УДК 517.929

©2008 р. І. М. Данилюк, Р. І. Петришин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОЦІНКА ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ НА ПІВОСІ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ВИЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Доведено нові теореми обґрунтування методу усереднення за всіма швидкими змінними на півосі початкової задачі для багаточастотної системи вищого наближення із запізненням в повільних і швидких змінних. Встановлено якісні оцінки відхилень розв'язків вихідної та усередненої задач.

We prove new substantiation theorems for the averaging method with respect to all fast variables on a semi-axle for the initial value problem for multi-frequency system of high approximation with delays in slow and fast variables. Qualitative estimations for deviations of solutions of the given and the averaged problems have been established.

Метод усереднення одержав розповсюдження на диференціальні рівняння в різних функціональних просторах, в тому числі і на рівняння із запізненнями. Суть методу полягає в заміні вихідних рівнянь простішими, які називаються усередненими. Природнім в даному випадку є питання про оцінку відхилення розв'язків вихідної та усередненої систем. Важливим також є дослідження існування розв'язку вихідної системи на півосі та оцінка його відхилення від розв'язку усередненої системи. Досліджувалось це питання для різних класів диференціальних рівнянь у працях [1-4].

У даній статті встановлено достатні умови ефективного використання методу усереднення за всіма швидкими змінними для системи вищого наближення із запізненням в повільних та швидких змінних на півосі.

Розглянемо багаточастотну систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k a_k(x,x_\lambda,\tau)+\varepsilon^{r+1}A(x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\lambda,\tau,\varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^{k-1} b_k(x,x_\lambda,\tau)+\varepsilon^{r}B(x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\lambda,\tau,\varepsilon), \tag{1}$$

в якій $x=x(\tau,\varepsilon)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$, $\varphi=\varphi(\tau,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m$, $\tau\in[0,+\infty)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малий параметр, $x_\lambda=x(\lambda(\tau),\varepsilon)$, $\varphi_\lambda=\varphi(\lambda(\tau),\varepsilon)$, $\lambda=\lambda(\tau)$ – неперервно-диференційовна на $[0,+\infty)$ функція, яка задовольняє умови

$$\lambda(\tau)<\tau,\ \lambda(0)=-\Delta<0,$$
$$0<\sigma_1^{-1}<\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}<\sigma_1=const, \tag{2}$$
$$\lambda(\tau_0)=0,\ \tau_0\in(0,+\infty),$$

$\Delta=const>0$, $\mathcal{D}$ – відкрита обмежена область; дійсні функції $a_k, b_k, k=\overline{0,r}$, A, B та їх частинні похідні по $x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau$ неперервні та обмежені сталою σ_1 на множині $\overline{G}=\mathcal{D}^2\times\mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R}_+\times(0,\varepsilon_0]$; A, B належать класу майже періодичних по φ, φ_λ функцій, $r\geq 1$.

Задамо для (1) початкову умову

$$x(\tau,\varepsilon)=f(\tau),$$
$$\varphi(\tau,\varepsilon)=g(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\Omega(t)dt,\ \tau\in[-\Delta,0], \tag{3}$$

де f, g, Ω – неперервно-диференційовні по $\tau\in[-\Delta,0]$ функції, причому

$$\left\|\frac{dg(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\|\leq\sigma_1,\ (\tau,\varepsilon)\in[-\Delta,0]\times(0,\varepsilon_0]. \tag{4}$$

Застосуємо до (1), (3) метод усереднення за всіма швидкими змінними [1, 5]. Усереднена за φ, φ_λ задача набуде вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k a_k(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau)+\varepsilon^{r+1}A_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon),\ \tau\geq 0,$$
$$\bar{x}(\tau,\varepsilon)=f(\tau),\ \tau\in[-\Delta,0], \qquad (5)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau}=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^{k-1}b_k(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau)+\varepsilon^{r}B_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon),\ \tau\geq 0,$$

$$\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)=g(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\Omega(t)dt,\ \tau\in[-\Delta,0], \qquad (6)$$

в якій $\bar{x}=\bar{x}(\tau,\varepsilon)$, $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$, $\bar{x}_\lambda=\bar{x}(\lambda(\tau),\varepsilon)$, $(A_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon),B_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon))=C_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon)=$

$$=\lim_{T\to\infty}T^{-2m}\int_0^T\ldots\int_0^T C(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\Phi,\tau,\varepsilon)d\Phi_1\ldots d\Phi_{2m},$$

$$C(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\Phi,\tau,\varepsilon)=$$
$$=(A(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\Phi,\tau,\varepsilon),B(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\Phi,\tau,\varepsilon)).$$

Побудована задача (5),(6) є простішою для розв'язання, ніж (1),(3), оскільки вона розпадається на дві задачі.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{d\xi}{d\tau}=a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau),\ \tau\geq 0,$$
$$\xi(\tau)=f(\tau),\quad \tau\in[-\Delta,0], \qquad (7)$$

в якій $\xi_\lambda=\xi(\lambda(\tau))$.

Дослідимо відхилення розв'язку $\xi=\xi(\tau)$ задачі (7) від розв'язку $\bar{x}=\bar{x}(\tau,\varepsilon)$ задачі (5) при $\tau\geq 0$.

Теорема 1. *Нехай*

1) існує розв'язок $\xi=\xi(\tau)$ початкової задачі (7), який визначений для всіх $\tau\in[-\Delta,+\infty)$ і лежить в $\mathcal{D}$ разом з деяким своїм ρ_1-околом, $\rho_1>0$;

2) $\dfrac{\partial a_0(y,\tau)}{\partial y}$ одностайно по $\tau\in\mathbb{R}_+$ рівномірно неперервна по $y\in\mathcal{D}^2$, $y=(x,x_\lambda)$;

3) нормальна фундаментальна матриця $Z(\tau,t)$ лінійної системи

$$\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau}=M(\tau)\zeta(\tau),\tau\geq t, \qquad (8)$$

де $M(\tau)=\dfrac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi}$, $\xi_\lambda=\xi(\lambda(\tau))$, задовольняє оцінку

$$\|Z(\tau,t)\|\leq K_1e^{-\gamma_1(\tau-t)} \qquad (9)$$

для всіх $\tau\geq t\geq 0$ зі сталими $K_1\geq 1,\gamma_1>0$, а

$$K_1\gamma_1^{-1}\sup_{\tau\in\mathbb{R}_+}\left\|\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}\right\|=\alpha<1. \qquad (10)$$

Тоді при досить малому $\varepsilon_0>0$ для всіх $\tau\in[0,\infty)$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справедлива оцінка

$$\|\bar{x}(\tau,\varepsilon)-\xi(\tau)\|\leq c_1\varepsilon \qquad (11)$$

зі сталою c_1, незалежною від ε.

Доведення. Позначимо $\zeta=\bar{x}-\xi$. Тоді з (5), (7) для $\tau>0$ маємо, що

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=M(\tau)\zeta+F(\tau,\varepsilon),$$

де

$$F(\tau,\varepsilon)=\int_0^1\left(\frac{\partial a_0(\xi+l\zeta,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi}-\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi}\right)dl\,\zeta+$$
$$+\int_0^1\left(\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda+l\zeta_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}-\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}\right)dl\,\zeta_\lambda+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k a_k(\zeta+\xi,\zeta_\lambda+\xi_\lambda,\tau)+$$
$$+\varepsilon^{r+1}A_0(\zeta+\xi,\zeta_\lambda+\xi_\lambda,\tau,\varepsilon)+\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}\zeta_\lambda.$$

Оскільки виконується умова 3) теореми, то для довільного числа $\mu_1>0$ існують числа $\mu_2^{(1)}>0$ і $\mu_2^{(2)}>0$ такі, що

$$\left\|\frac{\partial a_0(\xi+l\zeta,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi}-\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi}\right\|\leq\mu_1$$

при $\sup\limits_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]}\|\zeta(\tau,\varepsilon)\|\leq\mu_2^{(1)}$ і

$$\left\|\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda+l\zeta_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}-\frac{\partial a_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial\xi_\lambda}\right\|\leq\mu_1$$

при $\|\zeta(\lambda(\tau),\varepsilon)\|\leq\sup\limits_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]}\|\zeta(\tau,\varepsilon)\|\leq\mu_2^{(2)}$.

Врахуємо, що $\zeta(\tau,\varepsilon) \equiv 0$ при $\tau \in [-\Delta,0]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і $\sup\limits_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|\zeta(\lambda(\tau),\varepsilon)\| \le \sup\limits_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|\zeta(\tau,\varepsilon)\|$. Тоді для

$$\zeta(\tau,\varepsilon) = \int\limits_0^\tau Z(\tau,t)F(t,\varepsilon)dt$$

маємо

$$\sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|\zeta(\tau,\varepsilon)\| \le \big(2K_1\gamma_1^{-1}\mu_1+$$

$$+\alpha\big) \sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|\zeta(\tau,\varepsilon)\| + K_1\gamma_1^{-1}(r+1)\sigma_1\varepsilon.$$

Покладемо $\mu_1 = \frac{(1-\alpha)\gamma_1}{4K_1}$. Тоді одержуємо оцінку (11) зі сталою $c_1 = 2K_1(r+1)\sigma_1/((1-\alpha)\gamma)$.

Виберемо $\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\gamma_1(1-\alpha)\mu_2}{2(r+1)K_1\sigma_1}; \frac{\gamma_1(1-\alpha)\rho_1}{4(r+1)K_1\sigma_1}\right\}$, $\mu_2 = \min\left\{\mu_2^{(1)},\mu_2^{(2)}\right\}$. Вибране таким чином ε_0 забезпечує належність розв'язку $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ $\frac{1}{2}\rho_1$-околу $\xi = \xi(\tau)$ при всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0,+\infty)\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорему доведено.

Нехай виконуються наступні умови:

1) $(n+m)$ – вимірна вектор-функція $C(y,\Phi,\tau,\varepsilon)=(A(y,\Phi,\tau,\varepsilon),B(y,\Phi,\tau,\varepsilon))$ належить класу майже періодичних по Φ функцій, які розкладаються в рівномірно по Φ збіжний в $\overline{G}$ ряд Фур'є

$$C(y,\Phi,\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s(y,\tau,\varepsilon)e^{i(k_s,\Phi)},$$

де $y=(x,x_\lambda)\in\mathcal{D}^2$, $\Phi=(\varphi,\varphi_\lambda)\in\mathbb{R}^{2m}$, $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця, (k_s,Φ) – скалярний добуток в $\mathbb{R}^{2m}$, $k_0=0$, $k_s\ne 0$ при $s\ge 1$.

Припустимо, що при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ функція $C(y,\Phi,\tau,\varepsilon)$ та її частинні похідні першого порядку по y,Φ,τ неперервні і обмежені сталою σ_1 в області $\overline{G}$ і виконується нерівність

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\|k_s\|}\right)\sup_G \|C_s(y,\tau,\varepsilon)\| + \right.$$

$$+\frac{1}{\|k_s\|}\left(\sup_G\left\|\frac{\partial C_s(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}\right\| + \right. \qquad (12)$$

$$\left.\left. +\sup_G\left\|\frac{\partial C_s(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\right\|\right)\right] \le \sigma_1,$$

де $G=\mathcal{D}^2\times[0,+\infty)\times(0,\varepsilon_0]$.

2) $\Omega(\tau)\in C^p_{[-\Delta,0]}$, $\quad f(\tau)\in C^p_{[-\Delta,0]}$,

$$a_0(y,\tau)\in C^{p-1}\left(\mathcal{D}^2\times[0,+\infty),\sigma_1\right), \qquad (13)$$

$$b_0(y,\tau)\in C^{p}\left(\mathcal{D}^2\times[0,+\infty),\sigma_1\right),$$

$$\lambda(\tau)\in C^{p+1}\left([0,+\infty),\sigma_1\right).$$

Тут $p\ge 2m$, а через $C^l\left(\mathcal{D}^2\times[0,+\infty),\sigma_1\right)$ позначено множину вектор-функцій, які мають неперервні і обмежені в $\mathcal{D}^2\times[0,+\infty)$ сталою σ_1 частинні похідні по y,τ до порядку l включно.

3) Для $\tau\in\mathbb{R}_+,\tau\ne\tau_j, j=\overline{0,p-1}$, виконується нерівність

$$\det(W^T(\xi,\xi_\lambda,\tau)W(\xi,\xi_\lambda,\tau))\ge c, \qquad (14)$$

в якій точки τ_j визначаються з умови

$$\lambda(\tau_j)=\tau_{j-1}, j=\overline{1,p-1},$$

c – додатна стала, $\xi=\xi(\tau),\xi_\lambda=\xi(\lambda(\tau))$,

$$W(\xi,\xi_\lambda,\tau)=\left(\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}}v_l(\xi,\xi_\lambda,\tau)\right)_{j,l=1}^{p,2m},$$

$W^T(\xi,\xi_\lambda,\tau)$ – транспонована матриця, $v(\xi,\xi_\lambda,\tau) = (v_1(\xi,\xi_\lambda,\tau), \ldots, v_{2m}(\xi,\xi_\lambda,\tau))$ – 2m-вимірний вектор,

$$v(\xi,\xi_\lambda,\tau)=\begin{cases}(\omega(\xi,\xi_\lambda,\tau),\Omega(\lambda(\tau))\lambda'(\tau)), \tau\in(0,\tau_0),\\ (\omega(\xi,\xi_\lambda,\tau),\omega(\xi_\lambda,\xi_{\lambda\lambda},\lambda(\tau))\lambda'(\tau)),\\ \qquad \tau\in(\tau_0,+\infty),\tau\ne\tau_j,\\ \qquad j=1,2,\ldots,p-1,\end{cases}$$

$\Omega(\tau)=(\Omega_1(\tau),\ldots,\Omega_m(\tau))$, $\omega(\xi,\xi_\lambda,\tau)=(\omega_1(\xi,\xi_\lambda,\tau), \ldots,\omega_m(\xi,\xi_\lambda,\tau))\equiv b_0(\xi,\xi_\lambda,\tau)$, $\xi=\xi(\tau)$, $\xi_\lambda=\xi(\lambda(\tau))$, $\xi_{\lambda\lambda}=\xi(\lambda(\lambda(\tau)))$.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення* **1**) – **3**) *і умови теореми 1.*

Тоді існують такі додатні сталі ε_0 *і* c_2, *що при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *для довільної неперервно диференційовної по* $\tau\in[-\Delta,0]$ *функції* $g(\tau,\varepsilon)$, *яка задовольняє нерівність (4), розв'язок* $x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon)$ *початкової задачі*

(1),(3) визначений для всіх $\tau \in [0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і виконуються нерівності

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{r+\frac{1}{p}}, \qquad (15)$$

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le c_2(1+\tau)\varepsilon^{r-1+\frac{1}{p}}. \qquad (16)$$

Доведення. Нехай $[0,T), T = T(\varepsilon)$, – максимальний півінтервал, для якого $x(\tau,\varepsilon)$ - компонента розв'язку задачі (1),(3) задовольняє нерівність

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)\| < \varepsilon^{\beta}, \quad \tau \in [0,T_1)$$

зі сталою $\beta = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{p}\right)$.

Оскільки виконуються умови теореми 1, то існує розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ усередненої задачі (5), який визначений для всіх $\tau \in [-\Delta,\infty)$ і лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ_1 - околом.

Позначимо далі $z(\tau,\varepsilon) = x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)$. Тоді із (1), (5) знаходимо, що

$$\frac{dz}{d\tau} = H_1(\tau,\varepsilon)z + H_2(\tau,\varepsilon)z_\lambda + U(z,z_\lambda,\tau,\varepsilon) +$$
$$+\,\varepsilon^{r+1}\tilde{A}(z,z_\lambda,\tau,\varepsilon),\ \ \tau \in [0,T), \qquad (17)$$
$$z(\tau,\varepsilon)=0,\ \ \tau \in [-\Delta,0];$$

$$H_1(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\frac{\partial a_k(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial \xi}+\varepsilon^{r+1}\frac{\partial A_0(\xi,\xi_\lambda,\tau,\varepsilon)}{\partial \xi},$$

$$H_2(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\frac{\partial a_k(\xi,\xi_\lambda,\tau)}{\partial \xi_\lambda}+\varepsilon^{r+1}\frac{\partial A_0(\xi,\xi_\lambda,\tau,\varepsilon)}{\partial \xi_\lambda},$$

$$U(z,z_\lambda,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\left(a_k(z+\bar{x},z_\lambda+\bar{x}_\lambda,\tau)-\right.$$
$$\left.-a_k(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau)\right)+\varepsilon^{r+1}\left(A_0(z+\bar{x},z_\lambda+\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon)-\right.$$
$$\left.-\,A_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon)\right)-H_1(\tau,\varepsilon)z-H_2(\tau,\varepsilon)z_\lambda,$$
$$\tilde{A}(z,z_\lambda,\tau,\varepsilon) = A(z+\bar{x},z_\lambda+\bar{x}_\lambda,\varphi,\varphi_\lambda,\tau,\varepsilon)-$$
$$-\,A_0(z+\bar{x},z_\lambda+\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon).$$

Розглянемо далі лінійну систему

$$\frac{dz}{d\tau} = H_1(\tau,\varepsilon)z(\tau,\varepsilon), \qquad (18)$$

яку подамо у вигляді

$$\frac{dz}{d\tau}=M(\tau)z(\tau,\varepsilon)+(H_1(\tau,\varepsilon)-M(\tau))z(\tau,\varepsilon), \quad (19)$$

Вважаючи, що (19) – лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь, для знаходження нормальної фундаментальної матриці $Q(\tau,t,\varepsilon)$ лінійної однорідної системи (18) одержимо задачу

$$\frac{dQ}{d\tau}=M(\tau)Q(\tau,t,\varepsilon)+(H_1(\tau,\varepsilon)-M(\tau))Q(\tau,t,\varepsilon),$$
$$Q(t,t,\varepsilon)=E,$$

звідки із врахуванням оцінки (9) для нормальної фундаментальної матриці $Z(\tau,t)$ системи (8) отримаємо

$$\|Q\| \le K_1e^{-\gamma_1(\tau-t)}+\varepsilon\int_t^\tau K_1e^{-\gamma_1(\tau-\xi)}r\sigma_1\|Q\|d\xi,$$

або

$$\|Q(\tau,t,\varepsilon)\| \le K_2e^{-\gamma_2(\tau-t)} \qquad (20)$$

при $\tau \ge t \ge 0$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0^{(1)}], \varepsilon_0^{(1)} \le \gamma_1/(2K_1r\sigma_1)$, де $K_2 \equiv K_1$, $\gamma_2 \equiv \gamma_1-\varepsilon_0^{(1)}K_1\sigma_1r$.

Виконання умови (10) дає змогу встановити нерівність

$$K_2\gamma_2^{-1}\sigma^0 < 1 \qquad (21)$$

в якій

$$\sigma^0 = \sup_{\tau\in\mathbb{R}_+,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\|H_2(\tau,\varepsilon)\|.$$

Оскільки $Q(\tau,t,\varepsilon)$ – нормальна фундаментальна матриця лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (18), то розв'язок задачі (17) можна записати у вигляді

$$z(\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau Q(\tau,t,\varepsilon)\Big(H_2(t,\varepsilon)z_\lambda+$$
$$+\,U(z(t,\varepsilon),z(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)+ \qquad (22)$$
$$+\varepsilon^{r+1}\tilde{A}(z(t,\varepsilon),z(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)\Big)\,dt.$$

Оцінимо $\|z(\tau,\varepsilon)\|$. Із оцінок (20), (21) і

$$\int_0^\tau e^{-\gamma_2(\tau-t)}dt \le \gamma_2^{-1} \quad \text{при } \tau \ge 0,$$

маємо нерівність

$$\left\| \int\limits_0^\tau Q(\tau,t,\varepsilon)H_2(t,\varepsilon)z(\lambda(t),\varepsilon)dt \right\| \le$$

$$\le \sigma^0 K_2 \gamma_2^{-1} \sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\|.$$

Подамо $U(\tilde z,\tau,\varepsilon)$ у вигляді

$$U(\tilde z,\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial a_0(\tilde y + l\tilde z,\tau)}{\partial \tilde y} - \frac{\partial a_0(\tilde y,\tau)}{\partial \tilde y}\right) dl\, \tilde z +$$

$$+\varepsilon \tilde U(\tilde z,\tau,\varepsilon),$$

де $\tilde z = (z(\tau,\varepsilon), z(\lambda(\tau),\varepsilon))$, $\tilde y = (\bar x(\tau,\varepsilon), \bar x(\lambda(\tau),\varepsilon))$. Функція $\dfrac{\partial a_0(y,\tau)}{\partial y}$ одностайно по $\tau \in \mathbb{R}_+$ рівномірно неперервна по y на множині $\mathcal{D}^2$. Тому для довільного числа $\mu_1 > 0$ існує число $\mu_2 > 0$ таке, що

$$\left\| \frac{\partial a_0(\tilde y + l\tilde z,\tau)}{\partial \tilde y} - \frac{\partial a_0(\tilde y,\tau)}{\partial \tilde y} \right\| \le \mu_1,$$

при $\|\tilde z(\tau,\varepsilon)\| \le \mu_2$. Отже,

$$\|U(\tilde z,\tau,\varepsilon)\| \le (\mu_1 +$$

$$+3\sigma_1(r+1)\varepsilon) \sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\|.$$

Із останньої нерівності і нерівності (20) дістанемо, що

$$\left\| \int\limits_0^\tau Q(\tau,t,\varepsilon)U(z(t,\varepsilon),z(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)dt \right\| \le$$

$$\le K_2\gamma_2^{-1}(\mu_1 + 3\sigma_1(r+1)\varepsilon) \sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\|.$$

Із зображення $z(\tau,\varepsilon)$, записаного формулою (22), знаходимо

$$\sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\| \le K_2\gamma_2^{-1}(\mu_1 +$$

$$+3\sigma_1(r+1)\varepsilon + \sigma^0) \sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\| + \quad (23)$$

$$+\varepsilon^{r+1} \left\| \int\limits_0^\tau Q(\tau,t,\varepsilon)\tilde A(z(t,\varepsilon),z(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)dt \right\|.$$

Оцінимо далі норму інтеграла в останній нерівності. У точках $\tau = \tau_j, j = \overline{0,p-1}$, розв'язок $\xi = \xi(\tau)$ задачі (7) може не мати p неперервних похідних [6,7]. Тому подамо інтеграл у вигляді суми

$$\int\limits_0^\tau Q(\tau,t,\varepsilon)\tilde A(z(t,\varepsilon),z(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)dt = \int\limits_0^{\tau_0} r_s(\tau,t,\varepsilon)dt +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{p-1} \int\limits_{\tau_{\nu-1}}^{\tau_\nu} r_s(\tau,t,\varepsilon)dt + \int\limits_{\tau_{p-1}}^{q_1} r_s(\tau,t,\varepsilon)dt +$$

$$+\sum_{\nu=q_1}^{q_2-1} \int\limits_\nu^{\nu+1} r_s(\tau,t,\varepsilon)dt + \int\limits_{q_2}^{\tau} r_s(\tau,t,\varepsilon)dt, \quad (24)$$

$$r_s(\tau,t,\varepsilon) = f_s(\tau,t,\varepsilon)\exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^t (k_s, \widetilde\omega(\xi,\xi_\lambda,l))\,dl \right\},$$

$$f_s(\tau,t,\varepsilon) = Q(\tau,t,\varepsilon)A_s(x(t,\varepsilon),x(\lambda(t),\varepsilon),t,\varepsilon)\times$$

$$\times \exp\{i(k_s,\Psi(t,\varepsilon))\}\times$$

$$\times \exp\left\{ i\left(k_s, \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^t (\widetilde\omega(x,x_\lambda,l) - \widetilde\omega(\bar x,\bar x_\lambda,l))\,dl\right)\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{ i\left(k_s, \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^t (\widetilde\omega(\bar x,\bar x_\lambda,l) - \widetilde\omega(\xi,\xi_\lambda,l))\,dl\right)\right\},$$

q_1 – ціла частина τ_{p-1}, q_2 – ціла частина τ, $\Psi(t,\varepsilon) = \left(\widetilde\psi(t,\varepsilon), \underset{\sim}{\psi}(t,\varepsilon)\right)$,

$$\widetilde\psi(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^t \bar\omega(\xi,\xi_\lambda,l)dl,$$

$$\underset{\sim}{\psi}(t,\varepsilon) = \varphi(\lambda(t),\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^t \underline{\omega}(\xi,\xi_\lambda,l)dl,$$

$\bar\omega(\xi,\xi_\lambda,t) = \omega\big(\xi(t),\xi(\lambda(t)),t\big)$, $\underline{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t) = \Omega\big(\lambda(t)\big)\lambda'(t)$ при $t \in [0,\tau_0]$ і $\underline{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t) = \omega\big(\xi(\lambda(t)),\xi(\lambda(\lambda(t))),\lambda(t)\big)\lambda'(t)$ при $t > \tau_0$, $2m$-вимірний вектор $\widetilde\omega(\xi,\xi_\lambda,t)$ визначається рівністю $\widetilde{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t) = \left(\bar{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t), \underset{\sim}{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t)\right)$, $k_s = \left(\widetilde{k}_s, \underset{\sim}{k_s}\right)$ – $2m$-вимірний вектор, $\widetilde{k}_s$ і k_s – m-вимірні вектори. $2m$-вимірні вектори $\widetilde{\widetilde{\omega}}(x,x_\lambda,t)$, $\widetilde{\omega}(\bar{x},\bar{x}_\lambda,t)$ визначаються аналогічно $\widetilde{\omega}(\xi,\xi_\lambda,t)$, лише замість функцій $\{\xi,\xi_\lambda\}$ використовуються $\{x,x_\lambda\}$ і $\{\bar{x},\bar{x}_\lambda\}$ відповідно.

Виконання умов (13) і (14) гарантують [1,с.23] рівномірну неперервність на проміжках $(0,\tau_0),(\tau_0,\tau_1),\ldots,(\tau_{p-2},\tau_{p-1}),(\tau_{p-1},\infty)$, функцій $\dfrac{d^i}{d\tau^i}\widetilde{\omega}(\xi,\xi_\lambda,\tau), i = \overline{0,p-1}$, і рівномірну обмеженість

$$\left\|\left(W_p^T(\xi,\xi_\lambda,\tau)W_p(\xi,\xi_\lambda,\tau)\right)^{-1}W_p^T(\xi,\xi_\lambda,\tau)\right\| \le c^*,$$

$c^* = const$. А тому справедливою є оцінка осциляційного інтеграла [1, с.18]

$$\left\|\int\limits_{\bar\tau}^{\bar\tau+\tau^*} F(t)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar t}^{t}(k_s,\widetilde{\omega}(\xi,\xi_\lambda,l))\,dl\right\}dt\right\| \le$$

$$\le \sigma_0\varepsilon^{\frac{1}{p}}\left[\left(1+\frac{1}{\|k_s\|}\right)\sup_{\tau\in[\bar\tau,\bar\tau+\tau^*]}\|F(\tau)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k_s\|}\sup_{\tau\in[\bar\tau,\bar\tau+\tau^*]}\left\|\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right\|\right] \qquad (25)$$

для всіх $k_s \ne 0, \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \tau^*\in(0,\delta^*], \delta^* = \max\{1,\tau_0,\tau_1-\tau_0,\ldots,\tau_{p-1}-\tau_{p-2}\}, \bar\tau\in\mathbb{R}, \bar t\in\mathbb{R}$, при досить малому ε_0 зі сталою σ_0, не залежною від $k_s,\varepsilon,F,\bar\tau$, а вектор-функції $F(t)$ і $\dfrac{dF(t)}{dt}$ мають кусково-неперервні на $[\bar\tau,\bar\tau+\tau^*]$ похідні.

Оскільки матриця $Q(\tau,t,\varepsilon)$ за означенням є розв'язком початкової задачі

$$\frac{dQ(\tau,t,\varepsilon)}{d\tau} = H_1(\tau,\varepsilon)Q(\tau,t,\varepsilon), \quad \tau > t,$$

$$Q(t,t,\varepsilon) = E, \qquad (26)$$

і володіє властивістю згортки, то легко одержати рівність

$$\frac{dQ(\tau,t,\varepsilon)}{dt} = -Q(\tau,t,\varepsilon)H_1(t,\varepsilon),$$

звідки

$$\left\|\frac{dQ(\tau,t,\varepsilon)}{dt}\right\| \le (r+2)\sigma_1K_2e^{-\gamma_2(\tau-t)}. \qquad (27)$$

Враховуючи оцінки

$$\left\|\frac{d\Psi(t,\varepsilon)}{dt}\right\| \le 2(r+1)\sigma_1,$$

$$\left\|\frac{df_s(\tau,t,\varepsilon)}{dt}\right\| \le K_2\sup_{t\in I_j}\|Q\|\left(\sigma_1\left((r+2)+\right.\right.$$

$$\left. + 2(r+1)\|k_s\|\right)\sup_G\|A_s\| + \sup_G\left\|\frac{\partial A_s}{\partial\tau}\right\| +$$

$$+\sigma_1(r+2)\left(\sup_G\left\|\frac{\partial A_s}{\partial x}\right\| + \sigma_1\sup_G\left\|\frac{\partial A_s}{\partial x_\lambda}\right\|\right) +$$

$$\left. +2\sigma_1\varepsilon^{-1}\|k_s\|\sup_G\|A_s\|\left(\sup_{\tau,\varepsilon}\|z(\tau,\varepsilon)\| + c_1\varepsilon\right)\right),$$

$$\|f_s(\tau,t,\varepsilon)\| \le K_2\sup_{t\in I_j}\|Q\|\sup_G\|A_s\|,$$

а також (12), (20), (25) і

$$e^{-\gamma_2\tau}\left(1+\sum_{\nu=0}^{p-1}e^{\gamma_2\tau_\nu}+\sum_{\nu=q_1}^{q_2}e^{\gamma_2\nu}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\tau e^{-\gamma_2(\tau-t)}dt \le \frac{1}{\gamma_2\delta},$$

$\tau \ge 0$, $\delta = \min\{1,\tau_0,\tau_1-\tau_0,\ldots,\tau_{p-1}-\tau_{p-2}\}$, $I = \bigcup\limits_{j=1}^{q+1} I_j = \{[0,\tau_0],[\tau_0,\tau_1],\ldots,[\tau_{p-2},\tau_{p-1}], [\tau_{p-1},q_1],[q_1,q_1+1],\ldots,[q_2-1,q_2],[q_2,\tau]\}$ – множина проміжків інтегрування інтегралів у (24), оцінимо норму інтеграла у нерівності (23) величиною

$$\sigma_3\varepsilon^{\frac{1}{p}} + 2\sigma_0K_2(\delta\gamma_2)^{-1}\sigma_1^2\varepsilon^{\frac{1}{p}-1}\sup_{[0,T)\times(0,\varepsilon_0]}\|z(\tau,\varepsilon)\|,$$

де $\sigma_3 = \sigma_0K_2\delta^{-1}\gamma_2^{-1}\sigma_1^2(5r+8+c_1)$.

Виберемо $\mu_1 = 3(r+1)\sigma_1\varepsilon_0 + 2\sigma_0\delta^{-1}\sigma_1^2\varepsilon_0^{r+\frac{1}{p}}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \le \min\{\varepsilon_0^{(1)},\varepsilon_0^{(2)}\}$, $\varepsilon_0^{(2)} \le (1 - K_2\gamma_2^{-1}\sigma^0)/(2K_2\gamma_2^{-1}(3(r+1)\sigma_1 + 2\sigma_0\delta^{-1}\sigma_1^2))$.

При вибраних значеннях μ_1 і ε вираз

$$1 - K_2\gamma_2^{-1}\left(\mu_1 + 3(r+1)\sigma_1\varepsilon + \sigma^0\right) -$$

$$-2\sigma_0 K_2\delta^{-1}\gamma_2^{-1}\sigma_1^2\varepsilon^{r+\frac{1}{p}} \equiv s$$

додатний. Тоді з нерівності (23) одержимо оцінку

$$\sup_{\tau\in[0,T),\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \|z(\tau,\varepsilon)\| \le s^{-1}\sigma_3\varepsilon^{r+\frac{1}{p}}. \qquad (28)$$

Звідси випливає, що при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_0^{(3)} \equiv \min\left\{\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}, (2s^{-1}\sigma_3)^{2/(-r-\frac{1}{p})}\right\}$, виконується нерівність

$$\sup_{\tau\in[0,T)} \|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon)\| \le \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta}.$$

Враховуючи означення числа T, маємо, що $T = \infty$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Із нерівності (28) одержуємо оцінку (15) зі сталою $c_2 = s^{-1}\sigma_3$ для всіх $\tau \in [0,+\infty)$, $\varepsilon \le \varepsilon_0^{(4)} \equiv \min\left\{\varepsilon_0^{(3)}, \left(\frac{\rho s}{2\sigma_3}\right)^{1/\left(r+\frac{1}{p}\right)}\right\}$.

Доведемо далі оцінку (16). З інтегрального зображення $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon)$ і $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$ із систем (1),(6) випливає нерівність

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \Bigg\| \int_0^{\tau} \Bigg[\sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1}(b_k(x,x_\lambda,\tau) - b_k(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau)) +$$

$$+\varepsilon^r \left((B(x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\lambda,\tau,\varepsilon) - B_0(x,x_\lambda,\tau,\varepsilon)\right) +$$

$$+(B_0(x,x_\lambda,\tau,\varepsilon) - B_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau,\varepsilon)))\Bigg] d\tau \Bigg\|,$$

з якої дістанемо, що

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \sigma_4^{(1)}(1+\tau)\varepsilon^{r+\frac{1}{p}-1} + \varepsilon^r\|J(\tau,\varepsilon)\|$$

при $\sigma_4^{(1)} = 2s^{-1}\sigma_1\sigma_3(r+2)$, а

$$J(\tau,\varepsilon) = \int_0^{\tau} (B(x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\lambda,\tau,\varepsilon) - B_0(x,x_\lambda,\tau,\varepsilon))\, d\tau.$$

По аналогії з рівністю (24) подамо $J(\tau,\varepsilon)$ у вигляді суми інтегралів по таких самих відрізках та, використовуючи оцінки (25) і (28), одержимо нерівність

$$\|J(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_4^{(2)}(1+\tau)\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

зі сталою $\sigma_4^{(2)} = 2\sigma_0\sigma_1(1+\sigma_1+\sigma_1(r+1)+s^{-1}\sigma_3+c_1)$. Позначимо $\sigma_4 = \max\left\{\sigma_4^{(1)}; \sigma_4^{(2)}\right\}$, $c_2 = \max\{\sigma_4, s^{-1}\sigma_3\}$. Тоді

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le c_2(1+\tau)\varepsilon^{r-1+\frac{1}{p}}.$$

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.

2. *Самойленко А.М., Бігун Я.Й.* Усереднення нелінійних коливних систем вищого наближення із запізненням // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, №1. — С. 77–85.

3. *Петришин Р.І., Похила О.М.* Оцінка похибки методу усереднення на півосі для багаточастотної резонансної системи // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, №5. — С. 685–690.

4. *Петришин Я.Р.* Обгрунтування методу усереднення на півосі для одного класу нелінійних коливних систем з імпульсним впливом // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 105–109.

5. *Петришин Р.І., Данилюк І.М.* Оцінки похибки методу усереднення в багаточастотних системах зі сталим запізненням // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, №2. — С. 233–243.

6. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

7. *Ким А.В.* I-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, В.Г. Пименов. — М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. — 256 с.