УДК 517.956

©2008 р. Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич

Львівський національний університет імені І. Франка

ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ У КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

У криволінійному секторі з вільними межами досліджено задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку. Використовуючи метод характеристик і теорему Банаха про нерухому точку, встановлено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі.

A problem for a quasi-linear hyperbolic first-order system in a curvilinear sector with free boundaries is investigated. By using the method of characteristics and the Banach fixed point theorem, we established conditions for existence and uniqueness of a generalized solution to this problem.

Вивчення задач з невідомими границями для гіперболічних рівнянь і систем (гіперболічних задач Стефана) розпочалось в 70 роках минулого століття [1-3]. За допомогою методу характеристик дослідження гіперболічних задач Стефана розширилося на випадки нелокальних граничних умов, виродження лінії задання початкових умов, наявності невідомих ліній розриву розв'язків тощо [4-7].

В даній статті, використовуючи методику дослідження [8], встановлено локальну розв'язність квазілінійної гіперболічної задачі Стефана в криволінійному секторі у випадку двох незалежних змінних та загальних граничних умов (праві частини залежать від розв'язку) та глобальну розв'язність задачі, коли в праві частини граничних умов не входять значення шуканих функцій.

1. Формулювання задачі. Узагальнений розв'язок. У криволінійному секторі $V_T^a = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ a_1(t) < x < a_2(t),\ a_1(0) = a_2(0)\big\}$ з невідомою межею $a(t) := (a_1(t), a_2(t))$ розглянемо квазілінійну гіперболічну систему рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \qquad (1)$$
$$i = \overline{1,n},\ u := (u_1, \ldots, u_n),$$

а поведінку межі області V_T^a обмежимо системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da_k(t)}{dt} = h_k\big(t, a(t), u(a(t),t)\big),\ k = 1,2, \qquad (2)$$
$$u(a(t),t) := (u(a_1(t),t), u(a_2(t),t)).$$

Початкові значення невідомих функцій задамо умовами

$$a_1(0) = a_2(0) = 0, \qquad (3)$$
$$u(0,0) = u^0,\ u^0 := (u_1^0, \ldots, u_n^0). \qquad (4)$$

Визначимо множини J_1, J_2 та J_3

$$J_1 := \big\{i :\ \lambda_i(0,0,u^0) < h_1(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\big\},$$
$$J_2 := \big\{i :\ \lambda_i(0,0,u^0) > h_2(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\big\},$$
$$J_3 := \big\{i :\ h_1(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0}) < \lambda_i(0,0,u^0) <$$
$$< h_2(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\big\},\ \mathbf{0} := (0,0), \mathbf{u^0} := (u^0,u^0),$$

і умови на межі області запишемо у вигляді

$$u_i(a_k(t),t) = H_k^i\big(t, a(t), \big(u_s(a_k(t),t)\big)_{s\in J_k}\big),$$
$$k = 1,2,\ i \in J_{3-k} \cup J_3. \qquad (5)$$

Позначимо через $\varphi_i(\tau; x,t,u), i = \overline{1,n}$ розв'язок задачі Коші (припускаємо виконання умов однозначної розв'язності задачі)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau,u(\xi,\tau)),\ \ \xi(t) = x.$$

Ці розв'язки є характеристиками системи (1), причому залежність $\varphi_i(\tau; x,t,u)$ від u є функціоналом. Часову координату точки перетину функції φ_i з межею області V_T^a при русі в напрямі спадання аргументу τ позначимо через $\chi_i(x,t;u,a)$, тобто

$$\chi_i(x,t;u,a) = \min\left\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau) \in V_T^a\right\}$$

(залежність $\chi_i(x,t;u,a)$ від (u,a) є функціоналом). Формально проінтегрувавши рівняння системи (1) вздовж відповідних характеристик $\xi = \varphi_i(\tau;x,t,u)$, отримаємо систему інтегрально-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \tag{6}$$
$$= u_i(\varphi_i(\chi_i(x,t;u,a);x,t,u),\chi_i(x,t;u,a)) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t;u,a)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\big)d\tau,$$

$i = \overline{1,n}$.

Нехай S_T є простором пар вектор-функцій $(u,a) : V_T^a \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+2}$, $u \in \big(C(V_T^a)\big)^n \cap \big(\mathrm{Lip}_x(V_T^a)\big)^n$, $a \in \big(C^1[0,T]\big)^2$, $a_1(t) < a_2(t), 0 < t \le T$, для яких виконані початкові умови (3), (4). На просторі S_T введемо метрику $\rho :\ S_T \times S_T\ \to \mathbb{R}$:

$$\rho\big((u^1,a^1),(u^2,a^2)\big) = \max\big\{\max_{k,t}|a_k^1(t) - a_k^2(t)|,$$
$$\max_{i,x,t}|\bar{u}_i^1(x,t) - \bar{u}_i^2(x,t)|\big\},$$

де $\bar{u} : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ є продовженням за просторовою змінною функції u згідно правила: $\bar{u}(x,t) = u(a_1^u(t),t)$, якщо $x < a_1^u(t)$; $\bar{u}(x,t) = u(a_2^u(t),t)$, якщо $x > a_2^u(t)$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(5) будемо називати пару вектор-функцій $(u,a) \in S_T$, що задовольняють системи (2), (6) та крайові умови (5).*

2. Теорема про локальну розв'язність. Введемо позначення

$$\|y\|_m := \max_{i=\overline{1,m}}|y_i|,\ y = (y_1,\dots,y_m),\ m \in \mathbb{N},$$
$$\mathcal{B}_R^m := \big\{y \in \mathbb{R}^m :\ \|y\|_m \le R\big\},\ \mathcal{B}_R := \mathcal{B}_R^1,$$
$$U := \|u^0\|_n,\ \ \lambda := (\lambda_1,\dots,\lambda_n),$$
$$f := (f_1,\dots,f_n),\ \ h := (h_1,h_2),$$
$$\Lambda := \max_{(x,t,u)\in\mathcal{B}_1\times[0,T]\times\mathcal{B}_{U+1}^n}\|\lambda(x,t,u)\|_n,$$
$$F := \max_{(x,t,u)\in\mathcal{B}_1\times[0,T]\times\mathcal{B}_{U+1}^n}\|f(x,t,u)\|_n,$$
$$m = \min_{i,\,k}|\lambda_i(0,0,u^0) - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})|.$$

Теорема. *Припустимо, що*

1) $\lambda_i(x,t,u) \in C\big(\mathcal{B}_1 \times [0,T] \times \mathcal{B}_{U+1}^n\big) \cap \mathrm{Lip}_{x,u}\big(\mathcal{B}_1 \times [0,T] \times \mathcal{B}_{U+1}^n\big),\ i = \overline{1,n}$;

2) $f_i(x,t,u) \in C\big(\mathcal{B}_1 \times [0,T] \times \mathcal{B}_{U+1}^n\big) \cap \mathrm{Lip}_{x,u}\big(\mathcal{B}_1 \times [0,T] \times \mathcal{B}_{U+1}^n\big),\ i = \overline{1,n}$;

3) $h_k(t,a,w) \in \mathrm{Lip}\big([0,T] \times \mathcal{B}_1^2 \times \mathcal{B}_{U+1}^{2n}\big)$, $k = 1,2$;

4) $H_k^i\big(t,a,(w_s)_{s\in J_k}\big) \in \mathrm{Lip}\big([0,T] \times \mathcal{B}_1^2 \times \mathcal{B}_{U+1}^{\mathrm{card}J_k}\big),\quad k = 1,2,\ \ i \in J_{3-k} \cup J_3$;

5) задовольняються нерівності

$$\lambda_i(0,0,u^0) \ne h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0}), i = \overline{1,n}, k = 1,2;$$
$$h_1(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0}) < h_2(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0});$$

6) виконуються співвідношення погодження початкових та граничних умов

$$u_i^0 = H_k^i\big(0,\mathbf{0},(u_s^0)_{s\in J_k}\big),\ \ k = 1,2,$$
$$i \in J_{3-k} \cup J_3;$$

7) виконується обмеження

$$H_0\Big(\frac{2e^{\lambda_0}}{m}\big(2\|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \Lambda\big) + 1\Big) < 1,$$

де λ_0, H_0– сталі Ліпшиця функцій λ_i та H_k^i відповідно.

Тоді задача (1)–(5) має єдиний локальний узагальнений розв'язок.

Доведення. Розглянемо підпростір $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\varepsilon,\alpha,\beta,p,q)$ ($\varepsilon,\alpha,\beta,p$ та q – додатні параметри) простору S_ε, $\varepsilon \in (0,T]$, обмеживши його елементи умовами

(A) $a_k(t) - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})t \in \mathrm{Lip}([0,\varepsilon],\alpha)$, $k = 1,2$;

(B) $\|u(x,t) - u^0\|_n \le \beta,\ (x,t) \in V_\varepsilon^a$;

(C) $u \in \big(\mathrm{Lip}_x(V_\varepsilon^a,p)\big)^n$;

(D) якщо $(x_j,t_j) \in V_\varepsilon^a,\ j = 1,2,\ t_1 \ne t_2$ при деякому $k \in \{1,2\}$ задовольняють нерівності

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\right| \le \alpha, \tag{7}$$
$$\big|x_j - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})t_j\big| \le \alpha t_j,\ j = 1,2, \tag{8}$$

то справедлива оцінка

$$|\Delta_j u_i(x_j,t_j)| \le q|\Delta_j t_j|, \ \ i\in J_k.$$

Виберемо параметр α достатньо малим та сталу γ, $0<\gamma<m$ достатньо близькою до m, щоб виконувалась нерівність

$$\mathcal{K} := H_0\Big(\frac{2e^{\lambda_0}}{\gamma}\big(2\|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + 2\alpha + \Lambda\big)+1\Big) < 1,$$

можливість такого вибору слідує з припущення *7)* теореми. Якщо потрібно, зменшимо α, щоб також задовольнити нерівність

$$\alpha < \frac{1}{2}\big(h_2(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0}) - h_1(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\big), \qquad (9)$$

тоді виконання умови $a_1(t) < a_2(t)$, $0 < t \le T$ буде наслідком властивості (A) простору $\mathcal{S}$.

Нехай

$$\varepsilon \le \frac{1}{|h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0}) + (-1)^k\alpha|}, \ k=1,2, \qquad (10)$$

$$\beta \le 1, \qquad (11)$$

причому, якщо в нерівності (10) при деякому k знаменник дорівнює нулеві, то будемо вважати нерівність для цього k виконаною. Обмеження (10), (11) забезпечать включення

$$V_\varepsilon^a \subset \mathcal{B}_1 \times [0,\varepsilon], \ \ u(x,t) \in \mathcal{B}^n_{U+1}, \ (x,t)\in V_\varepsilon^a,$$

для всіх $(u,a)\in\mathcal{S}$.

Нехай параметри ε та β простору $\mathcal{S}$ є достатньо малими, щоб забезпечити виконання умови

$$|\lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t)) - h_k(t,a(t),u(a(t),t))| \ge$$
$$\ge \gamma, \ \ i=\overline{1,n}, \ k=1,2, \ t\in[0,\varepsilon], \qquad (12)$$

для всіх $(u,a)\in\mathcal{S}$. Можливість такого вибору слідує з припущення *5)* теореми та неперервності функцій λ_i та h_k відповідно в точках $(0,0,u^0)$ та $(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})$.

На множині $\mathcal{S}$ визначимо оператор A: $A(u,a) = (Au, Aa)$, причому $Aa = (A_1a, A_2a) : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}^2$, де функції $(A_ka)(t), k=1,2$ визначаються рівністю

$$(A_ka)(t) = \int_0^t h_k\big(\tau, a(\tau), u(a(\tau),\tau)\big)d\tau,$$

а компоненту Au визначимо трохи пізніше.

Для початку, встановимо обмеження, за яких функції $(A_ka)(t), k=1,2$ володіють властивістю (A) простору $\mathcal{S}$. Нехай задовольняються нерівності

$$\varepsilon \le \min\Big\{\beta, \frac{\beta}{\|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \alpha}\Big\}, \qquad (13)$$

$$\beta \le \frac{\alpha}{h_0}, \qquad (14)$$

де h_0 – стала Ліпшиця функцій $h_k, k=1,2$, тоді

$$\big|\tfrac{d}{dt}\big((A_ka)(t) - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})t\big)\big| =$$
$$= \big|h_k\big(t,a(t),u(a(t),t)\big) - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\big| \le$$
$$\le h_0 \max\big\{t, \|a(t)\|_2, \|u(a(t),t) - \mathbf{u^0}\|_{2n}\big\} \le$$
$$\le h_0 \max\big\{\varepsilon, \big(\|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \alpha\big)\varepsilon, \beta\big\} \le \alpha,$$

звідки, в свою чергу, слідує ліпшицевість відображень $t \mapsto (A_ka)(t) - h_k(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})t$ зі сталою α.

Введемо позначення. Нехай $(u,a)\in\mathcal{S}$, тоді $\tilde{A}u = (\tilde{A}_1u,\dots,\tilde{A}_nu) : V_\varepsilon^{Aa} \to \mathbb{R}^n$, де $V_\varepsilon^{Aa} = \big\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<t<\varepsilon, (A_1a)(t) < x < (A_2a)(t)\big\}$, а $(\tilde{A}_iu)(x,t), i=\overline{1,n}$ є звуження функцій $\bar{u}_i$ на V_ε^{Aa}. Зауважимо, що $(\tilde{A}u, Aa)\in\mathcal{S}$, зокрема, з нерівності (12) випливає оцінка

$$|\lambda_i((A_ka)(t),t,(\tilde{A}u)((A_ka)(t),t)) -$$
$$-h_k(t,a(t),u(a(t),t))| \ge \gamma, \qquad (15)$$
$$i=\overline{1,n}, \ k=1,2, \ t\in[0,\varepsilon].$$

Для кожного елементу $(u,a)\in\mathcal{S}$ визначимо функції $\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u,Aa), i=\overline{1,n}, (x,t)\in V_\varepsilon^{Aa}$:

$$\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u,Aa) =$$
$$= H_k^i\big(\chi_i, (Aa)(\chi_i), ((\tilde{A}_su)((A_ka)(\chi_i),\chi_i))_{s\in J_k}\big),$$

де $\chi_i = \chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa)$, а індекс k визначається умовою $\varphi_i(\chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa);x,t,\tilde{A}u) = (A_ka)(\chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa))$. Зауважимо, що для всіх індексів i та відповідних значень індексу k функція H_k^i є визначеною, що слідує з оцінки (15).

Тепер можемо визначити компоненту Au образу елемента $(u,a)\in\mathcal{S}$ при дії оператора

A: $Au = (A_1 u, \ldots, A_n u) : V_\varepsilon^{Aa} \to \mathbb{R}^n$, де функції $(A_i u)(x,t), i = \overline{1,n}$ приймають значення

$$(A_i u)(x,t) = \vartheta_i(x,t;\tilde{A}u, Aa) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa)}^{t} f_i\big(\varphi_i, \tau, (\tilde{A}u)(\varphi_i,\tau)\big)\Big|_{\varphi_i=\varphi_i(\tau;x,t,\tilde{A}u)} d\tau.$$

Встановимо обмеження, за яких функції $(A_i u)(x,t), i = \overline{1,n}$, $(u,a) \in \mathcal{S}$ володіють властивостями (B) – (D) простору $\mathcal{S}$. Почнемо дослідження з властивості (B). Нехай $(x,t) \in V_\varepsilon^{Aa}$, $\varphi_i(\chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa);x,t,\tilde{A}u) = (A_k a)(\chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa))$. Тоді запишемо співвідношення (для скорочення формул тут використано позначення $\chi_i := \chi_i(x,t;\tilde{A}u,Aa)$, $h := \|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2$)

$$|(A_i u)(x,t) - u_i^0| \le |\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u,Aa) - u_i^0| +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i}^{t} \big|f_i\big(\varphi_i,\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i,\tau)\big)\big|\Big|_{\varphi_i=\varphi_i(\tau;x,t,\tilde{A}u)} d\tau \le$$
$$\le \Big|H_k^i\big(\chi_i,(Aa)(\chi_i),((\tilde{A}_s u)((A_k a)(\chi_i),\chi_i))_{s\in J_k}\big)$$
$$-H_k^i(0,\mathbf{0},(u_s^0)_{s\in J_k})\Big| + F\varepsilon \le$$
$$\le H_0 \max\big\{\chi_i,(h+\alpha)\chi_i,\beta\big\} + F\varepsilon \le$$
$$\le \big(H_0 \max\big\{1,h+\alpha\big\} + F\big)\varepsilon + H_0\beta.$$

Оскільки $H_0 < 1$, що випливає з припущення *7)* теореми, то, щоб задовольнити нерівність

$$|(A_i u)(x,t) - u_i^0| \le \beta,$$

достатньо вимагати

$$\big(H_0 \max\big\{1, \|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \alpha\big\} + F\big)\varepsilon \le$$
$$\le (1 - H_0)\beta. \tag{16}$$

Розглянемо властивість (C) простору $\mathcal{S}$. Нехай $(x_j,t) \in V_\varepsilon^{Aa}, j = 1,2$, для визначеності $x_1 < x_2$, $\varphi_i(\chi_i(x_j,t;\tilde{A}u,Aa);x_j,t,\tilde{A}u) = (A_1 a)(\chi_i(x_j,t;\tilde{A}u,Aa)), j = 1,2$ (без втрати загальності вважаємо, що обидві характеристики перетнуть ту ж саму сторону сектора). Тоді припустивши виконання умов

$$p \ge 1,\ q \ge \max\big\{1, \|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \alpha\big\}, \tag{17}$$
$$\lambda_0 p\big(\|h(0,\mathbf{0},\mathbf{u^0})\|_2 + \alpha + \Lambda\big)\varepsilon \le \frac{\gamma}{2}, \tag{18}$$

встановлюємо оцінки (для зменшення виразів тут використано наступні позначення $\varphi_i^j := \varphi_i(\tau;x_j,t,\tilde{A}u)$, $\chi_i^j := \chi_i(x_j,t;\tilde{A}u,Aa)$)

$$|\Delta_j (A_i u)(x_j,t)| \le$$
$$\le \int\limits_{\chi_i^1}^{t} \big|\Delta_j f_i\big(\varphi_i^j,\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i^j,\tau)\big)\big| d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i^2}^{\chi_i^1} \big|f_i\big(\varphi_i^2,\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i^2,\tau)\big)\big| d\tau +$$
$$+\big|\Delta_j H_1^i\big(\chi_i^j,(Aa)(\chi_i^j),(\tilde{A}_s u)((A_1 a)(\chi_i^j),\chi_i^j)\big)\big|$$
$$\le \int\limits_{\chi_i^1}^{t} f_0 p|\Delta_j \varphi_i^j| d\tau + F|\Delta_j \chi_i^j| +$$
$$+H_0 \max\{1,h+\alpha,q\}|\Delta_j \chi_i^j| \le$$
$$\le f_0 p|\Delta_j x_j| e^{\lambda_0 p\varepsilon}\varepsilon + (F + H_0 q)\frac{2}{\gamma}|\Delta_j x_j| e^{\lambda_0 p\varepsilon},$$

де f_0 – стала Ліпшиця функцій $f_i, i = \overline{1,n}$. Таким чином, функція Au володіє властивістю (C), якщо

$$p\varepsilon \le 1, \tag{19}$$
$$f_0 e^{\lambda_0} + (F + H_0 q)\frac{2}{\gamma} e^{\lambda_0} \le p. \tag{20}$$

І насамкінець, проведемо дослідження для властивості (D). Нехай $(x_j,t_j) \in V_\varepsilon^{Aa}$, $j = 1,2$, $t_1 \ne t_2$, причому задовольняються нерівності (7), (8) для $k = 1$. Тоді для $i \in J_1$ справедливі співвідношення (для зменшення виразів тут використано позначення $\varphi_i^j := \varphi_i(\tau;x_j,t_j,\tilde{A}u)$, $\chi_i^j := \chi_i(x_j,t_j;\tilde{A}u,Aa)$)

$$|\Delta_j (A_i u)(x_j,t_j)| \le$$
$$\le \left|\Delta_j \int\limits_{\chi_i^j}^{t_j} f_i\big(\varphi_i^j,\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i^j,\tau)\big) d\tau\right| +$$
$$+\big|\Delta_j H_2^i\big(\chi_i^j,(Aa)(\chi_i^j),(\tilde{A}_s u)((A_2 a)(\chi_i^j),\chi_i^j)\big)\big|$$
$$\le \int\limits_{\min\{t_1,\chi_i^2\}}^{t_1} \big|\Delta_j f_i\big(\varphi_i^j,\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i^j,\tau)\big)\big| d\tau +$$
$$+F\big(|\Delta_j t_j| + |\Delta_j \chi_i^j|\big) + H_0 q|\Delta_j \chi_i^j|.$$

Зауважимо, що справедлива оцінка

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j \varphi_i^j| \le |\Delta_j \varphi(t_1; x_j, t_j, \tilde{A}u)| e^{\lambda_0 p\varepsilon} \le \\
\le (|\Delta_j x_j| + \Lambda |\Delta_j t_j|) e^{\lambda_0 p\varepsilon} \le \\
\le (h + \alpha + \Lambda) |\Delta_j t_j| e^{\lambda_0 p\varepsilon}.
\end{gathered}
$$

Оцінимо $\Delta_j \chi_i^j$, для чого розглянемо можливі варіанти розташування характеристик.

1. Якщо $\chi_i^1 < \chi_i^2 \le t_1 < t_2$, то

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j \chi_i^j| \le \frac{2}{\gamma} |\Delta_j \varphi(\chi_i^2; x_j, t_j, \tilde{A}u)| \le \\
\le \frac{2}{\gamma} (h + \alpha + \Lambda) |\Delta_j t_j| e^{\lambda_0 p\varepsilon}.
\end{gathered}
$$

2. Якщо $\chi_i^1 < t_1 < \chi_i^2 < t_2$, то

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j \chi_i^j| \le |\chi_i^2 - t_1| + |t_1 - \chi_i^1| \le \\
\le |\Delta_j t_j| + \frac{2}{\gamma} |x_1 - (A_2 a)(t_1)| \le \\
\le |\Delta_j t_j| + \frac{2}{\gamma} \bigl(|\Delta_j x_j| + |x_2 - (A_2 a)(\chi_i^2)| + \\
+ |(A_2 a)(\chi_i^2) - (A_2 a)(t_1)|\bigr) \le \\
\le \bigl(\frac{2}{\gamma}(2h + 2\alpha + \Lambda) + 1\bigr) |\Delta_j t_j|.
\end{gathered}
$$

Узагальнивши, в будь-якому випадку маємо

$$
|\Delta_j \chi_i^j| \le \bigl(\frac{2}{\gamma} e^{\lambda_0 p\varepsilon}(2h + 2\alpha + \Lambda) + 1\bigr) |\Delta_j t_j|.
$$

Підставивши отримані оцінки, встановлюємо співвідношення

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j (A_i u)(x_j, t_j)| \le \\
\le F\bigl(\frac{2}{\gamma} e^{\lambda_0 p\varepsilon}(2h + 2\alpha + \Lambda) + 2\bigr) |\Delta_j t_j| + \\
+ f_0 p (h + \alpha + \Lambda) |\Delta_j t_j| e^{\lambda_0 p\varepsilon} \varepsilon + \\
+ H_0 q \bigl(\frac{2}{\gamma} e^{\lambda_0 p\varepsilon}(2h + 2\alpha + \Lambda) + 1\bigr) |\Delta_j t_j|.
\end{gathered}
$$

Отже, для функції Au справедлива властивість (D), якщо

$$
\begin{gathered}
2F + (F\frac{2}{\gamma} + f_0 p\varepsilon)(2h + 2\alpha + \Lambda) e^{\lambda_0 p\varepsilon} + \\
+ H_0 q \bigl(\frac{2}{\gamma} e^{\lambda_0 p\varepsilon}(2h + 2\alpha + \Lambda) + 1\bigr) \le q.
\end{gathered}
$$

Врахувавши припущення *7)* теореми, щоб задовольнити дану умову, достатньо вимагати

$$
\begin{gathered}
2F + (F\frac{2}{\gamma} + f_0)(2h + 2\alpha + \Lambda) e^{\lambda_0} \le \\
\le (1 - \mathcal{K}) q. \qquad (21)
\end{gathered}
$$

Нехай виконані всі наведені обмеження, що забезпечують збереження властивостей простору $\mathcal{S}$ при дії оператора A. Встановимо умови на параметри простору, за яких оператор є стисним. Нехай $(u^j, a^j) \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2$, і позначимо $\rho := \rho\bigl((u^1, a^1), (u^2, a^2)\bigr)$. Справедлива оцінка

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j (A_k a^j)(t)| \le \\
\le \int_0^t \bigl|\Delta_j h_k\bigl(\tau, a^j(\tau), u^j(a^j(\tau), \tau)\bigr)\bigr| d\tau \le \\
\le \int_0^t h_0 \max_{k,i} \bigl\{|\Delta_j a_k^j(\tau)|, |\Delta_j u_i^j(a_k^j(\tau), \tau)|\bigr\} d\tau \le \\
\le h_0 \varepsilon \rho, \ k = 1, 2.
\end{gathered}
$$

Оцінюючи $\Delta_j(\overline{\tilde{A}_i u^j})(x, t)$, отримаємо

$$
|\Delta_j(\overline{\tilde{A} u_i^j})(x, t)| \le (1 + h_0 \varepsilon p) \rho, \ i = \overline{1, n}.
$$

Розглянемо різницю $\Delta_j(\overline{A u^j})(x, t)$ (для зменшення виразів надалі використовуємо такі позначення $\varphi_i^j := \varphi_i(\tau; x, t, \tilde{A}u^j)$, $\chi_i^j := \chi_i(x, t; \tilde{A}u^j, Aa^j)$).

1. Якщо $(x, t) \in V_\varepsilon^{Aa^1} \cap V_\varepsilon^{Aa^2}$, причому $\varphi_i(\chi_i^j; x, t, \tilde{A}u^j) = (A_k a^j)(\chi_i^j)$, $j = 1, 2$ (для визначеності покладемо $k = 1$, $\chi_i^1 \ge \chi_i^2$), то

$$
\begin{gathered}
|\Delta_j (A_i u^j)(x, t)| \le \\
\le \int_{\chi_i^1}^t \bigl|\Delta_j f_i\bigl(\varphi_i^j, \tau, (\tilde{A}u^j)(\varphi_i^j, \tau)\bigr)\bigr| d\tau +
\end{gathered}
$$

$$+\int\limits_{\chi_i^2}^{\chi_i^1} \big|f_i\big(\varphi_i^2,\tau,(\tilde{A}u^2)(\varphi_i^2,\tau)\big)\big|d\tau+$$
$$+\big|\Delta_j H_1^i\big(\chi_i^j,(Aa^1)(\chi_i^j),(\tilde{A}_s u^1)((A_1a^1)(\chi_i^j),\chi_i^j)\big)\big|$$
$$+\big|\Delta_j H_1^i\big(\chi_i^2,(Aa^j)(\chi_i^2),(\overline{\tilde{A}_s u^1})((A_1a^j)(\chi_i^2),\chi_i^2)\big)\big|$$
$$+\big|\Delta_j H_1^i\big(\chi_i^2,(Aa^2)(\chi_i^2),(\overline{\tilde{A}_s u^j})((A_1a^2)(\chi_i^2),\chi_i^2)\big)\big|$$
$$\le f_0 p\varepsilon\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}+f_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho+$$
$$+(F+H_0q)\big(\frac{2}{\gamma}h_0\varepsilon\rho+\frac{2}{\gamma}\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}\big)+$$
$$+H_0 p h_0\varepsilon\rho+H_0(1+h_0\varepsilon p)\rho.$$

2. Розглянемо іншу можливість: характеристики з різними значеннями індексу j досягають протилежних сторін відповідних секторів $V_\varepsilon^{Aa^j}$, що можливо для $i\in J_3$. Для визначеності покладемо $\varphi_i(\chi_i^j;x,t,\tilde{A}u^j)=(A_ja^j)(\chi_i^j), j=1,2,\ \chi_i^1\ \ge\ \chi_i^2$. В цьому випадку отримуємо

$$|\Delta_j(A_iu^j)(x,t)|\le$$
$$\le\int\limits_{\chi_i^1}^{t}\big|\Delta_j f_i\big(\varphi_i^j,\tau,(\tilde{A}u^j)(\varphi_i^j,\tau)\big)\big|d\tau+$$
$$+\int\limits_{\chi_i^2}^{\chi_i^1}\big|f_i\big(\varphi_i^2,\tau,(\tilde{A}u^2)(\varphi_i^2,\tau)\big)\big|d\tau+$$
$$+\big|H_1^i\big(\chi_i^1,(Aa^1)(\chi_i^1),(\tilde{A}_su^1)((A_1a^1)(\chi_i^1),\chi_i^1)\big)-$$
$$-H_1^i\big(0,\mathbf{0},(u_s^0)_{s\in J_1}\big)\big|+\big|H_2^i\big(0,\mathbf{0},(u_s^0)_{s\in J_2}\big)-$$
$$-H_2^i\big(\chi_i^2,(Aa^2)(\chi_i^2),(\tilde{A}_su^2)((A_2a^2)(\chi_i^2),\chi_i^2)\big)\big|\le$$
$$\le f_0p\varepsilon\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}+$$
$$+f_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho+2(F+H_0q)\chi_i^1.$$

Встановимо оцінку для $\chi_i(x,t;\tilde{A}u^1,Aa^1)$. Із виконання на елементах простору $\mathcal{S}$ умови (15) виводимо справедливість наступного співвідношення для пари елементів $\big\{(u^1,a^1),(u^2,a^2)\big\}\subset\mathcal{S}$:

$$\lambda_i\big((A_1a^1)(t),t,(\overline{\tilde{A}u^2})((A_1a^1)(t),t)\big)-$$
$$-h_1(t,a^1(t),u^1(a^1(t),t))\ge\gamma,\ i\in J_3.$$

І тому після стандартних міркувань з урахуванням (18) виводимо нерівність

$$\frac{d}{d\tau}\big(\varphi_i(\tau;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})-(A_1a^1)(\tau)\big)\ge\frac{\gamma}{2},\ \tau\in\mathcal{T},$$
$$\mathcal{T}:=\big\{\tau\in[0,t]:|(A_1a^1)(\tau)-\varphi_i(\tau;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})|\le(h+\alpha+\Lambda)\varepsilon\big\}. \qquad (22)$$

Оскільки

$$|(A_1a^1)(t)-\varphi_i(t;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})|=$$
$$=|(A_1a^1)(t)-\varphi_i(t;x,t,\overline{\tilde{A}u^1})|\le$$
$$\le(h+\alpha+\Lambda)\varepsilon,$$

то $t\in\mathcal{T}$, і як наслідок,

$$\frac{d}{d\tau}\big(\varphi_i(\tau;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})-(A_1a^1)(\tau)\big)\big|_{\tau=t}\ge\frac{\gamma}{2}.$$

З останнього співвідношення слідує, що для деякого $\delta>0$

$$\frac{d}{d\tau}\big(\varphi_i(\tau;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})-(A_1a^1)(\tau)\big)\big|_{\tau\in[t-\delta,t]}>0.$$

Таким чином, $[t-\delta,t]\subset\mathcal{T}$. На підставі неперервності $\frac{d}{d\tau}(\varphi_i(\tau;x,t,\widetilde{Au^2})-(A_1a^1)(\tau))$ на відрізку $[0,t]$, продовжуючи описані міркування при менших значеннях τ, остаточно отримуємо $\mathcal{T}=[0,t]$. Використавши оцінку (22), запишемо нерівності

$$\chi_i(x,t;\tilde{A}u^1,Aa^1)\le$$
$$\le\frac{2}{\gamma}\big|\big(\varphi_i(\chi_i^1;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})-(A_1a^1)(\chi_i^1)\big)-$$
$$-\big(\varphi_i(0;x,t,\overline{\tilde{A}u^2})-(A_1a^1)(0)\big)\big|\le$$
$$\le\frac{2}{\gamma}\big|\varphi_i(\chi_i^1;x,t,\tilde{A}u^2)-(A_1a^1)(\chi_i^1)\big|=$$
$$=\frac{2}{\gamma}|\Delta_j\varphi_i(\chi_i^1;x,t,\tilde{A}u^j)|\le$$
$$\le\frac{2}{\gamma}\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}.$$

А отже,

$$|\Delta_j(A_iu^j)(x,t)|\le$$
$$\le f_0p\varepsilon\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0p\varepsilon}+f_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho+$$
$$+2(F+H_0q)\frac{2}{\gamma}\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0p\varepsilon}.$$

Проаналізувавши, на завершення, випадок $(x,t) \in V_\varepsilon^{Aa^1} \setminus V_\varepsilon^{Aa^2}$ та скориставшись обмеженням (19), знаходимо загальну оцінку

$$|\Delta_j(\overline{A_i u^j})(x,t)| \le f_0 p\varepsilon\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}+ \\ +f_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho + 2(F+H_0 q)\times \\ \times\Big(\frac{2}{\gamma}h_0\varepsilon\rho + \frac{2}{\gamma}\lambda_0(1+h_0\varepsilon p)\varepsilon\rho e^{\lambda_0 p\varepsilon}\Big)+ \\ +H_0 p h_0\varepsilon\rho + H_0(1+h_0\varepsilon p)\rho + p h_0\varepsilon\rho \le \\ \le \Big(f_0\lambda_0(1+h_0)e^{\lambda_0} + f_0(1+h_0)+ \\ +\frac{4}{\gamma}(F+H_0 q)(h_0+\lambda_0(1+h_0)e^{\lambda_0})+ \\ +(2H_0+1)ph_0\Big)\varepsilon\rho + H_0\rho.$$

Оскільки згідно припущення *7)* теореми $H_0 < 1$, то оператор $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ є стисним за умови

$$\Big(f_0\lambda_0(1+h_0)e^{\lambda_0} + f_0(1+h_0)+ \\ +\frac{4}{\gamma}(F+H_0 q)(h_0+\lambda_0(1+h_0)e^{\lambda_0})+ \\ +(2H_0+1)ph_0\Big)\varepsilon < 1 - H_0. \qquad (23)$$

Зауважимо, що система всіх вище отриманих умов є сумісною. Справді, спочатку фіксуємо α, задовольнивши умову (9) та нерівність $\mathcal{K} < 1$ при деякому γ, потім фіксуємо q у відповідності з умовами (17), (21), пізніше p згідно обмежень (17), (20). Вибираємо параметр β достатньо малим, щоб виконувались умови (11), (14), та нерівність (12) при деякому ε. Насамкінець зменшуємо ε, щоб задовольнити обмеження (10), (13), (16), (18), (19) та (23). В результаті отримуємо набір параметрів $(\varepsilon_0, \alpha_0, \beta_0, p_0, q_0)$, для якого виконуються усі припущення теореми.

Нехай $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\varepsilon_0, \alpha_0, \beta_0, p_0, q_0)$, тоді $A\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_0$, причому оператор $A : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ є стисним. За теоремою Банаха про стисні відображення існує єдина нерухома точка $(u^*, a^*) \in \mathcal{S}_0$ оператора. Із рівності $A(u^*, a^*) = (u^*, a^*)$ виводимо співвідношення

$$a_k^*(t) = \int_0^t h_k\big(\tau, a^*(\tau), u^*(a^*(\tau),\tau)\big)d\tau, \qquad (24)$$

$$u_i^*(x,t) = \vartheta_i(x,t;u^*,a^*)+ \qquad (25)$$
$$+\int_{\chi_i(x,t;u^*,a^*)}^t f_i\big(\varphi_i, \tau, u^*(\varphi_i,\tau)\big)\Big|_{\varphi_i = \varphi_i(\tau;x,t,u^*)} d\tau.$$

Після диференціювання рівнянь (24) за t отримуємо виконання системи (2) для пари вектор-функцій (u^*, a^*). Із рівностей (25) виводимо (тут використано позначення $\chi_i^k = \chi_i(a_k^*(t), t; u^*, a^*)$)

$$u_i^*(a_k^*(t),t) = \vartheta_i(a_k^*(t), t; u^*, a^*) = \\ = H_k^i\big(\chi_i^k, a^*(\chi_i^k), (u_s^*(a_k^*(\chi_i^k), \chi_i^k))_{s\in J_k}\big) = \\ = H_k^i\big(t, a^*(t), (u_s^*(a_k^*(t),t))_{s\in J_k}\big), \\ k=1,2,\ i \in J_{3-k}\cup J_3.$$

Тому для пари вектор-функцій (u^*, a^*) виконані крайові умови (5). Як наслідок, перепишемо $\vartheta_i(x,t;u^*,a^*)$ у вигляді (тут використано позначення $\chi_i = \chi_i(x,t;u^*,a^*)$)

$$\vartheta_i(x,t;u^*,a^*) = \\ = H_k^i\big(\chi_i, a^*(\chi_i), (u_s^*(a_k^*(\chi_i), \chi_i))_{s\in J_k}\big) = \\ = u_i^*(a_k^*(\chi_i), \chi_i) = u_i^*(\varphi_i(\chi_i; x, t, u^*), \chi_i).$$

Отже, пара вектор-функцій (u^*, a^*) задовольняє систему (6). Таким чином, (u^*, a^*) – узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).

Нехай $(u^{**}, a^{**}) \in S_{\varepsilon_1}$ – інший узагальнений розв'язок задачі. Можна вибрати параметри p_0, q_0 достатньо великими, а ε_0 достатньо малим, щоб виконувалося включення $(u^{**}, a^{**}) \in \mathcal{S}_0$, а тому $(u^{**}, a^{**}) = (u^*, a^*), t \in [0, \varepsilon_0]$, що випливає з єдиності нерухомої точки оператора A в просторі $\mathcal{S}_0$. Отже, локальний узагальнений розв'язок задачі (1)–(5) існує і єдиний. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 1. *Твердження теореми залишається правильним, якщо кулі* $\mathcal{B}_1^m$, $\mathcal{B}_{U+1}^m, m \in \mathbb{N}$ *замінити відповідно наступними* $\mathcal{B}_r^m$, $\mathcal{B}_{U+r}^m, r > 0$.

Зауваження 2. *Якщо система рівнянь*

$$u_i^0 = H_k^i(0, \mathbf{0}, (u_s^0)_{s\in J_k}), \qquad (26) \\ k=1,2,\ i\in J_{3-k},$$

однозначно визначає набір значень $u_i^0, i \in J_1 \cup J_2$, *то початкові умови (4) можна* *не накладати, а співвідношення погодження теореми замінити наступними*

$$H_1^i(0, \mathbf{0}, (u_s^0)_{s\in J_1}) = H_2^i(0, \mathbf{0}, (u_s^0)_{s\in J_2}),\ i \in J_3,$$

де значення $u_s^0, s \in J_1 \cup J_2$ є розв'язками системи (26).

Зауваження 3. *Якщо крайові умови (5) спростити до вигляду*

$$u_i(a_k(t), t) = H_k^i(t, a(t)), \quad k = 1, 2,\ \ i \in J_{3-k} \cup J_3, \tag{27}$$

то в теоремі можна відмовитися від припущення 7).

Зауваження 4. *Локальний розв'язок задачі (1)–(4), (27) можна продовжити на цілий часовий проміжок $[0, T]$. Достатні умови глобальної розв'язності отримуємо на основі роботи [8].*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lee Da-tsin, Wen-tsu Y.* Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. II. Typical boundary value problems of functional form and typical free boundary problems // Scientia Sinica. — 1964. — V. 13, N 5. — P. 551–562.

2. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в однородном пространстве // Прикл. матем. и мех. — 1964. — Т. 28, N 3. — С. 542–543.

3. *Hill C.D.* A hyperbolic free boundary problem // J. Math. Anal. and Appl. — 1970. — V. 31, N 1. — P. 117–129.

4. *Кирилич В.М.* Нелокальна задача типу Стефана для гіперболічної системи першого порядку // Укр. мат. журн. — 1988. — Т. 40, N 1. — С. 121–124.

5. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, N 3. — С. 497–501.

6. *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* Локальная разрешимость смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы с внутренней свободной границей // Дифференц. и интегр. уравнения. — 1994. — N 4. — С. 57–66.

7. *Берегова Г.І., Кирилич В.М.* Гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі // Укр. мат. журнал. — 1997. — Т. 49, N 12. — С. 1684–1689.

8. *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Диф. уравнения. — 2006. — Т. 42, N 4. — С. 489–503.