УДК 517.929

©2008 р. Я. Й. Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# УСЕРЕДНЕННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглядається система з повільними і швидкими змінними, які залежать від лінійно перетвореного аргументу. Обгрунтовується метод усереднення для цієї системи з двоточковими лінійними крайовими умовами на скінченному проміжку часу.

The system with slow and fast variables dependent on linearly transformed argument is considered. The averaging method for the system with two-point linearly value problems on the finite time interval is justified.

**1. Вступ.** Для систем із повільними та швидкими змінними вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varphi),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = Y(t, x, \varphi),$$

для яких задано початкові умови, метод усереднення уздовж розв'язку $\varphi = \varphi(t, \tau, x)$ незбуреної задачі ($\varepsilon = 0$, $\tau$ і $x$ – параметри) обгрунтований В. М. Волосовим [1]. Для таких же систем із двоточковими лінійними крайовими умовами, але які містять і "повільний час" $\tau = \varepsilon t$, метод усереднення обгрунтований в праці М. Балачандри [2]. Крім того, в цій же роботі наведено застосування одержаних результатів в теорії оптимального керування. Усередненню в задачах керування присвячені також праці В.О. Плотнікова [3], Л.Д. Акуленка [4] та ін.

Системи стандартного вигляду із перетвореним аргументом та двоточковими крайовими умовами методом усереднення досліджувались в роботах [5-6], а коливні системи із вектором частот, залежним від повільних змінних – в [7].

У даній роботі метод усереднення, як і в [2], обгрунтовується для двоточкової крайової задачі, але із лінійно перетвореним аргументом, коли незбурена система не містить відхилення аргументу. Зауважимо, що для такої задачі початкова множина, коли $t = 0$, складається з однієї точки.

**2. Усереднена задача.** Розглядається крайова задача вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t, \tau, x, \varphi) + \varepsilon Y(t, \tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon),$$

$$A_1 x|_{t=0} + A_2 x|_{t=L} = d_1$$

$$B_1 \varphi|_{t=0} + B_2 \varphi|_{t=L} = d_2, \qquad (2)$$

де $x$ – $n$-вектор, $\varphi$ – $m$-вектор, $x_\theta(t) = x(\theta t), \varphi_\theta(t) = \varphi(\theta t), 0 < \theta < 1$, $A_\nu$, $B_\nu$ – сталі матриці, а $d_1$ і $d_2$ – $n$- і $m$-вектори відповідно, елементи яких не залежать від $\varepsilon$. Вектор-функції $X$ і $Y$ визначені і неперервно диференційовні за всіма аргументами в області

$$G_1 = \{(t, \tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) : 0 \le t \le L,$$

$$0 \le \tau \le L, x, x_\theta \in D_1 \subset \mathbb{R}^n, \varphi, \varphi_\theta \in D_2 \subseteq \mathbb{R}^m,$$

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\},$$

вектор-функція $\omega$ визначена і неперервно диференційовна за всіма аргументами в області:

$$G_2 = \{(t, \tau, x, \varphi) : 0 \le t \le L, 0 \le \tau \le L,$$

$$x \in D_1, \varphi \in D_2\}.$$

Побудуємо відповідну (1), (2) усереднену задачу уздовж розв'язку незбуреної ($\varepsilon = 0$) задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega(t, \tau, x, \overline{\varphi}),$$

$$B_1\overline{\varphi}|_{t=0} + B_2\overline{\varphi}|_{t=L} = d_2, \tag{3}$$

де $\tau$ і $x$ розглядаються як параметри. Нехай задача (3) має розв'язок $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, \tau, x)$. Усереднимо вектор-функцію $X$ по $t$, вважаючи інші змінні параметрами:

$$X_0(\tau, x, x_\theta) = \frac{1}{L}\int\limits_0^L X(t, \tau, x, x_\theta,$$

$$\overline{\varphi}(t, \tau, x), \overline{\varphi}(\theta t, \theta\tau, x_\theta), 0)dt. \tag{4}$$

Усереднена задача для повільної змінної є такою:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\theta),$$

$$A_1\overline{x}|_{t=0} + A_2\overline{x}|_{t=L} = d_1. \tag{5}$$

Припустимо, що крайова задача (5) має розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(t, \tau, \varepsilon)$. Зрозуміло, що розв'язання задач (3) і (5) значно простіше, порівняно з (1), (2), оскільки рівняння для $\overline{x}$ не залежить від $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_\theta$, а в (3) $\tau$ і $x$ – параметри.

**Зауваження.** Замість другого рівняння в (1) можна розглянути загальніше рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = Y(t, \tau, x, x_\theta, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon).$$

Припустимо, що при $\varepsilon = 0$ відомий розв'язок $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, \tau, x, x_\theta)$ відповідної крайової задачі, де $\tau$, $x$, $x_\theta$ – параметри. Тоді аналогічно можна побудувати усереднену систему (5). Але при цьому проблематичним є знаходження в явному вигляді розв'язку $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, \tau, x, x_\theta)$ задачі з лінійно перетвореним аргументом і, крім того, ускладнюється усереднена задача (5), тому що рівняння для $\overline{x}$ набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \varepsilon X_0(\tau, x, x_\theta, x_{\theta^2}).$$

**2. Умови та основний результат.** Якщо $z \in \mathbb{R}^k$ і $f = f(t, \varepsilon)$ – скалярна функція, $(t, \varepsilon) \in G_3 = [0, L] \times [0, \varepsilon_0]$, то $\|z\| := |z_1| + \cdots + |z_n|$, $\|f\| := \max\limits_{G_3}|f(t, \varepsilon)|$. Припустимо, що виконуються наступні умови.

$\mathbf{1^0}$. Двоточкова задача (3) має розв'язок $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, \tau, x)$, де $\tau$ і $x$ – параметри, і за цими параметрами неперервно диференційовна.

$\mathbf{2^0}$. Усереднена задача (5) має розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(t, \varepsilon)$.

Введемо позначення:

$$\overline{M} := (t, \tau, \overline{x}(t, \varepsilon), \overline{x}(\theta t, \varepsilon)),$$

$$\overline{\overline{M}} := (t, \tau, \overline{x}(t, \varepsilon), \overline{\varphi}(t, \varepsilon))),$$

$$C(t, \varepsilon) := \frac{\partial X_0}{\partial x}(\overline{M}), C_1(t, \varepsilon) := \frac{\partial X_0}{\partial x_\theta}(\overline{M}),$$

$$D(t, \varepsilon) := \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}(\overline{\overline{M}}).$$

Розглянемо при $t \geq 0$ лінійні системи

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon C(t, \varepsilon)\eta + \varepsilon C_1(t, \varepsilon)\eta_\theta, \tag{6}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = D(t, \varepsilon)\xi. \tag{7}$$

$\mathbf{3^0}$. Нехай $\Phi(t, s, \varepsilon)$ – матриця Коші системи (6) і $\Delta_1(\varepsilon) := A_1 + A_2\Phi(L, 0, \varepsilon)$. Розв'язок (6) можна записати у вигляді[8]:

$$\eta(t, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \varepsilon)\eta(0, \varepsilon).$$

Припустимо, що $|\det\Delta_1(\varepsilon)| \geq \delta_1 > 0$. Ця нерівність є умовою того, що рівняння (6) з крайовими умовами вигляду (2), де $d_1 = 0$, має тільки нульовий розв'язок.

$\mathbf{4^0}$. Нехай $\Psi(t, s, \varepsilon)$ – матриця Коші системи (7) і $\Delta_2(\varepsilon) := B_1 + B_2\Psi(L, 0, \varepsilon)$. Припустимо, що $|\det\Delta_2(\varepsilon)| \geq \delta_2 > 0$ для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

$\mathbf{5^0}$. Введемо функцію

$$w(\tau, x, \varepsilon) = \int\limits_0^t [X(s, \tau, x, x_\theta, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}_\theta, 0) -$$

$$-X_0(\tau, x, x_\theta)]ds,$$

де

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, \tau, x), \overline{\varphi}_\theta = \overline{\varphi}(\theta t, \theta\tau, x_\theta),$$

$\tau$, $x$ і $x_\theta$ розглядаються як параметри. Припустимо, що функція $w$ не залежить від параметра $x_\theta$.

Сформулюємо основний результат.

**Теорема.** *Нехай вектор-функції $X$, $Y$ і $\varpi$ визначені і неперервно диференційовні за всіма аргументами в області $G_1$ і $G_2$ відповідно і виконуються умови $\mathbf{1^0}$ – $\mathbf{5^0}$. Тоді для досить малого $\overline{\varepsilon} > 0$ двоточкова крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t,\varepsilon)$, $\varphi^*(t,\varepsilon)$. Цей розв'язок неперервний по $\varepsilon$ і*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\|x^*(t,\varepsilon)-\overline{x}(t,\varepsilon)\|+\|\varphi^*(t,\varepsilon)-\overline{\varphi}(t,\varepsilon)\|]=0. \tag{8}$$

**3. Допоміжна лема.** Розглянемо крайову задачу

$$\frac{du}{dt}=\varepsilon F(t,\varepsilon)u+\varepsilon F_1(t,\varepsilon)u_\theta+b(t,u,u_\theta,v,v_\theta,\varepsilon),$$

$$\frac{dv}{dt}=G(t,\varepsilon)u+H(t,\varepsilon)v+d(t,u,u_\theta,v,v_\theta,\varepsilon), \tag{9}$$

$$A_1u|_{t=0}+A_2u|t=L=0,$$

$$B_1u|_{t=0}+B_2u|t=L=0,$$

де $u$ і $v$ – $n$- і $m$-вимірні вектори відповідно, $F$ і $F_1$, $G$, $H$ – неперервні матриці в $G_3$ розмірності $n\times n$, $m\times n$ і $m\times m$ відповідно. Введемо позначення: $p=\mathrm{col}(u,u_\theta,v,v_\theta)$, $f=\mathrm{col}(b,d)$.

**Лема.** *Нехай:*

*1) вектор-функція $f(t,p,\varepsilon)$ неперервна в області $0\le t\le L$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\|p\|\le\nu_0$;*

*2) існують неспадні по кожному аргументу функції $\lambda(\varepsilon)$ і $\mu(\nu,\varepsilon)$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $0\le\nu\le\nu_0$ такі, що $\lambda(0)=\mu(0,0)=0$ і*

$$\|f(t,0,\varepsilon)\|\le\lambda(\varepsilon),$$

$$\|a(t,p_1,\varepsilon)-a(t,p_2,\varepsilon)\|\le\mu(\nu,\varepsilon)\|p_1-p_2\|;$$

*3) для матриці Коші $C(t,s,\varepsilon)$ системи*

$$\frac{du}{dt}=\varepsilon F(t,\varepsilon)u+\varepsilon F_1(t,\varepsilon)u_\theta,$$

*і такої ж матриці $D(t,\varepsilon)$ системи*

$$\frac{dv}{dt}=H(t,\varepsilon)v \tag{10}$$

*виконуються умови $\mathbf{3^0}$ і $\mathbf{4^0}$ відповідно, де замість матриць $\Delta_k(\varepsilon)$ беруться матриці $\Gamma_k(\varepsilon)$.*

*Тоді можна вказати такі додатні числа $\varepsilon^*$ і $\nu^*$, $\nu^*\le\nu_0$ і $\varepsilon^*\le\varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ існує єдиний розв'язок $u^*(t,\varepsilon)$, $v^*(t,\varepsilon)$ крайової задачі (9), неперервний по $\varepsilon$ і норма якого не перевищує $\nu_0^*$.*

**Доведення.** Розглянемо лінійну крайову задачу

$$\frac{du}{dt}=\varepsilon F(t,\varepsilon)u+\varepsilon F_1(t,\varepsilon)u_\theta+r(t,\varepsilon),$$

$$A_1u|_{t=0}+A_2u|_{t=L}=0, \tag{11}$$

де $r\in\mathbb{B}^{\ltimes}$, тобто $r$ – неперервне відображення із $[0,L]\times[0,\varepsilon_0]$ в $\mathbb{R}^n$.

Оскільки для матриці Коші $C(t,s,\varepsilon)$ виконується умова $\mathbf{3^0}$, то із (11) одержимо

$$u(0,\varepsilon)=-\Gamma_1^{-1}(\varepsilon)A_2\int_0^L C(L,s,\varepsilon)r(s,\varepsilon)ds.$$

Тоді розв'язок крайової задачі (11) набуває вигляду

$$u(t,\varepsilon)=(\mathcal{L}_1r)(t,\varepsilon),$$

де $\mathcal{L}_1$: $B^n\to\mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{L}_1r)(t,\varepsilon)=-C(t,0,\varepsilon)\Gamma_1^{-1}(\varepsilon)A_2\int_0^L C(L,s,\varepsilon)\times$$

$$\times r(s,\varepsilon)ds+\int_0^t C(t,s,\varepsilon)r(s,\varepsilon)ds.$$

З умов 1-2 леми випливає, що матриця Коші $C(t,s;\varepsilon)$ експоненціально обмежена [8, теорема 1.3], тому знайдеться $c_1>0$ таке, що

$$\|\mathcal{L}_1r\|\le c_1\|r\|. \tag{12}$$

Для крайової задачі

$$\frac{dv}{dt}=G(t,\varepsilon)u+H(t,\varepsilon)v+q(t,\varepsilon), \tag{13}$$

$$B_1v|_{t=0}+B_2v|_{t=L}=0$$

таким же чином знаходимо

$$v(t,\varepsilon) = (\mathcal{L}_2 q)(t,\varepsilon),$$

де

$$(\mathcal{L}_2 q)(t,\varepsilon) = -D(t,0,\varepsilon)\Gamma_2^{-1}(\varepsilon)\times$$

$$\times\int_0^L D(L,s,\varepsilon)(G(s,\varepsilon)(\mathcal{L}_1 r)(s,\varepsilon)+q(s,\varepsilon))ds+$$

$$\times\int_0^t D(t,s,\varepsilon)(G(s,\varepsilon)(\mathcal{L}_1 r)(s,\varepsilon)+q(s,\varepsilon))ds$$

і для деякої сталої $c_2 > 0$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{L}_2 q\| \le c_2(\|r\|+\|q\|). \tag{14}$$

Розглянемо тепер крайову задачу (9). Нехай $B_\nu^n = \{f : f \in B^n \text{ і } \|f\| \le \nu\}$ й аналогічне позначення для $B_\nu^m$. Якщо виконується умова 2 леми, то

$$\|a(t,p,\varepsilon)\| \le \|a(t,p,\varepsilon)-a(t,0,\varepsilon)\|+$$

$$+\|a(t,0,\varepsilon)\| \le \mu(\nu,\varepsilon)\|p\|+\lambda(\varepsilon),$$

якщо $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ і $0 \le \nu \le \nu_0$.

Виберемо $\nu^* \in (0,\nu_0]$ і $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0]$ так, щоб $(c_1+c_2)\mu(\nu,\varepsilon) \le 0.5$ для $\nu \le \nu^*$ і $\varepsilon \le \varepsilon_1$. Тепер знайдеться $\varepsilon^* \in (0,\varepsilon_1]$ таке, що $(c_1+c_2)\lambda(\varepsilon^*) \le 0.5\nu^*$. Тоді

$$(c_1+c_2)[\mu(\nu,\varepsilon)\nu+\lambda(\varepsilon)] < \nu$$

для $\nu \in (0,\nu^*]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$.

Покажемо, що відображення $\mathcal{L} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}$ є відображенням стиску в $B_\nu^{m+n}$. Справді, з нерівностей (12) і (14) випливає

$$\|(\mathcal{L}a)\| \le (c_1+c_2)\|a(t,p(t),\varepsilon)\| \le$$

$$\le (c_1+c_2)(\mu(\nu,\varepsilon_1)\nu+\lambda(\varepsilon_1)) < \nu,$$

для $\|p\| \le \nu \le \nu^*$, $\varepsilon \le \varepsilon^*$. Далі маємо, що

$$\|\mathcal{L}a_1-\mathcal{L}a_1\| \le (c_1+c_2)\|\mu(\nu,\varepsilon)\|\,\|a_1-a_2\| <$$

$$< 0.5\|a_1-a_2\|$$

для $\nu \le \nu^*$ і $\varepsilon \le \varepsilon^*$.

Згідно з принципом стискаючих відображень існує єдина нерухома точка $[u^*,v^*] \in \mathbb{R}_\nu^{n+m}$, $\|u\|+\|v\| \le \|p\| \le \nu^*$, тобто існує єдиний розв'язок крайової задачі (9), норма якого не перевищує $\nu^*$. Із зображення розв'язку випливає його неперервність по $\varepsilon$. Якщо $\varepsilon = 0$, то $u^* = v^* = 0$.

**4. Доведення теореми.** Як і в роботі [2] запровадимо в системі (1) заміну

$$x = \zeta+\varepsilon w(t,\tau,\zeta),$$

$$\varphi = \overline{\varphi}(t,\tau,\zeta)+\varepsilon\psi, \tag{15}$$

де $\overline{\varphi}$ – розв'язок усередненої крайової задачі (3). Зауважимо, що $w(0,\tau,\zeta) = w(T,\tau,\zeta) = 0$. Із першого з рівнянь (1) одержимо

$$\Big(I-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\zeta}\Big)\frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon X_0(\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta)+$$

$$+\varepsilon(X(t,\varepsilon t,x,x_\theta,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon)-$$

$$-X(t,\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,0))+\varepsilon^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}.$$

Оскільки $\varepsilon\Big\|\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}\Big\| < 1$ для $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0$ – досить мале, то матриця $I-\varepsilon\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}$ – невироджена, а обернену до неї можна записати у вигляді

$$I+\varepsilon W(t,\zeta,\zeta_\theta,\varepsilon).$$

Отже,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon X_0(\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta)+\varepsilon^2 X_1(t,\zeta,\zeta_\theta,\psi,\psi_\theta,\varepsilon), \tag{16}$$

де

$$X_1 = W(t,\zeta,\zeta_\theta,\varepsilon)X_0(\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta)+$$

$$+(I+\varepsilon W(t,\zeta,\zeta_\theta,\varepsilon))\Big[\frac{1}{\varepsilon}(X(t,\varepsilon t,\zeta+\varepsilon w,\zeta_\theta+$$

$$+\varepsilon w_\theta,\overline{\varphi}+\varepsilon\psi,\overline{\varphi}_\theta+\varepsilon\psi_\theta,\varepsilon)-X(t,\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta,\overline{\varphi},$$

$$\overline{\varphi}_\theta,0)+\frac{\partial w}{\partial\tau}\Big].$$

Із другого рівняння (1) і (15) маємо

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}[\omega(t,\varepsilon t,\zeta+\varepsilon w,\overline{\varphi}+\varepsilon\psi)-\omega(t,\varepsilon t,\zeta,\overline{\varphi})]-$$

$$-\frac{\partial\overline{\varphi}(t,\varepsilon t,\zeta)}{\partial\zeta}X_0(\varepsilon t,\zeta,\zeta_\theta)-\frac{\partial\overline{\varphi}(t,\varepsilon t,\zeta)}{\partial\tau}+$$

$$+Y(t,\varepsilon t,\zeta+\varepsilon w,\zeta_\theta+\varepsilon w_0,\overline{\varphi}+\varepsilon\psi,\overline{\varphi}_\theta+\varepsilon\psi_\theta,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial\overline{\varphi}(t,\varepsilon t,\zeta)}{\partial\zeta}X_1(t,\zeta,\zeta_\theta,\psi,\psi_\theta,\varepsilon).$$

змінні $\zeta$ і $\psi$ задовольняють крайові умови

$$A_1\zeta|_{t=0}+A_2\zeta|_{t=L}=d_1,$$
$$B_1\psi|_{t=0}+B_2\psi|_{t=L}=0.$$

Запровадимо ще одну заміну

$$\zeta=\overline{x}(t,\varepsilon)+z. \tag{17}$$

В підсумку одержимо крайову задачу

$$\frac{dz}{dt}=C(t,\varepsilon)z+C_1(t,\varepsilon)z_\theta+\varepsilon X_2(t,z,z_\theta,\psi,\psi_\theta,\varepsilon),$$
$$\frac{d\psi}{dt}=D(t,\varepsilon)\psi+E(t,\varepsilon)z+Y_2(t,z,z_\theta,\psi,\psi_\theta,\varepsilon), \tag{12}$$
$$A_1z|_{t=0}+A_2z|_{t=L}=0,$$
$$B_1\psi|_{t=0}+B_2\psi|_{t=L}=0,$$

де матриці $C$, $C_1$ і $D$ визначені в п.3.

Одержана система має вигляд (9). Умови, накладені на систему (1), дозволяють зробити висновок, що виконані умови леми, тому для досить малого $\overline{\varepsilon}\le\varepsilon_0$ існує єдиний розв'язок $z^*(t,\varepsilon)$, $\psi^*(t,\varepsilon)$ задачі (17), неперервний по $\varepsilon$ при $0\le\varepsilon\le\overline{\varepsilon}$, $z^*(t,0)=\psi^*(t,0)=0$. На підставі (16) і (17) одержимо рівність (8). Теорему доведено.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.

2. *Balachandra M.* An Averaging Theorem for Two-Point Boundary Value Problems with Applications to Optimal Control // J. of Math. Anal. and Appl. – 1976. – V. 55, N 1. – P. 46 - 60.

3. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления / Плотников В.А. – Киев: Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.

4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления / Акуленко Л.Д. — М.: Наука, 1987.— 368 с.

5. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. - 1998. - Т. 50, № 11. - С.1581-1585.

6. *Бигун Я.И., Фодчук В.И.* Исследование одной краевой задачи для дифференциально-функциональных уравнений методом усреднения // Асимптотические методы в теории математической физики.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1988.— С.30—36.

7. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, №4. - С. 435–446.

8. *Тышкевич В.А.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1981. – 80 с.