sum_{j-i>m_s} \gamma'_{ij} e_{ij},$$

$$xab = e + \sum_{j-i>m_s} \varepsilon_{ij} e_{ij},$$

де

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i+m+1,j}, \text{ якщо } j-i \geq m_s+1, \\ 0, \text{ якщо } j-i < m_s+1; \end{cases}$$

і

$$\gamma'_{ij} = \begin{cases} x_{i,j-m-1} + x_{i,j}, \text{ якщо } j-i \geq m_s+1, \\ 0, \text{ якщо } j-i < m_s+1. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що матриці ax, xa та xab належать підгрупі $UT_n^{m_s}(\mathbb{Z})$.

Оскільки рівняння $[a,x] = b$ можна записати у вигляді $ax = xab$, то остання рівність буде справедливою тоді і тільки тоді, коли $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$, тобто тоді, коли виконується рівність: $\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = 0$.
Тоді

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{k=i}^{j} \gamma'_{ik}\beta_{kj} =$$

$$= x_{ij} + x_{i+m_s+1,j} - \sum_{k=i}^{j}(x_{i,k-m_s-1} + x_{i,k})\beta_{kj} =$$

$$= x_{ij} + x_{i+m_s+1,j} - \sum_{k=i}^{j-1}(x_{i,k-m_s-1} + x_{i,k})\beta_{kj} -$$

$$-x_{i,j-m_s-1} - x_{ij} =$$

$$= x_{i+m_s+1,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1}(x_{i,k-m_s-1} + x_{i,k})\beta_{kj} -$$

$$-x_{i,j-m_s-1} - \beta_{ij} = 0,$$

$$i, j = 1, 2, ..., n$$

Звідси для довільних i та j дістаємо рівності

$$x_{i+m_s+1,j} = \sum_{k=i+1}^{j-1}(x_{i,k-m_s-1} + x_{i,k})\beta_{kj} +$$

$$+x_{i,j-m_s-1} + \beta_{ij}$$

або

$$x_{i,j} = x_{i-m_s-1,j-m_s-1} +$$

$$+ \sum_{k=i-m_s}^{j-1}(x_{i-m_s-1,k-m_s-1} + x_{i-m_s-1,k})\beta_{kj} + \quad (3)$$

$$+\beta_{i-m_s-1,j}$$

З останніх рівностей видно, що довільний елемент $x_{i,j}$ матриці x лінійно виражається через елементи цієї ж матриці, які знаходяться лівіше і вище від нього. Іншими словами, рівності (3) є рекурентними співвідношеннями для обчислення елементів матриці x. При цьому перші m_s+1 рядки матриці x можна визначити довільним чином, що дає можливість застосувати співвідношення (3) для обчислення всіх елементів матриці x. Теорему доведено.

Таким чином розв'язком рівняння (2) буде матриця x з групи $UT_n^{m_s}(\mathbb{Z})$, яка визначається умовами

1) при $i = 1, 2, ..., m_s+1$, $j = i+1, ..., n$ елемент $x_{i,j}$ вибирається довільно,

2) при $i = m_s+2, ..., n-1$ та $j = i+1, ..., n$ елементи $x_{i,j}$ обчислюються згідно формул (3).

Наслідок 1. *Якщо матрицю x будувати так, щоб її перші m_s рядків були одиничними векторами, то вона матиме такий вигляд*

$$x = \begin{pmatrix} E_{m_s+1} & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

де E_{m_s+1} — одинична матриця порядку m_s+1, а B — матриця з групи $UT_{n-m_s-1}^{m_s}(\mathbb{Z})$, така що

$$B = e + \sum_{j-i>m_s} \lambda_{ij} e_{ij},$$

де $\lambda_{i,j}$ є лінійними комбінаціями елементів матриці b.

Зауваження 1. *Аналогічне твердження можна довести для матриці a більш загального вигляду,*

$$a = e + \sum_{j-i=m_s+1} e_{ij} + \sum_{j-i>m_s+1} \alpha_{ij} e_{ij}$$

де α_{ij} — довільні елементи кільця $\mathbb{Z}$.

Нехай

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— унітрикутна матриця n-го порядку.

Теорема 2. *Для довільної матриці* $b \in UT_n^m(\mathbb{Z})$, $m > 1$ *рівняння*

$$[c, x] = b \tag{4}$$

має принаймні один розв'язок в групі $UT_n^{m-1}(\mathbb{Z})$

Доведення. Нехай

$$b = e + \sum_{j-i>m} \beta_{ij} e_{ij}$$

— деяка матриця з $UT_n^m(\mathbb{Z})$,

$$x = e + \sum_{j>i} x_{ij} e_{ij}$$

— унітрикутна матриця з невідомими елементами. Покладемо

$$cx = e + \sum_{j>i} \gamma_{ij} e_{ij},$$

$$xc = e + \sum_{j>i} \gamma'_{ij} e_{ij},$$

$$xcb = e + \sum_{j>i} \varepsilon_{ij} e_{ij},$$

де

$$\gamma_{ij} = x_{ij} + x_{i+1,j},$$

$$\gamma'_{ij} = x_{i,j-1} + x_{ij}$$

і

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \gamma'_{i,j}, \text{ якщо } j - i \le m, \\ \sum_{k=i}^{j} \gamma'_{ik} \beta_{kj}, \text{ якщо } j - i > m. \end{cases}$$

Оскільки рівняння $[c, x] = b$ можна записати у вигляді $cx = xcb$, то остання рівність буде справедливою тоді і тільки тоді, коли $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Таким чином знаходження розв'язку рівняння (4) зводиться до розв'язування рівнянь

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = 0.$$

Для знаходження розв'язків даних рівнянь розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $j - i \le m$ тоді

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = x_{i+1,j} - x_{i,j-1} = 0$$

тобто

$$x_{i+1,j} = x_{i,j-1}$$

Зробивши заміну $i + 1 = s$ і $j = t$ отримаємо

$$x_{s,t} = x_{s-1,t-1}, \text{ де } t - s \le m - 1$$

А це означає, що в матриці x елементи, які знаходяться в r-й діагоналі над головною, для $1 \le r \le m - 1$, будуть однаковими.

Випадок 2. Нехай $j - i > m$, тоді

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{k=i}^{j} \gamma'_{ik} \beta_{kj} =$$

$$= x_{ij} + x_{i+1,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} (x_{i,k-1} + x_{ik}) \beta_{kj} -$$

$$-\beta_{ij} - x_{i,j-1} - x_{ij} = 0$$

Звідки

$$x_{i+1,j} = \beta_{ij} + x_{i,j-1} + \sum_{k=i+1}^{j-1} (x_{i,k-1} + x_{ik}) \beta_{kj}$$

або

$$x_{s,t} = \beta_{s-1,t} + x_{s-1,t-1} + \sum_{k=s}^{t-1} (x_{s-1,k-1} + x_{s-1,k}) \beta_{kt},$$

де $s - t > m - 1$.

Об'єднавши ці два випадки і поклавши $x_{1j} = 0$, для всіх $2 \le j \le n$ матимемо матрицю x у якої є $m - 1$ нульова діагональ над головною, тобто $x \in UT_n^{m-1}(\mathbb{Z})$, що і треба було показати. Теорему доведено.

Нагадаємо, що ряд спадних підгруп

$$w_1(G) \ge w_2(G) \ge \ldots$$

групи G визначених умовами $w_1(G) = G$ і $w_{n+1}(G) = [w_n(G), w_n(G)]$, де $[A, B]$ — взаємний комутант підгруп A та B, називається *рядом комутантів* цієї групи. Кожен елемент ряду комутантів є вербальною підгрупою, що породжена, відповідно, словами

$$w_1 = w_1(x_1) = x_1,$$

$$w_2 = w_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2],$$

$$w_3 = w_3(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$$= [w_2(x_1, x_2), w_2(x_3, x_4)] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]],$$

$$...$$

$$w_n = w_n(x_1, x_2, ..., x_{2^{n-1}}) =$$

$$= [w_{n-1}(x_1, ..., x_{2^{n-2}}), w_{n-1}(x_{2^{n-2}+1}, ..., x_{2^{n-1}})]$$

Ряд комутантів групи $UT_n(\mathbb{Z})$ має вигляд

$$UT_n(\mathbb{Z}) \geq UT_n^{m_1}(\mathbb{Z}) \geq ... \geq$$

$$\geq UT_n^{m_{\mu-1}}(\mathbb{Z}) \geq UT_n^{m_\mu}(\mathbb{Z}) = \{e\},$$

де $\mu = [\log_2(n-1)] + 1$ і $m_s = 2^s - 1$ для всіх $s = 1, 2, ..., \mu$

Теорема 3. *Довільний член ряду комутантів групи $UT_n(\mathbb{Z})$ має ширину 1.*

Доведення. Індукція за числом k. База індукції — випадок $k = 1$

Довільну матрицю b з групи $UT_n^1(\mathbb{Z})$, можна подати у вигляді комутатора двох матриць з групи $UT_n(\mathbb{Z})$ (див. [7]), а це означає, що ширина групи $UT_n^1(\mathbb{Z})$ відносно слова w_2 дорівнює одиниці.

Припустимо, що група $UT_n^{m_k}(\mathbb{Z})$ відносно слова w_{k+1} має ширину один, тобто для довільної матриці b з $UT_n^{m_k}(\mathbb{Z})$ існують матриці $x_1, x_2, ..., x_{2^k}$ такі, що

$$b = [w_k(x_1, ..., x_{2^{k-1}}), w_k(x_{2^{k-1}+1}, ..., x_{2^k})],$$

де x_i – матриці з групи $UT_n(\mathbb{Z})$.

Нехай, b — деяка матриця із $UT_n^{m_{k+1}}(\mathbb{Z})$ покажемо, що група $UT_n^{m_{k+1}}(\mathbb{Z})$ відносно слова w_{k+2} має ширину один. Згідно з теоремою 1 матрицю b з групи $UT_n^{m_{k+1}}(\mathbb{Z})$ можна подати у вигляді $b = [a, c]$, де a та $c \in UT_n^{m_k}(\mathbb{Z})$. Оскільки $a \in UT_n^{m_k}(\mathbb{Z})$, то за припущенням індукції існують матриці $x_1, x_2, ..., x_{2^{k-1}}$ такі, що

$$a = w_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_{2^{k-1}}).$$

Аналогічно для матриці c в групі $UT_n(\mathbb{Z})$ існують матриці $x_{2^{k-1}+1}, ..., x_{2^k}$ такі, що

$$c = w_{k+1}(x_{2^{k-1}+1}, ..., x_{2^k}).$$

Тоді

$$b = [w_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_{2^{k-1}}), w_{k+1}(x_{2^{k-1}+1}, ..., x_{2^k})] =$$

$$= w_{k+2}(x_1, ..., x_{2^{k+1}}),$$

де $x_i \in UT_n(\mathbb{Z})$. Це й означає, згідно з означенням, що ширина групи $UT_n^{m_{k+1}}(\mathbb{Z})$ відносно слова w_{k+2} дорівнює одиниці. Теорему доведено.

Ряд спадних підгруп

$$e_1(G) \geq e_2(G) \geq e_3(G) \geq ...$$

групи G, кожен елемент якого породжений відповідно словами

$$e_1 = e_1(x) = x,$$

$$e_2 = e_2(y, x) = [y, x],$$

$$e_3 = e_3(y, y, x) = [y, y, x],$$

$$\cdots$$

$$e_{n+1} = e_{n+1}(\underbrace{y, y, ..., y}_{n}, x) = [\underbrace{y, y, ..., y}_{n}, x]$$

називається *енгелевим рядом* цієї групи.

Теорема 4. *При довільному $k = 1, 2, ..., n-1$ k-й член енгелевого ряду групи $UT_n(\mathbb{Z})$ збігається з k-м членом її нижнього центрального ряду.*

Доведення. Застосувавши $m - 1$ раз теорему 2 і один раз теорему 1 (див.[6], випадок $m = 0$) матимемо, що будь-яку матрицю b з групи $UT_n^m(\mathbb{Z})$ можна подати у вигляді

$$b = [\underbrace{y[y[...[y}_{m}, x]]]] = [\underbrace{y, y, ..., y}_{m}, x],$$

де

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а x — деяка матриця з групи $UT_n(\mathbb{Z})$. Таким чином енгелевий ряд і нижній центральний ряд групи $UT_n(\mathbb{Z})$ співпадають. Теорему доведено.

З доведення теореми 4 дістаємо такий

Наслідок 2.*Ширина членів енгелевого ряду групи $UT_n(\mathbb{Z})$ дорівнює 1.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мерзляков Ю.И.* Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т.6, №1. С.83-94.

2. *Мерзляков Ю.И.* Рациональные группы.М.:Наука, 1987.

3. *Мальцев А.И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, №3. С. 495-498.

4. *Алламбергенов Х.С., Романьков В.А.* О произвидениях комутаторов в группах. М., 1985. 19 с. Деп.в ВИНИТИ, №4566-85.

5. *Ковдриш В.В.* Ширини вербальних підгруп групи $UT_n(\mathbb{Z})$, що породжуються словами $x^k, k \in \mathbb{N}$// Науковий вісник Чернівецького університету. – 2007. – Випуск 349. – С. 42-45.

6. *Ковдриш В.В.* Ширини членів нижнього центрального ряду групи верхніх унітрикутних матриць над комумативним кільцем з одиницею // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2006. – Випуск 314-315. – С. 91-93.