УДК 517.53

©2008 р. **І. В. Андрусяк, П. В. Філевич**

Національний університет "Львівська політехніка"
Львівський національний університет ветеринарної медицини
та біотехнології ім. С. З. Гжицького

# МІНІМАЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ІЗ ЗАДАНИМИ НУЛЯМИ

Нехай $\zeta = (z_n)$ — прямуюча до $\infty$ послідовність комплексних чисел, $n_\zeta(r)$ — її лічильна функція, $A(\zeta)$ — клас цілих функцій з нулями в точках $z_n$ і лише в них, а $l$ — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $\mathbb{R}$ функція. Якщо $n_\zeta(r) \geq l(r)$, $r \geq r_0$, то існують ціла функція $f \in A(\zeta)$ і множина $E$ скінченної логарифмічної міри такі, що $\ln\ln M_f(r) = o((\ln n_\zeta(r))^{1+\varepsilon} \ln l^{-1}(n_\zeta(r)))$, $E \not\ni r \to +\infty$, для кожного $\varepsilon > 0$, де $M_f(r)$ — максимум модуля $f$. Для $\varepsilon = 0$ це твердження неправильне.

Let $\zeta = (z_n)$ be a sequence of complex numbers tending to $\infty$, $n_\zeta(r)$ be its counting function, $A(\zeta)$ be the class of entire functions with zeros at the points $z_n$ and only at them, and $l$ be a continuous, increasing to $+\infty$ function on $\mathbb{R}$. If $n_\zeta(r) \geq l(r)$, $r \geq r_0$, then there exist an entire function $f \in A(\zeta)$ and a set $E$ of finite logarithmic measure such that $\ln\ln M_f(r) = o((\ln n_\zeta(r))^{1+\varepsilon} \ln l^{-1}(n_\zeta(r)))$, $E \not\ni r \to +\infty$, for every $\varepsilon > 0$, where $M_f(r)$ is the maximum modulus of $f$. For $\varepsilon = 0$ this assertion is not valid.

## 1. Вступ

Позначимо через $A$ клас цілих функцій, відмінних від сталої. Для довільної $f \in A$ і кожного $r \geq 0$ покладемо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$.

Нехай $L$ — клас додатних, неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функцій.

Через $\mathcal{Z}$ позначимо клас комплексних послідовностей $\zeta = (z_n)$ таких, що $0 < |z_0| \leq |z_1| \leq \ldots$ і $z_n \to \infty$, $n \to \infty$. Нехай $n_\zeta(r) = \sum_{|z_n|\leq r} 1$ — лічильна функція послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$. Скажемо, що $f \in A(\zeta)$, якщо і лише якщо $f \in A$ і послідовність нулів функції $f$ (з урахуванням кратностей), занумерована у порядку неспадання їх модулів, збігається з послідовністю $\zeta$. За класичною теоремою Вейєрштрасса $A(\zeta) \neq \varnothing$ для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$.

Добре відомою є наступна класична проблема.

**Проблема 1.** *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$. Наскільки повільним може бути зростання $\ln M_f(r)$ для цілих функцій $f \in A(\zeta)$?*

Різноманітні шляхи і підходи до розв'язання сформульованої проблеми пропонувалися багатьма авторами (див., наприклад, роботи [1–7] і бібліографію в них). У цій роботі розглядатимемо такий варіант проблеми 1.

**Проблема 2.** *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$. Вказати функцію $h \in L$ мінімального зростання, для якої існує ціла функцій $f \in A(\zeta)$ така, що нерівність*

$$\ln M_f(r) \leq h(n_\zeta(r))$$

*виконується для всіх $r > 0$ зовні деякої малої виняткової множини.*

У зв'язку з проблемою 2 наведемо наступне твердження А. А. Гольдберга [1].

**Теорема A.** *Для довільної функції $h \in L$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується нерівність*

$$h(n_\zeta(r)) < \ln M_f(r), \quad r \in E_f,$$

*де $E_f \subset (0, +\infty)$ — множина верхньої ліній-*

*ної щільності 1, тобто*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{r}\int_{E_f\cap(0,r)} dr = 1.$$

З теореми A випливає, що без додаткових умов на послідовність $\zeta$ проблема 2 може мати розв'язання лише у випадку, коли виконання відповідного співвідношення передбачається для всіх $r > 0$ зовні множини верхньої лінійної щільності 1, тобто великої у зрозумілому сенсі множини. Однак, такі додаткові умови необхідні і у цьому випадку, на що вказує таке твердження.

**Теорема 1.** *Для довільної функції $h \in L$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується нерівність*

$$h(n_\zeta(r)) < \ln M_f(r), \quad r \ge r_f.$$

Проблема 2 стає змістовною за додаткових умов на зростання функції $n_\zeta(r)$ знизу. Це підтверджують результати робіт [1–3]. Зокрема, А. А. Гольдберг [1] довів таку теорему.

**Теорема B.** *Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що*

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln r} > 0, \tag{1}$$

*і кожного $\varepsilon > 0$ існує ціла функція $f \in A(\zeta)$, для якої*

$$\ln\ln M_f(r) = o((\ln n_\zeta(r))^{2+\varepsilon}),\ E \not\ni r \to +\infty, \tag{2}$$

*де $E = E(\varepsilon) \subset (1,+\infty)$ — виняткова множина, яка має скінченну логарифмічну міру, тобто $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$.*

Крім того, в [1] показано, що показник $2+\varepsilon$ в (2) замінити на 1 не можна, і поставлено питання, чи не можна $2+\varepsilon$ замінити на $1+\varepsilon$. Це питання стало предметом розгляду в роботі В. Бергвайлера [2], де проведено його детальний аналіз у випадку виконання умови (1). Зокрема, В. Бергвайлер довів, що $2+\varepsilon$ в (2) не можна замінити навіть на 2. Більше того, з результатів роботи [2] випливає наступне твердження.

**Теорема C.** *(i) Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову (1), існують ціла функція $f \in A(\zeta)$ і множина $E \subset (1,+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що (2) виконується для кожного $\varepsilon > 0$.*

*(ii) Існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову (1), така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення*

$$\ln^2 n_\zeta(r) = o(\ln\ln M_f(r)),\ E_f \ni r \to +\infty,$$

*де $E_f \subset (1,+\infty)$ — множина нескінченної логарифмічної міри.*

Зауважимо, що функція $f$ і виняткова множина $E$ з твердження (i) теореми C, на відміну від теореми B, не залежать від $\varepsilon$; поряд з цим виняткова множина $E_f$ з твердження (ii) теореми C, взагалі кажучи, залежить від $f$.

Аналогом теорем B і C у випадку послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln\ln r} \ge \alpha > 0, \tag{3}$$

є наступна теорема І. В. Хирівського [3].

**Теорема D.** *(i) Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову (3), існує ціла функція $f \in A(\zeta)$ така, що для кожного $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення*

$$\ln\ln M_f(r) = o((n_\zeta(r))^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}),\ E(\varepsilon) \not\ni r \to +\infty,$$

*де $E(\varepsilon) \subset (1,+\infty)$ — виняткова множина скінченної логарифмічної міри.*

*(ii) Існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$, яка задовольняє умову (3), така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення*

$$(n_\zeta(r))^{\frac{1}{\alpha}} \le \ln\ln M_f(r), \quad r \in E_f,$$

*де $E_f \subset (1,+\infty)$ — множина нескінченної логарифмічної міри.*

На відміну від теорем B і C в твердженні (i) теореми D функція $f$ не залежить, а множина $E$, взагалі кажучи, залежить від $\varepsilon$.

"Неперервним"аналогом теорем C і D є наступне твердження.

**Теорема 2.** *Нехай $l \in L$.*

*(i) Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову*

$$n_\zeta(r) \ge l(r), \quad r \ge r_0, \tag{4}$$

*існують ціла функція $f \in A(\zeta)$ і множина $E \subset (1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\ln\ln M_f(r) = o((\ln n_\zeta(r))^{1+\varepsilon} \ln l^{-1}(n_\zeta(r))), \\ E \not\ni r \to +\infty, \tag{5}$$

*для кожного $\varepsilon > 0$.*

*(ii) Існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$, що задовольняє умову (4), така, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення*

$$\ln n_\zeta(r) \ln l^{-1}(n_\zeta(r)) = o(\ln\ln M_f(r)), \\ E_f \ni r \to +\infty, \tag{6}$$

*де $E_f \subset (1, +\infty)$ – множина нескінченної логарифмічної міри.*

Прийнявши $l(r) = r^\delta$ чи $l(r) = \ln^\delta r$ ($\delta > 0$), з теореми 2 легко отримуємо теореми C і D.

Відзначимо, що теореми 1 і 2 залишаться правильними, якщо їх переформулювати для неванліннової характеристики $T_f(r)$ замість $\ln M_f(r)$ (це очевидно стосовно твердження (i) теореми 2; стосовно теореми 1 і твердження (ii) теореми 2 див. їх доведення).

Через $\mathcal{Z}_1$ позначимо клас комплексних послідовностей $\zeta = (z_n)$ таких, що $0 \le |z_0| \le |z_1| \le \ldots$ і $z_n \to \infty$, $n \to \infty$. Для $\zeta \in \mathcal{Z}_1$ скажемо, що $f \in A(\zeta)$, якщо і лише якщо $f \in A$ і послідовність нулів функції $f$ (з урахуванням кратностей), занумерована у порядку неспадання їх модулів, збігається з послідовністю $\zeta$. Легко бачити, що теореми 1 і 2 залишаться правильними, якщо в них $\mathcal{Z}$ замінити на $\mathcal{Z}_1$.

## 2. Допоміжні результати

Нехай $p \in \mathbb{Z}_+$, а $E(z,p)$ — первинний множник Вейєрштрасса, тобто

$$E(z,0) = 1 - z;$$

$$E(z,p) = (1-z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Правильне таке твердження О. Блюменталя [9].

**Лема A.** *Для всіх $z \in \mathbb{C}$ і $p \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність $\ln|E(z,p)| \le |z|^{p+1}$.*

**Лема 1.** Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ існує невід'ємна послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, що $\lambda_n \sim \frac{\ln n}{\ln|z_n|}$, $n \to \infty$, і для довільної послідовності невід'ємних цілих чисел $(p_n)$ такої, що $p_n \ge [\lambda_n]$, $n \ge n_0$, добуток

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) \tag{7}$$

задає цілу функцію $f \in A(\zeta)$, причому $\ln M_f(r) \le G_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1}$.

*Доведення.* Нехай $(\alpha_n)$ — довільна додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність така, що $\ln \alpha_n = o(\ln|z_n|)$, $n \to \infty$. Покладемо $\lambda_n = 0$, якщо $\alpha_n \ge |z_n|$ або $n < 3$ і $\lambda_n = \frac{\ln n + 2\ln\ln n}{\ln|z_n| - \ln\alpha_n}$, якщо $\alpha_n < |z_n|$ і $n \ge 3$. Тоді послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ є невід'ємною, $\lambda_n \sim \frac{\ln n}{\ln|z_n|}$, $n \to \infty$, і

$$\left(\frac{\alpha_n}{|z_n|}\right)^{\lambda_n} = \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad n \ge n_0.$$

Оскільки $\alpha_n \to +\infty$, $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{\lambda_n}$ збігається для кожного фіксованого $r \ge 0$. Згідно з нерівностями $\lambda_n \le p_n + 1$, $n \ge n_0$, ряд

$$G_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1}$$

також збігається для кожного фіксованого $r \ge 0$. Якщо $|z| \le r$, то за лемою A $\ln|f(z)| \le G_f(r)$, тобто добуток (7) є рівномірно і абсолютно збіжним на кожному компакті з $\mathbb{C}$, а тому задає цілу функцію $f \in A(\zeta)$, причому $\ln M_f(r) \leq G_f(r)$.

Добре відомою є наступна класична лема Бореля–Неванлінни [9, с. 120].

**Лема B.** *Нехай $u(x)$ — неперервна, неспадна на $[x_0, +\infty)$ функція, яка прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$, а $\varphi \in L$ така, що*

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty. \tag{8}$$

*Тоді для всіх $x \geq x_0$ зовні множини скінченної міри виконується нерівність*

$$u\left(x + \frac{1}{\varphi(u(x))}\right) < u(x) + 1.$$

Беспосереднім наслідком з леми B є таке твердження.

**Лема 2.** *Нехай $u(r)$ — неспадна на $[r_0, +\infty)$ функція ($r_0 > 0$), яка прямує до $+\infty$ при $r \to +\infty$, а $\varphi \in L$ така, що виконується (8). Тоді для всіх $r \geq r_0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри виконується нерівність*

$$u\left(r \exp\left\{\frac{1}{\varphi(\ln u(r))}\right\}\right) < eu(r). \tag{9}$$

*Доведення.* Припустимо спочатку, що $u(r)$ — неперервна на $[r_0, +\infty)$ функція, і нехай $E_r$ — множина тих $r \geq r_0$, для яких нерівність (9) не виконується. Вважаємо, не зменшуючи загальності, що $u(r)$ — додатна на $[r_0, +\infty)$. Покладемо $x = \ln r$, $x_0 = \ln r_0$,

$$E_x = \\ = \left\{x \geq x_0 : \ln u\left(\exp\left\{x + \frac{1}{\varphi(\ln u(e^x))}\right\}\right) \geq \\ \geq \ln u(e^x) + 1\right\}.$$

За лемою B, застосованою до функції $\ln u(e^x)$, множина $E_x$ має скінченну міру. Тому

$$\int_{E_r} \frac{dr}{r} = \int_{E_r} d(\ln r) = \int_{E_x} dx < \infty.$$

Отже, лему 2 доведено у випадку, коли $u(r)$ — неперервна на $[r_0, +\infty)$ функція.

Якщо ж $u(r)$ — не є неперервною на $[r_0, +\infty)$, то ця функція, як монотонна на $[r_0, +\infty)$, має не більш як зліченне число точок розриву (першого роду). Враховуючи цей факт, легко обгрунтувати існування неперервної, неспадної на $[r_0, +\infty)$ функції $v(r)$ такої, що

$$u(r) \leq v(r),\ r \geq r_0; \quad u(r) = v(r),\ r \notin E_1,$$

де $E_1 \subset [r_0, +\infty)$ — множина скінченної логарифмічної міри. За вже доведеним

$$v\left(r \exp\left\{\frac{1}{\varphi(\ln v(r))}\right\}\right) < ev(r)$$

зовні множини $E_2 \subset [r_0, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри. Тоді множина $E = E_1 \cup E_2$ також має скінченну логарифмічну міру і зовні цієї множини

$$u\left(r \exp\left\{\frac{1}{\varphi(\ln u(r))}\right\}\right) = \\ = u\left(r \exp\left\{\frac{1}{\varphi(\ln v(r))}\right\}\right) \leq \\ \leq v\left(r \exp\left\{\frac{1}{\varphi(\ln v(r))}\right\}\right) < \\ < ev(r) = eu(r).$$

Лему 2 доведено.

Нехай $f \in A$, $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \ln|f(re^{i\theta})| d\theta$ – $p$-тий коефіцієнт Фур'є функції $\ln|f(re^{i\theta})|$, $d_p(r) = \operatorname{Re} c_p(r)$.

Якщо $\zeta = (z_n)$ – послідовність нулів функції $f$, $f(0) \neq 0$ і $\ln f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ в околі точки 0, то для кожного $p \in \mathbb{N}$ за формулою Пуассона–Йєнсена [9, с. 16–17]

$$c_p(r) = \frac{1}{2} a_p r^p + \frac{1}{2p} \sum_{|z_n|<r} \left(\left(\frac{r}{z_n}\right)^p - \left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right)^p\right).$$

Тоді для $R > r$ отримуємо

$$c_p(R) - \left(\frac{R}{r}\right)^p c_p(r) = \\ = \frac{1}{2p} \sum_{|z_n|<R} \left(\left(\frac{R}{z_n}\right)^p - \left(\frac{\overline{z_n}}{R}\right)^p\right) -$$

$$-\frac{1}{2p}\sum_{|z_n|<r}\left(\left(\frac{R}{z_n}\right)^p-\left(\frac{\overline{z_n}R}{r^2}\right)^p\right)=$$
$$=\frac{1}{2p}\sum_{r\le|z_n|<R}\left(\left(\frac{R}{z_n}\right)^p-\left(\frac{\overline{z_n}}{R}\right)^p\right)+$$
$$+\frac{1}{2p}\sum_{|z_n|<r}\left(\left(\frac{\overline{z_n}R}{r^2}\right)^p-\left(\frac{\overline{z_n}}{R}\right)^p\right).$$

Звідси негайно випливає наступне твердження.

**Лема 3.** *Якщо ціла функція $f$ має лише додатні нулі $z_0, z_1, \ldots$, то*

$$d_p(R)-\left(\frac{R}{r}\right)^p d_p(r)\ge$$
$$\ge\frac{1}{2p}\sum_{r\le z_n<R}\left(\left(\frac{R}{z_n}\right)^p-\left(\frac{z_n}{R}\right)^p\right),\quad R>r.$$

**Лема С. [9, с. 340]** *Для довільної цілої функції $f\in A$ і кожного $n\in\mathbb{Z}_+$ правильна нерівність $|c_n(r)|\le 2T_f(r)$, $r\ge 0$.*

## 3. Доведення теорем

*Доведення теореми 1.* Нехай $h\in L$, тоді й $h^{-1}\in L$. Розглянемо довільну послідовність $\zeta\in\mathcal{Z}$ таку, що $n_\zeta(r)\le h^{-1}(\ln r)$, $r\ge r_0$ (наприклад, беремо за $\zeta$ додатну зростаючу послідовність, для якої $h^{-1}(\ln z_n)\ge n+1$). Зрозуміло, що кожна ціла функція $f\in A(\zeta)$ є трансцендентною, а тому для неї $\ln r=o(T_f(r))$, $r\to+\infty$. Отже,

$$n_\zeta(r)\le h^{-1}(\ln r)\le h^{-1}(T_f(r))\le$$
$$\le h^{-1}(\ln M_f(r)),\quad r\ge r_f.$$

Теорему 1 доведено.

*Доведення теореми 2.* Доведемо спочатку твердження (i).

Нехай $\zeta\in\mathcal{Z}$ – довільна послідовність, яка задовольняє умову (4). Побудуємо функцію $f\in A(\zeta)$, для якої справджується співвідношення (5).

Покладемо $s=s(r)=r\exp\{\frac{1}{\ln^2\ln n_\zeta(r)}\}$ і нехай $p_n=[2\ln(n+1)\ln^2\ln(n+2)]$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Розглянемо канонічний добуток (7). За лемою 1 цей добуток задає цілу функцію $f\in A(\zeta)$, для якої

$$\ln M_f(r)\le\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1}=$$
$$=S_1(r)+S_2(r)+S_3(r),\tag{10}$$

$$S_1(r)=\sum_{n=0}^{n_\zeta(r)-1}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1},$$
$$S_2(r)=\sum_{n=n_\zeta(r)}^{n_\zeta(s)-1}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1},$$
$$S_3(r)=\sum_{n=n_\zeta(s)}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$ і оцінимо кожну з уведених сум. Стосовно першої суми, враховуючи (4), маємо

$$\ln S_1(r)\le\ln n_\zeta(r)+(p_{n_\zeta(r)-1}+1)\ln\frac{r}{r_0}\le$$
$$\le 3\ln n_\zeta(r)\ln^2\ln n_\zeta(r)\ln r=$$
$$=o((\ln n_\zeta(r))^{1+\varepsilon}\ln l^{-1}(n_\zeta(r))),\ r\to+\infty.\tag{11}$$

Далі, зауваживши, що $|z_{n_\zeta(r)-1}|\le r<|z_{n_\zeta(r)}|$ для всіх $r\ge|z_0|$, отримуємо $\frac{r}{|z_n|}<1$ для $n\ge n_\zeta(r)$. Тому, застосовуючи лему 2 з $u(r)=\ln n_\zeta(r)$ і $\varphi(x)=x^2$, маємо

$$\ln S_2(r)\le\ln n_\zeta(s)=$$
$$=\ln n_\zeta\left(r\exp\left\{\frac{1}{\ln^2\ln n_\zeta(r)}\right\}\right)\le$$
$$\le e\ln n_\zeta(r),\ E\not\ni r\ge r_0,\tag{12}$$

де $E\subset[r_0,+\infty)$ — множина скінченної логарифмічної міри. Крім того, для $n\ge n_\zeta(s)$ маємо $|z_n|\ge|z_{n_\zeta(s)}|>s=r\exp\{\frac{1}{\ln^2\ln n_\zeta(r)}\}$, звідки випливає, що

$$S_3(r)\le\sum_{n=n_\zeta(s)}^{\infty}\frac{1}{\exp\left\{\frac{p_n+1}{\ln^2\ln n_\zeta(r)}\right\}}\le$$
$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{2\ln(n+1)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.\tag{13}$$

Нарешті, зі співвідношень (10)–(13) легко отримуємо (5). Першу частину теореми 2 доведено.

Перейдемо до доведення твердження (ii).

Нехай $(\delta_k)$ – спадна до нуля послідовність така, що $\sum_{n=0}^{\infty}\delta_k = \infty$. Виберемо додатну, зростаючу до $+\infty$ послідовність $(r_k)$ так, щоб для неї і пов'язаної з нею рівністю $x_k = r_k e^{-\delta_k}$ послідовності $(x_k)$ виконувались такі умови:

а) $l(r_k)$ — натуральне число, $k \in \mathbb{Z}_+$;

б) $\delta_k \ln l(r_{k+1}) \geq \ln l(r_k) \ln r_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

в) $\ln r_k = o(\ln x_{k+1})$, $k \to \infty$.

Нехай $(\alpha_k)$ — додатна, зростаюча до $+\infty$ послідовність, для якої

$$\delta_k \alpha_{k+1} \to 0,\ k \to \infty;\ \ln \alpha_k = o(\ln l(r_k)), \quad k \to \infty. \tag{14}$$

Покладемо $m_0 = l(r_1)$ і нехай $m_k = l(r_{k+1}) - l(r_k)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Утворимо послідовність $\zeta = (z_n)$ наступним чином:

$$\underbrace{r_0, \ldots, r_0}_{m_0 \text{ разів}}, \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{m_1 \text{ разів}}, \ldots, \underbrace{r_k, \ldots, r_k}_{m_k \text{ разів}}, \ldots.$$

Для довільних $r \in [r_k, r_{k+1})$ і $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо $n_\zeta(r) = m_0 + \cdots + m_k = l(r_{k+1}) > l(r)$, тобто послідовність $\zeta$ задовольняє умову (4). Доведемо, що для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення (6) з множиною $E_f \subset (1, +\infty)$ нескінченної логарифмічної міри.

Встановимо спочатку деякі допоміжні співвідношення. Для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$p_k = [2 \ln l(r_{k+1})\alpha_{k+1}],$$
$$X_k = 2e^{\ln l(r_{k+1}) \ln r_{k+1} \alpha_{k+1}},$$
$$Y_k = \frac{m_k}{2p_k}\left(\left(\frac{x_{k+1}}{r_k}\right)^{p_k} - \left(\frac{r_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}\right),$$
$$Z_k = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}(Y_k - X_k).$$

Згідно умови в) маємо

$$\ln Y_k = \ln m_k - \ln 2 - \ln p_k + \\ + p_k(\ln x_{k+1} - \ln r_k) + o(1) = \\ = (2 + o(1)) \ln l(r_{k+1})\alpha_{k+1} \ln r_{k+1}, \quad k \to \infty.$$

Звідси, зокрема, маємо $X_k = o(Y_k)$, $k \to \infty$. Враховуючи це, а також співвідношення (14), отримуємо

$$\ln Z_k = p_k(\ln x_k - \ln x_{k+1}) + \ln Y_k + o(1) = \\ = p_k(\ln x_k - \ln x_{k+1}) + \ln m_k - \ln 2 - \ln p_k + \\ + p_k(\ln x_{k+1} - \ln r_k) + o(1) = \\ = \ln m_k - \ln p_k - p_k\delta_k + O(1) = \\ = \ln l(r_{k+1}) - \ln\ln l(r_{k+1}) - \ln \alpha_{k+1} - \\ (2 + o(1)) \ln l(r_{k+1})\alpha_{k+1}\delta_k + O(1) = \\ = (1 + o(1)) \ln l(r_{k+1}), \quad k \to \infty.$$

Тоді, згідно з умовою б) і першим зі співвідношень (14),

$$\ln Z_k \geq \ln l(r_k) \ln r_k \alpha_{k+1} + \ln 2,\ k \geq k_0. \tag{15}$$

Розглянемо тепер довільну функцію $f \in A(\zeta)$ і нехай $d_p(r)$, як і вище, – дійсна частина $p$-того коефіцієнта Фур'є функції $\ln |f(re^{i\theta})|$.

Зафіксуємо довільне ціле $k \geq k_0$. Можливі такі два випадки.

Випадок 1: $|d_{p_k}(x_{k+1})| > X_k$. Тоді для всіх $r \in [x_{k+1}, r_{k+1})$ за лемою C отримуємо

$$\ln T_f(r) \geq \ln T_f(x_{k+1}) \geq \ln |d_{p_k}(x_{k+1})| - \\ - \ln 2 > \ln X_k - \ln 2 = \ln l(r_{k+1}) \ln r_{k+1}\alpha_{k+1} = \\ \ln n_\zeta(r) \ln l^{-1}(n_\zeta(r))\alpha_{k+1}.$$

Випадок 2: $|d_p(x_{k+1})| \leq X_k$. Тоді за лемою 3 маємо

$$|d_{p_k}(x_k)| \geq \\ \geq \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}\left(\frac{1}{2p_k}\sum_{x_k \leq z_n < x_{k+1}}\left(\left(\frac{x_{k+1}}{r_k}\right)^{p_k} - \right.\right. \\ \left.\left. - \left(\frac{r_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}\right) - |d_{p_k}(x_{k+1})|\right) = \\ = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}(Y_k - |d_{p_k}(x_{k+1})|) \geq \\ \geq \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{p_k}(Y_k - X_k) = Z_k.$$

Тоді для всіх $r \in [x_k, r_k)$, використовуючи лему D і співвідношення (15), отримуємо

$$\ln T_f(r) \geq \ln T_f(x_k) \geq \ln |d_{p_k}(x_k)| - \ln 2 \geq \\ \geq \ln Z_k - \ln 2 \geq \ln l(r_k) \ln r_k \alpha_{k+1} = \\ = \ln n_\zeta(r) \ln l^{-1}(n_\zeta(r))\alpha_{k+1}.$$

Нехай $E_k = \{r \in [r_{k-1}, r_{k+1}) : \ln T_f(r) \geq \ln n_\zeta(r) \ln l^{-1}(n_\zeta(r))\alpha_{k+1}\}$, $k \in \mathbb{N}$. За доведеним множина $E_k$ при $k \geq k_0$ містить один з півінтервалів $[x_k, r_k)$ чи $[x_{k+1}, r_{k+1})$, логарифмічна міра кожного з яких не менша за $\delta_{k+1}$. Виберемо $k_1 \geq k_0$ настільки великим, щоб множина $E = E_{k_1} \cup E_{k_1+2} \cup E_{k_1+4} \cup \ldots$ була підмножиною інтервалу $(1, +\infty)$. Тоді логарифмічна міра множини $E$ не менша як $\delta_{k_1} + \delta_{k_1+2} + \delta_{k_1+4} + \ldots$, а наведений ряд, згідно вибору послідовності $(\delta_k)$, є розбіжним. Отже, $E$ є нескінченної логарифмічної міри. Крім того, зрозуміло, що

$$\ln n_\zeta(r) \ln l^{-1}(n_\zeta(r)) = o(\ln T_f(r)), \quad E_f \ni r \to +\infty,$$

звідки й випливає (6).

Теорему повністю доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гольдберг А.А.* О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций // Изв. вузов. Мат. – 1972. – В 10 (125). – С. 13–17.

2. *Bergweiler W.* A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros // J. Anal. Math. – 1994. – V. 63. – P. 121–129.

3. *Хирівський І.В.* Мінімальне зростання цілих функцій із заданою послідовністю нулів // Мат. студ. – 1994. – Т. 3. – С. 49–51.

4. *Bergweiler W.* Canonical products of infinite order // J. reine angew. Math. – 1992. – V. 430. – P. 85–107.

5. *Miles J.* On the growth of entire functions with zero sets having infinite exponent of convergence // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – V. 27. – P. 69–90.

6. *Sheremeta M.M.* A remark to the construction of canonical products of minimal growth // Mat. fiz., anal., geom. – 2004. – V. 11, B 2. – P. 243–248.

7. *Frank G., Hennekemper W., Polloczek G.* Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen // Math. Ann. – 1977. – V. 225. – S. 145–154.

8. *Blumenthal O.* Principes de la théory des fonctions entières d'ordre infini. – Paris: Gauthier-Villars, 1910.

9. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с.