УДК 517.956

©2008 р. **В. В. Городецький, Р. С. Колісник**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОЛІНОМІАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Знайдено наближені розв'язки задачі Коші для еволюційного рівняння з невід'ємним самоспряженим оператором.

We find approximate solutions of the Cauchy problem for an evolution equation with a non-negative self-adjoint operator.

Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння вигляду

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \; 0 < T < \infty,$$

$$u(0) = f, \tag{1}$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі H. У праці [1] методами теорії вагового наближення функцій на півосі одержано зображення розв'язку задачі (1) у вигляді $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t, A)f$, де $P_n(t, \lambda)$ – поліном степеня n змінної λ при фіксованому $t \in (0, T]$. При цьому дається оцінка швидкості збіжності: похибка $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|_H$ спадає як $\exp(-\sigma \ln^2 n)$, $\sigma > 0$. В [2] запропоновано інший метод побудови поліномів P_n, який базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1$, а $\mu > 0$ – число, залежне від вектора f. Цей метод дає точнішу, ніж в [1] оцінку відхилення (ρ^n, де $0 < \rho < 1$), але у вужчому класі початкових даних (класі аналітичних векторів оператора A). У цій праці знайдено клас початкових даних (клас цілих векторів оператора A), в якому оцінка відхилення $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|_H$ має вигляд $L^n/n!$, де $L > 0$.

1. Узагальнені многочлени Лагерра. Символом $\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in (0, \infty)$, $\alpha > -1$, $\mu > 0$; α, μ – фіксовані параметри, позначатимемо узагальнені многочлени Лагерра, які утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$. Легко переконатися в тому, що

$$\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1+\alpha}}\hat{L}_{\alpha,1,n}(\mu\lambda), \tag{2}$$

де $\hat{L}_{\alpha,1,n}(\lambda)$ – многочлени, ортонормовані з вагою $\lambda^\alpha \exp(-\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$. Урахувавши (2) та формулу Родріга для многочленів $\hat{L}_{\alpha,1,n}$ (див. [3, с. 55]) знайдемо, що

$$\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda) = \frac{(-1)^n\sqrt{\mu^{1+\alpha}}}{\sqrt{n!\Gamma(n+\alpha+1)}}(\mu\lambda)^{-\alpha}\times$$

$$\times e^{\mu\lambda}[(\mu\lambda)^{\alpha+n}e^{-\mu\lambda}]^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

За системою многочленів $\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, як і за довільною іншою ортонормованою системою, можна побудувати ряди Фур'є. Нехай функція $\varphi \in L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$. Поставимо цій функції у відповідність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, \mu)\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda), \tag{3}$$

коефіцієнти якого визначаються формулою

$$a_n(\alpha, \mu) = \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\mu\lambda}\varphi(\lambda)\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)d\lambda.$$

Ряд (3) завжди збігається до функції φ за нормою простору $L_2((0,\infty),\lambda^\alpha\exp(-\mu\lambda))$. Умови збіжності ряду (3) до функції φ у точці $\lambda\in(0,\infty)$ мають такий вигляд [3]:

1) якщо $\alpha>0$, а функція $\varphi\in L_1((0,\infty),\lambda^\alpha\exp(-\mu\lambda))$ в околі фіксованої точки $\lambda\in(0,\infty)$ задовольняє умову Ліпшиця і, крім того, існують інтеграли

$$\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha/2-1/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \int\limits_1^\infty \lambda^{\alpha/2+1/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{\alpha,\mu,n}$ функції φ збігається до цієї функції у точці λ, тобто

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^\infty a_n(\alpha,\mu)\hat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda); \qquad (4)$$

2) якщо $-1<\alpha\le 0$, а функція $\varphi\in L_1((0,\infty),\lambda^\alpha\exp(-\mu\lambda))$ в околі точки λ задовольняє умову Ліпшиця і існують інтеграли

$$\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha/2-3/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \int\limits_1^{+\infty} \lambda^{\alpha/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то має місце розклад (4).

2. Деякі класи нескінченно диференційовних векторів самоспряженого оператора. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$, A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$.

Елемент $f\in H$ називається нескінченно диференційовним відносно оператора A, якщо $f\in\bigcap\limits_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$. Множина $H_\infty(A)$ усіх таких векторів перетворюється в лінійний локально опуклий топологічний простір, якщо в ній ввести топологію проективної границі послідовності гільбертових просторів $H_n:=\mathcal{D}(A^n)$: $H_\infty(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{pr}H_n\equiv\bigcap\limits_{n=1}^\infty H_n$; при цьому скалярний добуток в H_n визначається формулою

$$(f,g)_{H_n}:=(A^nf,A^ng)_H, \quad \{f,g\}\subset H_n.$$

Простір $H_\infty(A)$ лежить щільно в H, тобто $\overline{H_\infty(A)}=H$.

Нехай

$$G_{\beta,B}(A):=\{\varphi\in H_\infty(A)\,\Big|\,\exists c,B>0:$$
$$\|A^n\varphi\|\le cB^nn^{n\beta}, n\in\mathbb{Z}_+,\beta>0\}.$$

Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми $\|\varphi\|_{\beta,B}=\sup\limits_n(\|A^n\varphi\|/B^nn^{n\beta})$. Простір $G_{\{\beta\}}(A):=\lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{ind}G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре типу Рум'є порядку β, який породжується оператором A [4]. Як доведено в [4],

$$G_{\{\beta\}}(A)=\bigcup_{\mu>0}\mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta})),$$

$\mathcal{D}(\exp(\mu A^{1/\beta}))$ – область визначення невід'ємного самоспряженого оператора

$$e^{\mu A^{1/\beta}}=\int\limits_0^\infty e^{\mu\lambda^{1/\beta}}dE_\lambda,$$

де E_λ, $\lambda\ge0$ – розклад одиниці оператора A.

Зазначимо, що елементи з класу $G_{\{1\}}(A)$ називаються аналітичними векторами оператора A.

Наприклад, якщо A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $H=L_2(\mathbb{R})$, породжений диференціальним виразом $(-1)^n\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$, то $G_{\{1\}}(A)$ складається з тих і лише тих функцій $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, які допускають продовження до цілої функції $\varphi(x+iy)$, $\{x,y\}\subset\mathbb{R}$, порядку не вище $2n/(2n-1)$ скінченного типу і задовольняють нерівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|\varphi(x+iy)|^2dx\le c\exp\{\beta|y|^{2n/(2n-1)}\}$$

з деякими сталими c, $\beta>0$, залежними від φ [4].

3. Задача Коші. Розглянемо еволюційне рівняння

$$u'(t)+Au(t)=0, t\in(0,T], 0<T<\infty. \qquad (5)$$

Якщо для (5) задано початкову умову

$$u(0) = f, \quad f \in H, \tag{6}$$

то під розв'язком задачі Коші (5), (6) розумітимемо сильно неперервно диференційовну функцію u: $(0,T] \to \mathcal{D}(A)$, яка задовольняє рівняння (5) і початкову умову (6) в тому сенсі, що $\|u(t) - f\|_H \to 0$ при $t \to +0$. Відомо [4], що функція u є розв'язком задачі (5), (6) у вказаному розумінні тоді і лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$u(t) = \exp\{-tA\}f, \quad t \in (0,T].$$

У цій праці вивчається можливість зображення розв'язку задачі (5), (6) у вигляді $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t,A)f$ у класі цілих векторів оператора A. З цією метою подамо розв'язок задачі Коші (5), (6) у вигляді $u(t) = v(t) + w(t)$, $t \in (0,T]$, де $v(t) = \operatorname{ch}(tA)f$, $w(t) = -\operatorname{sh}(tA)f$.

Можна довести (див. [3]), що розклади функцій $\operatorname{ch}(t\lambda)$ та $-\operatorname{sh}(t\lambda)$, $t > 0$, в ряд Фур'є за многочленами Лагерра мають відповідно вигляд

$$\operatorname{ch}(t\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2), \lambda \in (0,\infty), \tag{7}$$

де

$$a_k(t,\mu) = \mu^{-1/4}\exp\{t^2/(4\mu)\}\mu^{-k}((2k)!)^{-1}\times$$
$$\times t^{2k}(k!\Gamma(k+1/2))^{1/2};$$

$$-\operatorname{sh}(t\lambda) = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(\lambda^2), \lambda \in (0,\infty), \tag{8}$$

де

$$b_k(t,\mu) = -\mu^{-1/4}\exp\{t^2/(4\mu)\}\mu^{-k}\times$$
$$\times((2k+1)!)^{-1}t^{2k+1}(k!\Gamma(k+3/2))^{1/2}.$$

Позначимо через $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2)$ і $P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda^2)$ частинні суми рядів (7) і (8) відповідно. Правильним є наступне твердження.

Теорема. *Якщо $u(0) = f \in G_{\{1/2\}}(A)$, то для довільного $T > 0$ існують сталі $c = c(f,T) > 0$, $\mu = \mu(f) > 0$, $L = L(T) > 0$ такі, що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A^2)g\| \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,T]} \|v(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f\| + \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)-$$
$$-P^{(2)}_{\mu,t,n}(A^2)g\| \le cL^{n+1}/(n+1)!, \tag{9}$$

$v(t) = \operatorname{ch}(tA)f$, $w(t) = -\operatorname{sh}(tA)f$, $g = Af$.

Навпаки, якщо для деякого $T > 0$ існують додатні сталі c, μ та L такі, що для $u(t)$ з $u(0) = f \in H_\infty(A)$ виконується умова (9), то $f \in G_{\{1/2\}}(A)$.

Доведення. Нехай $f \in G_{\{1/2\}}(A) = \bigcup\limits_{\mu>0} \mathcal{D}(\exp(\mu A^2))$. Тоді $f \in \mathcal{D}(\exp(\mu A^2))$ з деяким $\mu > 0$. Зафіксуємо це число μ. Оскільки $u = v + w$, то, очевидно, справджується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A^2)g\| \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,T]} \|v(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f\| +$$
$$+ \sup_{t\in[0,T]} \|w(t) - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A^2)g\| \equiv$$
$$\equiv \gamma_1(\mu,T,n) + \gamma_2(\mu,T,n).$$

Оцінимо $\gamma_1(\mu,T,n)$. З основної спектральної теореми для самоспряжених операторів випливає, що

$$\|v(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f\|^2 =$$
$$= \int_0^\infty (\operatorname{ch}(t\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2))^2 e^{2\mu\lambda^2}\cdot e^{-2\mu\lambda^2} d(E_\lambda f,f) \le$$
$$\le \sup_{\lambda\in[0,\infty)} (e^{-\mu\lambda^2}|\operatorname{ch}(t\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2)|)^2 \cdot \|f\|^2_{H_\mu},$$

де

$$\|f\|^2_{H_\mu} = \int_0^\infty e^{2\mu\lambda^2} d(E_\lambda f,f) < \infty.$$

Оскільки $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2) \to \operatorname{ch}(t\lambda)$ при $n \to \infty$ у кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$ [3], то, врахувавши вигляд многочлена $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2)$ одержимо, що

$$e^{-\mu\lambda^2}|\operatorname{ch}(t\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda^2)| \le$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(t,\mu)| e^{-\mu\lambda^2} \cdot |\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)|.$$

Для того, щоб оцінити вираз $\exp(-\mu\lambda^2)|\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)|$, скористаємося наступною нерівністю з [5]:

$$e^{-\lambda/2}|\hat{L}_{\alpha,1,k}(\lambda)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\times$$

$$\times\Big(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\Big)^{1/2}, \alpha > -1, k \in \mathbb{Z}_+. \quad (10)$$

Оскільки $\hat{L}_{\alpha,\mu,k}(\lambda) = \mu^{(1+\alpha)/2}\hat{L}_{\alpha,1,k}(\mu\lambda)$, то з (10) при $\alpha = -1/2$ випливає, що

$$e^{-\mu\lambda^2}|\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)| \leq$$

$$\leq \frac{\mu^{1/4}}{\Gamma(1/2)}\Big(\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}\Big)^{1/2}. \quad (11)$$

Взявши до уваги вигляд коефіцієнтів $a_k(t,\mu)$, а також нерівність (11), одержимо

$$\gamma_1(\mu,T,n) \leq \|f\|_{H_\mu} \exp\Big\{\frac{T^2}{4\mu}\Big\}\times$$

$$\times \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{T^{2k}\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\mu^k\sqrt{\pi}} =$$

$$= \|f\|_{H_\mu} \exp\Big\{\frac{T^2}{4\mu}\Big\} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{T^2}{4\mu}\Big)^k \frac{1}{k!} \leq$$

$$\leq \|f\|_{H_\mu} \exp\Big\{\frac{T^2}{2\mu}\Big\}\Big(\frac{T^2}{4\mu}\Big)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}.$$

Аналогічно доводиться нерівність

$$\gamma_2(\mu,T,n) \leq T\|f\|_{H_\mu} \exp\Big\{\frac{T^2}{2\mu}\Big\}\Big(\frac{T^2}{4\mu}\Big)^{n+1}\times$$

$$\times\frac{1}{(n+1)!}.$$

Отже,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A^2)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A^2)g\| \leq$$

$$\leq cL^{n+1}/(n+1)!,$$

де

$$c = (1+T)\exp\Big\{\frac{T^2}{2\mu}\Big\}\|f\|_{H_\mu}, \quad L = \frac{T^2}{4\mu}.$$

Навпаки, нехай для деякого $T > 0$ існують додатні сталі c, μ і L такі, що для функції $u(t)$ з $u(0) = f \in H_\infty(A)$ виконується умова (9). Тоді

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k(t,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(A^2)f+$$

$$+b_k(t,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(A^2)g).$$

З умови (9) випливає також, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|a_k(t,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(A^2)f\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \|v(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k}(A^2)f\|+$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} \|v(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k-1}(A^2)f\| \leq c(1+L)L^k/k!.$$

Таким чином, для кожного $t \in [0,T]$

$$\|a_k(t,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(A^2)f\|^2 =$$

$$= \int_0^\infty a_k^2(t,\mu)\hat{L}^2_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)d(E_\lambda f,f) \leq$$

$$\leq c^2(1+L)^2L^{2k}/(k!)^2. \quad (12)$$

Аналогічно для кожного $t \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\|b_k(t,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(A^2)g\|^2 = \|b_k(t,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(A^2)Af\|^2 =$$

$$= \int_0^\infty b_k^2(t,\mu)\lambda^2\hat{L}^2_{1/2,\mu,k}(\lambda^2)d(E_\lambda f,f) \leq$$

$$\leq c^2(1+L)^2L^{2k}/(k!)^2. \quad (13)$$

Для того, щоб довести належність елемента f до класу $G_{\{1/2\}}(A)$, досить вказати $\varepsilon > 0$ таке, що $f \in \mathcal{D}(\exp(\varepsilon A^2))$. З цією метою скористаємося тим, що ряд Фур'є функції $\exp(\varepsilon\lambda)$, $\lambda > 0$, за многочленами $\hat{L}_{\alpha,\mu,k}$, $\alpha > -1$, $\mu > 0$, збігається до цієї функції в кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$, якщо $0 < \varepsilon < \mu/2$, причому цей розклад має вигляд [3]:

$$\exp(\varepsilon\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varepsilon,\alpha,\mu)\hat{L}_{\alpha,\mu,k}(\lambda), \lambda > 0,$$

де

$$c_k(\varepsilon,\alpha,\mu)=(\mu^{1/2}/(\mu-\varepsilon))^{1+\alpha}(\varepsilon/(\mu-\varepsilon))^k\times$$
$$\times(\Gamma(k+\alpha+1)/k!)^{1/2}.$$

Звідси дістаємо такі розклади:

$$\exp(\varepsilon\lambda^2)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\varepsilon,-1/2,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2),$$

$$\lambda\exp(\varepsilon\lambda^2)=\lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\varepsilon,1/2,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(\lambda^2).$$

Припустимо, що $0<\varepsilon<\min\{\mu/2,T^4\}$, а

$$Q_{\varepsilon,\mu,n}(\lambda):=\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varepsilon,-1/2,\mu)\hat{L}_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)+$$
$$+\lambda c_k(\varepsilon,1/2,\mu)\hat{L}_{1/2,\mu,k}(\lambda^2)).$$

Скориставшись нерівністю Коші-Буняковського, оцінками (12), (13) при $t=\varepsilon^{1/4}$, а також врахувавши вигляд коефіцієнтів $a_k(\varepsilon^{1/4},\mu)$, $b_k(\varepsilon^{1/4},\mu)$, $c_k(\varepsilon,-1/2,\mu)$, $c_k(\varepsilon,1/2,\mu)$ знайдемо, що

$$\int_0^{\infty}|Q_{\varepsilon,\mu,n}(\lambda)|d(E_\lambda f,f)\leq$$

$$\leq||f\|\cdot\Big[\sum_{k=0}^{n}\frac{|c_k(\varepsilon,-1/2,\mu)|}{|a_k(\varepsilon^{1/4},\mu)|}\times$$

$$\times\Big(\int_0^{\infty}a_k^2(\varepsilon^{1/4},\mu)\hat{L}^2_{-1/2,\mu,k}(\lambda^2)d(E_\lambda f,f)\Big)^{1/2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{|c_k(\varepsilon,1/2,\mu)|}{|b_k(\varepsilon^{1/4},\mu)|}\cdot\Big(\int_0^{\infty}b_k^2(\varepsilon^{1/4},\mu)\lambda^2\times$$

$$\times\hat{L}^2_{1/2,\mu,k}(\lambda^2)d(E_\lambda f,f)\Big)^{1/2}\Big]\leq c(1+L)\|f\|\times$$

$$\times\Big[\Big(\frac{\mu}{\mu-\varepsilon}\Big)^{1/2}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{\varepsilon^{1/2}\mu L}{\mu-\varepsilon}\Big)^k\frac{(2k)!}{(k!)^2}+$$

$$+\Big(\frac{\mu}{\mu-\varepsilon}\Big)^{3/2}\frac{1}{\varepsilon^{1/4}\mu^{1/2}}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{\varepsilon^{1/2}\mu L}{\mu-\varepsilon}\Big)^k\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\Big].$$

Оскільки

$$(2k)!/(k!)^2\leq e\pi^{-1/2}2^{2k},$$

$$(2k+1)!/(k!)^2\leq 3e(2\pi)^{-1/2}2^{3k},$$

то

$$\int_0^{\infty}|Q_{\varepsilon,\mu,n}(\lambda)|d(E_\lambda f,f)\leq c_1\|f\|\cdot\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{8\varepsilon^{1/2}\mu L}{\mu-\varepsilon}\Big)^k,$$

де

$$c_1=3c(1+L)e\pi^{-1/2}(\mu/(\mu-\varepsilon))^{1/2}\times$$
$$\times\max\{1,\mu^{1/2}/(\varepsilon^{1/4}(\mu-\varepsilon))\}.$$

Якщо вважати далі, що

$$0<\varepsilon<\min\{\mu/2,T^4,(\sqrt{16\mu^2L^2+q^2\mu}-4\mu L)^2q^{-2}\},$$

де $0<q<1$ – фіксоване число, то

$$\int_0^{\infty}|Q_{\varepsilon,\mu,n}(\lambda)|d(E_\lambda f,f)\leq c_1\|f\|\sum_{k=0}^{\infty}q^k=$$
$$=c_1(1-q)^{-1}\|f\|<\infty.$$

Оскільки $|Q_{\varepsilon,\mu,n}(\lambda)|\to(1+\lambda)\exp(\varepsilon\lambda^2)$ при $n\to\infty$ у кожній точці $\lambda\in(0,\infty)$, то на підставі леми Фату твердимо, що

$$\int_0^{\infty}(1+\lambda)\exp(\varepsilon\lambda^2)d(E_\lambda f,f)<\infty.$$

Звідси вже випливає, що $\int_0^{\infty}\exp(\varepsilon\lambda^2)d(E_\lambda f,f)<\infty$, тобто $f\in\mathcal{D}\Big(\exp\Big(\frac{\varepsilon}{2}A^2\Big)\Big)\subset G_{\{1/2\}}(A)$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабин А.В.* Решение задачи Коши при помощи весовых приближений экспонент многочленами // Функц. анализ и его прилож. – 1983. – Т. 17, № 4. – С. 75-76.
2. *Городецкий В.В., Горбачук М.Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 500-502.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. - 328 с.
4. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
5. *Caton W.B., Hille E.* Laguerre polynomials and Laplace integrals // Duke Math.J. – 1945. – V. 12, № 2. – P. 217-242.