УДК 517.956.4

©2008 р. С. Д. Івасишен, В. В. Лаюк

Інститут прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів

ПРО КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Наведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші для двох класів вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільних порядків.

We present some theorems on correct solvability of the Cauchy problem for two classes of degenerate Kolmogorov type parabolic equations of any order.

У статті [1] розглянуто класи рівнянь $\mathbf{E_{21}^B}$, $\mathbf{E_{22}^B}$ і $\mathbf{E_{23}^B}$, які містять часову змінну t, три групи просторових змінних x_1, x_2, x_3 і вироджуються за групами змінних x_2 та x_3. Ці класи узагальнюють відповідно клас $\mathbf{E_{21}}$ вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова порядку $2b$, клас $\mathbf{E_{22}}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова і клас $\mathbf{E_{23}}$ вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$ –параболічною частиною за основними змінними t і x_1 із монографії [2]. Для цих класів рівнянь наведено результати дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), які дозволяють вивчити властивості потенціалів, породжених ФРЗК, і на їх основі довести теореми про коректну розв'язність задачі Коші. В [1] сформульовано теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків тільки для рівнянь із класу $\mathbf{E_{22}^B}$. Результати із цих теорем є точними, оскільки є точними оцінки ФРЗК для таких рівнянь. Для рівнянь із інших двох класів оцінки ФРЗК вже не є настільки точними, як для класу $\mathbf{E_{22}^B}$, тому одержати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші не вдається. Однак, для цих рівнянь все ж таки можна встановити коректну розв'язність задачі Коші в просторах функцій, які зростають при $|x| \to \infty$ з максимальними порядками, але мають мінімальний тип зростання за змінними x_2 і x_3 або порядки зростання за цими змінними менші від максимальних. Тут наводяться результати для рівнянь із класу $\mathbf{E_{23}^B}$ і, як частинний випадок, із класу $\mathbf{E_{21}^B}$ в просторах функцій, які зростають з максимальними порядками при $|x_1| \to \infty$ та є обмеженими за x_2 і x_3.

Використовуватимемо позначення та означення із [1]. Як і в [1], вважатимемо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 – такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$.

Об'єктом нашого дослідження є рівняння вигляду

$$(S_B - \sum_{\|k_1\| \le 2b} a_{k_1}(t,x) \partial_{x_1}^{k_1}) u(t,x) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

де $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$; $S_B := \partial_t - (x, BD_x)$, B – матриця розміру $n \times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

B^1, B^2 – матриці, складені відповідно з дійсних чисел b^1_{sj}, $s \in \{1, ..., n_1\}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$,

b_{sj}^2, $s\in\{1,...,n_2\}$, $j\in\{1,...,n_3\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := \mathrm{col}(\partial_{x_{11}},...,\partial_{x_{1n_1}},\partial_{x_{21}},...,\partial_{x_{2n_2}},\partial_{x_{31}},...,\partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; b – найменше спільне кратне заданих натуральних чисел $b_1,...,b_{n_1}$ і $\|k_1\| := m_1k_{11}+...+m_{n_1}k_{1n_1}$, $m_j := b/b_j$, $j\in\{1,...,n_1\}$.

Для рівняння (1) припускатимемо виконаними такі умови:

$\boldsymbol{\alpha_1}$) матриця B, в якій блоки B^1 і B^2 записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1, B_1^2 і B_2^2 – матриці відповідно розмірів $n_2\times n_2$, $(n_1-n_2)\times n_2$, $n_3\times n_3$ і $(n_2-n_3)\times n_3$, задовольняє умови

$$\det B_1^j \neq 0, \quad j\in\{1,2\};$$

$\boldsymbol{\alpha_2}$) існує така стала $\delta>0$, що для кожної точки $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b_j};$$

$\boldsymbol{\alpha_3}$) коефіцієнти a_{k_1}, $\|k_1\|\le 2b$, обмежені та B_3-гельдерові з показником $\alpha\in(0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ у спеціальному сенсі, вказаному в [1];

$\boldsymbol{\alpha_4}$) коефіцієнти a_{k_1}, $\|k_1\|\le 2b$, мають обмежені та B_3-гельдерові (у такому ж, як в умові $\boldsymbol{\alpha_3}$, сенсі) з показником $\alpha\in(0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять.

Під розв'язками рівняння (1) розумітимемо L-розв'язки в сенсі означення 2 з [1], а під виразом S_Bu – похідну Лі від функції u (див. означення 1 з [1]).

Щоб сформулювати основний результат цієї статті, введемо необхідні позначення та означення.

Нехай

$$X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t)),$$

$$X_l(t) := (X_{l1}(t),...,X_{ln_l}(t)), \quad l\in\{1,2,3\},$$

$$X_{1j}(t) := x_{1j}, \quad j\in\{1,...,n_1\},$$

$$X_{2j}(t) := x_{2j} + t\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, \quad j\in\{1,...,n_2\},$$

$$X_{3j}(t) := x_{3j} + t\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{ks}^1 x_{1k}, \quad j\in\{1,...,n_3\};$$

$$M := \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}(s-1+1/(2b_j));$$

$$q_j := 2b_j/(2b_j-1), \quad j\in\{1,...,n_1\};$$

$$E_c(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c\sum_{k=1}^{n_1}(t-\tau)^{1-q_k}\times \times|x_{1k}-\xi_{1k}|^{q_k}\}\sum_{j=0}^{\infty}(\hat{C}\Gamma(\alpha/(2b))(t-\tau)^{\alpha/(2b)})^j\times \times(\Gamma(j\alpha/(2b)))^{-1}\times \times\exp\{-c\delta_0^j\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{n_s}(t-\tau)^{1-q_ks}\times \times|X_{sk}(t-\tau)-\xi_{sk}|^{q_k}\},$$

де c, $\hat{C}$ і δ_0 – деякі додатні сталі, причому $\delta_0<1$, Γ – гамма-функція Ейлера, α – число з умови $\boldsymbol{\alpha_3}$.

В [1] за умов $\boldsymbol{\alpha_1}$ – $\boldsymbol{\alpha_3}$ для рівняння (1) доведено існування ФРЗК Z та встановлено оцінки

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-\|k_1\|/(2b)}\times \times E_c(t,x;\tau,\xi),$$
$$|S_BZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1}\times \times E_c(t,x;\tau,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \|k_1\|\le 2b. \quad (2)$$

За додаткової умови $\boldsymbol{\alpha_4}$ ФРЗК має властивість нормальності та для нього є правильною формула згортки.

Розглянемо набір функцій

$$\vec{k}_1(t,\vec{a}_1) := (k_{11}(t,a_1),...,k_{1n_1}(t,a_{n_1})),$$

$$\vec{k}_{1j}(t,\vec{a}_{1j}) := c_0a_{1j}(c_0^{2b_j-1}-a_{1j}^{2b_j-1}t)^{1-q_j}, \quad j\in\{1,...,n_1\},$$

де $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (2), $\vec{a}_1 := (a_{11}, ..., a_{1n_1})$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{j\in\{1,...,n_1\}} \left(\frac{c_0}{a_{1j}}\right)^{2b_j-1}$.

Для $p \in [1, \infty]$ і функції $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, означимо для кожного $t \in [0, T]$ норму

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)} :=$$

$$= \|u(t, x) \exp\{-[\vec{k}_1(t, \vec{a}_1), x_1]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $[\vec{k}_1(t, \vec{a}_1), x_1] := \sum\limits_{j=1}^{n_1} k_{1j}(t, a_j)|x_{1j}|^{q_j}$.

Будемо використовувати такі простори:

$L_p^{\vec{a}_1}$, $p \in [1, \infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\vec{a}_1} := \|\varphi\|_p^{\vec{k}_1(0,\vec{a}_1)}$;

$M^{\vec{a}_1}$ – простір комплекснозначних узагальнених борельових мір μ в $\mathbb{R}^n$, які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\vec{a}_1} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\vec{a}_1, x_1]\} d\mu(x) < \infty;$$

$L_1^{-\vec{k}_1(T,\vec{a}_1)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\vec{k}_1(T,\vec{a}_1)} :=$$

$$= \|\psi(x) \exp\{[\vec{k}_1(T, \vec{a}_1), x_1]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\vec{k}_1(T,\vec{a}_1)}$ – простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, що $|\psi(x)| \exp\{[\vec{k}_1(T, \vec{a}_1), x_1]\} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Введемо ще норму

$$\|u(t, \cdot)\|_0^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)} :=$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|u(t, x)| \exp\{-[\vec{k}_1(t, \vec{a}_1), x_1]\})$$

і простір $C_0^{\vec{a}_1}$ неперервних в $\mathbb{R}^n$ функцій φ, які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_0^{\vec{a}_1} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|\varphi(x)| \exp\{-[\vec{a}_1, x_1]\}).$$

Сформулюємо основні теореми для рівняння (1). При цьому для правої частини цього рівняння використовуватимемо такі умови:

$\boldsymbol{\beta_0}$**)** функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ неперервна, локально гельдерова за x рівномірно щодо t і для будь-якого $t \in (0, T]$ є скінченними величини $\|f(t, \cdot)\|_0^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)}$ і $F_0(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_0^{\vec{k}_1(\tau,\vec{a}_1)} d\tau$;

$\boldsymbol{\beta_p}$**)** функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ неперервна, локально гельдерова за x рівномірно шодо t і для будь-якого $t \in (0, T]$ є скінченними величини $\|f(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)}$ і $F_p(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_p^{\vec{k}_1(\tau,\vec{a}_1)} d\tau$, де $p \in [1, \infty]$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_1}$*–* $\boldsymbol{\alpha_4}$. *Тоді правильні такі твердження:*

1) *для довільних функцій* $\varphi \in L_p^{\vec{a}_1}$ *і функції* f, *яка задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta_p}$, $p \in [1, \infty]$, *формула*

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

визначає єдиний розв'язок рівняння (1), *для якого справджуються оцінка*

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)} \le C(\|\varphi\|_p^{\vec{a}_1} + F_p(t)),$$

$$t \in (0, T],$$

при $p \in [1, \infty)$ *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \|u(t, \cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)} = 0,$$

а при $p = \infty$ *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t, x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{k}_1(T,\vec{a}_1)}$;

2) *для будь-яких узагальненої міри* $\mu \in M^{\vec{a}_1}$ *і функції* f, *що задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta_1}$, *формулою*

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (4)$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (1), *для якого справджуються оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)}\le C(\|\mu\|^{\vec{a}_1}+F_1(t)),$$

$$t\in(0,T],$$

і співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi\in L_1^{-\vec{k}_1(T,\vec{a}_1)}$.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_1}$*–* $\boldsymbol{\alpha_4}$*, для його правої частини* f *– умова* $\boldsymbol{\beta_0}$ *і* $\varphi\in C_0^{\vec{a}_1}$*. Тоді формулою* (3) *визначається єдиний розв'язок рівняння* (1), *для якого справджуються оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_0^{\vec{k}_1(t,\vec{a}_1)}\le C(\|\varphi\|_0^{\vec{a}_1}+F_0(t)),$$

$$t\in(0,T],$$

і для довільного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$ *співвідношення*

$$u(t,x)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\varphi(x) \text{ рівномірно щодо } x\in K.$$

Доведення теорем 1 і 2 є досить громіздким. Воно здійснюється за допомогою відповідної модифікації методики, розробленої у [2]. Ця методика ґрунтується на детальному дослідженні властивостей потенціалів із формул (3) і (4), а також використанні формули Гріна-Остроградського.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Івасишен С.Д., Лаюк В.В.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, №3. – С.56 – 65.

2. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).