УДК 517.96

©2008 р. **Н.М.Шевчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДО-БЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

У класі узагальнених функцій типу розподілів встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдо-Бесселевим оператором нескінченного порядку, побудованим за негладким у точці 0 символом.

We obtain the correct solvability of the Cauchy problem for the evolution equation with a pseudo-Bessel operator of infinite order constructed by a smooth in zero symbol in the class of generalized functions of distribution type.

У праці [1] досліджені властивості оператора $A = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F_{B_\nu}^{-1}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя, a – однорідний негладкий у точці 0 символ (оператор A в [1] називається псевдо-Бесселевим оператором). Еволюційні рівняння з оператором A є природними узагальненнями сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

який вироджується по просторовій змінній, а саме рівняння вироджується на межі області, оскільки B_ν також можна подати у вигляді $B_\nu\varphi = -F_{B_\nu}^{-1}[\xi^2 F_{B_\nu}[\varphi]]$, де φ – елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. В [1] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де A – псевдо-Бесселевий оператор, у класі узагальнених функцій скінченного порядку.

У цій праці розвивається теорія задачі Коші для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \quad f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k,$$

$$A = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$$

($f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ – функція, яка задовольняє певні умови) у випадку, коли початкова функція є узагальненою функцією типу розподілів. Досліджуються структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші, дається формула розв'язку задачі Коші.

1. Нехай γ-фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,\dots\}$, ν – фіксоване число з множини $\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\dots\right\}$, $p_0 := 2\nu+1$, $\gamma_0 := 1+[\gamma]+p_0$, $M(x) := 1+|x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ |D_x^k\varphi(x)| \le c_k M(x)^{-(\gamma_0+k)},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}\}.$$

У Φ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0+k} |D_x^k\varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ. Оскільки $\overset{\circ}{\Phi}$ утворює підпростір Φ, то в $\overset{\circ}{\Phi}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями.

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя [2]:

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$$

(тут j_ν – нормована функція Бесселя). При цьому $F_B[\varphi]$ – парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Наведемо ще деякі властивості функції $F_B[\varphi]$, встановлені в [2]:

1) якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, то $F_B[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція; 2) у функції $D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi \to \pm 0} D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, функція $D_\xi^{2k} F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $\xi = 0$ має усувний розрив; 3) функції з простору $\overset{\circ}{\Psi} := F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ задовольняють умову:

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_s > 0 : \sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |\xi^s D_\xi^s \psi(\xi)| \leq c_s,$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi};$$

4) $\xi^s D_\xi^s F_B[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$; якщо $|\xi| \geq 1$, то правильною є нерівність:

$$|D_\xi^s F_B[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_s}{|\xi|^{n+m+1}},$$

$$n = \nu + 1/2, \{m, s\} \subset \mathbb{Z}_+, m \geq s.$$

На підставі властивості 3) в праці [2] у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою системи норм

$$\|\psi\|_p := \sup_{\xi \in (0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^p \xi^{2k} |D_\xi^{2k} \psi(\xi)| \right\},$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi}, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Збіжність послідовності $\{\varphi_j, j \geq 1\} \subset \overset{\circ}{\Psi}$ у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ до функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$ можна охарактеризувати ще й так [2]: $\{\varphi_j, j \geq 1\} \subset \overset{\circ}{\Psi}$ збігається за топологією простору $\overset{\circ}{\Psi}$ до $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$ тоді і тільки тоді, коли вона: 1) обмежена в $\overset{\circ}{\Psi}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall j \geq 1 : \ \|\varphi_j\|_p \leq c,$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_\xi^{2m}(\varphi_j - \varphi), j \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset (0, \infty)$.

Мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ є кожна парна функція $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ (або $a \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$), яка зростає на нескінченності разом з усіма своїми похідними не швидше за поліном [2]:

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \ \exists b_\alpha > 0 \ \exists m_\alpha \in \mathbb{N} \ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$|D_\xi^\alpha a(\xi)| \leq b_\alpha (1 + |\xi|)^{m_\alpha}.$$

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu} \omega d\omega, \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Будемо говорити, що оператор T_x^ξ визначений у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $T_x^\xi \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для кожного $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$.

У праці [4] доведено, що оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ визначений і неперервний у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ диференційовна у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ (навіть нескінченно диференційовна). Слідуючи [5], згортку двох функцій з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначимо формулою:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}.$$

Із властивостей оператора T_x^ξ та результатів, отриманих у [4] випливає, що $\varphi * \psi \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\{\varphi,\psi\}\subset\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому правильною є формула

$$F_B[\varphi*\psi]=F_B[\varphi]\cdot F_B[\psi],\{\varphi,\psi\}\subset\overset{\circ}{\Phi}.$$

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів над простором $\overset{\circ}{\Phi}$ зі слабкою збіжністю позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Елементи $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x)=<f_\xi,T_x^\xi\varphi(x)>=<f_\xi,T_\xi^x\varphi(\xi)>,$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Оскільки $F_B^{-1}[\varphi]\in\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi\in\overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$<F_B[f],\varphi>=<f,F_B^{-1}[\varphi]>,\forall\varphi\in\overset{\circ}{\Psi}.$$

З властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{\Psi}$. В [4] встановлено, що якщо узагальнена функція $f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної функції $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f*\varphi]=F_B[f]\cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

2. Нехай $a:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma\in(1,+\infty)\backslash\{2,3,4,\dots\}$, тобто $a(\lambda x)=\lambda^\gamma a(x)$, $\lambda>0$, яка:

1)нескінченно диференційовна при $x\neq0$;

2)похідні функції a задовольняють умову

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists c_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}:$$

$$|D_x^k a(x)|\leq c_k|x|^{\gamma-k},$$

причому

$$\exists\widetilde{c}>0\ \exists\widetilde{A}>0\ \forall k\in\mathbb{N}:c_k\leq\widetilde{c}A^k k^k;$$

3)існують сталі c_0', $\widetilde{c_0}>0$, $\delta_0\geq\gamma$ такі, що

$$c_0'|x|^\gamma\leq a(x)\leq\widetilde{c_0}(1+|x|^{\delta_0}),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Метою нашого дослідження є дослідження властивостей оператора вигляду $\sum\limits_{k=1}^\infty c_kA^k$, $c_k=const$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, побудованого за функцією $f(x)=\sum\limits_{k=1}^\infty c_kx^k$, $x\in\mathbb{R}$, де оператор A: $\overset{\circ}{\Phi}\to\overset{\circ}{\Phi}$ визначається співвідношенням

$$A\varphi=F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}[\varphi]],\ \ \forall\varphi\in\overset{\circ}{\Phi},$$

а також встановлення коректної розв'язності задачі Коші для еволюційних рівнянь з таким оператором та початковими умовами з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Властивості оператора A досліджені в праці [1]; зокрема, в [1] встановлено, що A – лінійний неперервний оператор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Вважаємо, що функція f допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

А) $\exists d_0>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq d_0|x|$;

Б) $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+\ \exists p_\alpha\in\mathbb{N}\ \exists b_\alpha>0\ \forall x\in\mathbb{R}$: $|D_x^\alpha f(x)|\leq b_\alpha(1+|x|)^{p_\alpha}$;

В) $\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}$: $|f(z)|\leq c_\varepsilon(1+|x|)^{p_0}\exp\left\{\varepsilon|y|^{1/[\delta_0]}\right\}$ (тут δ_0 – стала з умови 3), $[\delta_0]$ – ціла частина числа δ_0, p_0 – стала з умови Б)).

Зазначимо, що з умови Б) випливає той факт, що функція f є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

Говоритимемо, що в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ задано псевдо-Бесселевий оператор нескінченного порядку $f(A):=\sum\limits_{k=1}^\infty c_kA^k$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^k\varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$.

Теорема 1. *Якщо функція f задовольняє умови Б), В), то в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначений і є неперервним псевдо-Бесселевий оператор нескінченного порядку $f(A) \equiv A_f$.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з праці [6, с. 32 – 36] і використовує властивості функцій з простору $\overset{\circ}{\Psi}$.

Розглянемо еволюційне рівняння з оператором A_f вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \;\; (t,x) \in (0,T] \times (0,\infty) \equiv \Omega_+. \tag{2}$$

Під розв'язком рівняння (2) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T], \overset{\circ}{\Phi})$, яка задовольняє рівняння (2).

При дослідженні властивостей розв'язків рівняння (2) важливими є функції $\exp\{-tf(a(x))\}$, $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}$,

$$G(t,\sigma) = F^{-1}_{B_\nu}[e^{-tf(a(x))}](\sigma) \equiv$$

$$\equiv c_\nu \int_0^\infty e^{-tf(a(x))} j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \;\; t \in (0,T].$$

Урахувавши властивості функції $f(a)$ та результати, наведені в [7, с. 96 – 97] отримаємо, що при кожному $t \in (0,T]$ функція $Q(t,x) := \exp\{-tf(a(x))\}$ як функція x є елементом простору $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому для її похідних правильними є нерівності

$$|D_x^s Q(t,x)| \leq \beta t^s \exp\{-\beta_0 t|x|^\gamma\} \cdot |x|^{\omega_s - s},$$

$$s \in \mathbb{N}, \;\; x \neq 0, \tag{3}$$

$\beta = \beta(s) > 0$, $\beta_0 > 0$ – стала, не залежна від t та s,

$$\omega_s = \begin{cases} \delta_0 \widetilde{p_s} \cdot s + s\gamma, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \gamma, & \text{якщо } |x| < 1, x \neq 0, \end{cases}$$

$\widetilde{p_s} = \max\{p_1, ..., p_s\}$ ($p_1, ..., p_s$ – сталі з умови Б), яку задовольняє функція f).

Щодо властивостей функції G, то маємо, що G – парна функція аргументу σ при фіксованому $t \in (0,T]$, нескінченно диференційовна по σ і є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}$ (при фіксованому $t \in (0,T]$), оскільки вона є оберненим перетворенням Бесселя функції $Q(t,\xi)$. Отже, для похідних функції G правильні нерівності:

$$|D_\sigma^m G(t,\sigma)| \leq c_m (1 + |\sigma|)^{-(\gamma_0 + m)},$$

$$t \in (0,T], \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

причому стала c_m залежить від t. Виділимо в явному вигляді цю залежність.

Передусім розглянемо випадок $m = 0$ і скористаємось зображенням бесселевих функцій напівцілого аргументу:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \right.$$

$$\left. + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\}, \;\; x > 0, n + 1/2 := \nu,$$

де $P_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, $Q_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня $n-1$; при цьому $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$. Оскільки нормована функція Бесселя j_ν пов'язана з функцією Бесселя J_ν формулою

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{x^\nu} J_\nu(x), \;\; x > 0,$$

то маємо наступне зображення для функції $j_{n+1/2}$:

$$j_{\nu+1/2}(x) = \frac{c_n}{x^{n+1}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \right.$$

$$\left. + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\}, n \in \mathbb{N}, x > 0. \tag{4}$$

Урахувавши (4), подамо $G(t,\sigma)$, $\sigma \neq 0$, у вигляді:

$$G(t,\sigma) = \Lambda_1(t,\sigma) + \Lambda_2(t,\sigma),$$

де

$$\Lambda_1(t,\sigma)=\frac{c_n}{\sigma^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-tf(a(x))}x^{n+1}\times$$

$$\times\sin(x\sigma-\frac{n\pi}{2})P_n(\frac{1}{\sigma x})dx,$$

$$\Lambda_2(t,\sigma)=\frac{c_n}{\sigma^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-tf(a(x))}x^{n+1}\times$$

$$\times\cos(x\sigma-\frac{n\pi}{2})Q_n(\frac{1}{\sigma x})dx.$$

Введемо позначення:

$$P_n(\frac{1}{\sigma x})=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(\sigma x)^k},\ \ Q_n(\frac{1}{\sigma x})=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d_k}{(\sigma x)^k}.$$

Тоді

$$\Lambda_1(t,\sigma)=c_n\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\sigma^{n+k+1}}J_{1,k}(t,\sigma),$$

$$J_{1,k}(t,\sigma)=\int\limits_0^\infty e^{-tf(a(x))}x^{n-k+1}\sin(x\sigma-\frac{n\pi}{2})dx,$$

$$\Lambda_2(t,\sigma)=c_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d_k}{\sigma^{n+k+1}}J_{2,k}(t,\sigma),$$

$$J_{2,k}(t,\sigma)=\int\limits_0^\infty e^{-tf(a(x))}x^{n-k+1}\cos(x\sigma-\frac{n\pi}{2})dx.$$

Оцінимо $J_{1,k}(\sigma)$. Якщо $\sigma\neq 0$, то інтегруючи $s=n-k+2+[\gamma]$ разів частинами подамо $J_{1,k}$ у вигляді:

$$J_{1,k}(\sigma)=\frac{(-1)^s}{\sigma^s}\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg[\int\limits_\varepsilon^{+\infty}D_x^s(e^{-tf(a(x))}x^{n-k+1})\times$$

$$\times\sin(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+s\frac{\pi}{2})dx+\Phi(\varepsilon,\sigma)\Bigg]\equiv$$

$$\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}(J(t,\sigma,\varepsilon)+\Phi(\varepsilon,\sigma)).\qquad(4_1)$$

Символом $\Phi(\varepsilon,\sigma)$ позначається позаінтегральний вираз, який складається з доданків вигляду $c(x^{n-k+1})^{(l)}(e^{-tf(a(x))})^{(s-1-l)}\cdot\Lambda$, якщо $0\le l\le n-k$, та доданку $c(e^{-tf(a(x))})^{(s-1-l)}\cdot\Lambda$, якщо $l=n-k+1$ (c – сталі, конкретні значення яких на даний момент не важливі, $\Lambda=\sin(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+s\frac{\pi}{2})$) із значеннями в точці $x=\varepsilon$ та у нескінченності. Зазначимо, що якщо $l=n-k+1$, то $s-1-l=[\gamma]$. Звідси та з оцінок (3) випливає, що для $0<x<1$ справджується нерівність

$$|D_x^{s-1-l}e^{-tf(a(x))}|\equiv|D_x^{[\gamma]}e^{-tf(a(x))}|\le$$

$$\le cx^{\gamma-[\gamma]}=cx^{\{\gamma\}},$$

де $c=c(t)>0$. Якщо $0\le l\le n-k$, то $(x^{n-k+1})^{(l)}=const\cdot x^\alpha$, де $\alpha\in\mathbb{N}$. Отже, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,\sigma)=0$ для кожного σ. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання на нескінченності функції $\exp\{-tf(a(x))\}$ та її похідних.

Урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що оцінка $|J(t,\sigma,\varepsilon)|$ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду:

$$|J(t,\sigma,\varepsilon)|\le\frac{1}{|\sigma|^s}\int\limits_0^\infty\left|D_x^s\left(e^{-tf(a(x))}x^{n-k+1}\right)\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{|\sigma|^s}\Bigg[\int\limits_0^\infty|D_x^s e^{-tf(a(x))}|x^{n-k+1}dx+$$

$$+s(n-k+1)\int\limits_0^\infty|D_x^{s-1}e^{-tf(a(x))}|x^{n-k}dx+\dots+$$

$$+\frac{(n-k+1)!}{(n-k+1-j)!}C_s^{s-j}\int\limits_0^\infty|D_x^{s-j}e^{-tf(a(x))}|\times$$

$$\times x^{n-k+1-j}dx+\dots+(n-k+1)!\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty|D_x^{1+[\gamma]}e^{-tf(a(x))}|dx\Bigg].\qquad(5)$$

Із оцінок похідних функції $\exp\{-tf(a(x))\}$ випливає, що всі інтеграли є збіжними. Справді, розглянемо один із інтегралів у сумі (5), який відповідає індексу $n-k+1-j$. Урахувавши

(3) знайдемо, що підінтегральна функція у відповідному інтегралі допускає оцінку

$$x^{n-k+1-j}|D_x^{s-j}e^{-tf(a(x))}| \leq$$
$$\leq \beta t^{s-j}x^{n-k+1-j+\omega_{s-j}-(s-j)}e^{-\beta_0 tx^\gamma}.$$

Введемо позначення:

$$J(t) := t^{s-j}\int\limits_0^\infty e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{n-k+1-j+\omega_{s-j}-(s-j)}dx =$$

$$= t^{s-j}\int\limits_0^1 e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{n-k+1-j+\omega_{s-j}-(s-j)}dx+$$

$$+t^{s-j}\int\limits_1^\infty e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{n-k+1-j+\omega_{s-j}-(s-j)}dx \equiv$$

$$\equiv J_1(t) + J_2(t).$$

Інтеграл J_1 є збіжним. Справді, нагадаємо, що $\omega_j = \gamma$, якщо $0 < x < 1$. Тоді для $t \in (0,1]$ маємо оцінку

$$J_1(t) \leq t^{s-j}\int\limits_0^1 e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{\{\gamma\}-1} \leq \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\{\gamma\}}} < \infty.$$

Оцінимо $J_2(t)$, виділивши при цьому залежність від параметра t та врахувавши, що

$$\omega_{s-j} = \delta_0\widetilde{p}_{s-j}(s-j)+(s-j)\gamma \leq \delta_0\widetilde{p}_s\cdot s+s\gamma \leq$$
$$\leq \delta_0\widetilde{p}_0\cdot\widetilde{s}+\widetilde{s}\gamma \equiv \omega_0,$$

де $\widetilde{s} = n+2+[\gamma]$, $\widetilde{p}_0 = \max\{p_1, ..., p_{\widetilde{s}}\}$; p_1, $\ldots$, $p_{\widetilde{s}}$ – сталі з умови Б), яку задовольняє функція f. Отже, для $t \in (0,1]$ правильною є нерівність

$$J_2(t) \leq t^{s-j}\int\limits_1^\infty e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{\omega_{s-j}-1-[\gamma]}dx \leq$$

$$\leq t^{s-j}\int\limits_0^\infty e^{-\beta_0 tx^\gamma}x^{\omega_{s-j}-1-[\gamma]}dx \overset{(\beta_0 t)^{1/\gamma}x=y}{=}$$

$$= const\cdot t^{s-j}t^{-(\omega_{s-j}-[\gamma])/\gamma}\int\limits_0^\infty e^{-y^\gamma}y^{\omega_{s-j}-1-[\gamma]}dy =$$

$$= const\cdot t^{-\omega_{s-j}/\gamma} \leq const\cdot t^{-\omega_0/\gamma}.$$

Таким чином,

$$J(t) \leq const\cdot t^{-(\delta_0\widetilde{p}_s+\gamma)(n+2+[\gamma])/\gamma} \equiv const\cdot t^{-\omega_0/\gamma},$$
$$t \in (0,1].$$

Оцінюючи аналогічно кожний доданок в (5), прийдемо до нерівності:

$$|J(t,\sigma,\varepsilon)| \leq \frac{const}{|\sigma|^s}t^{-\omega_0/\gamma}, \ \ \sigma \neq 0, \ \ \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Урахувавши (6) та здійснивши в (4_1) граничний перехід при $\varepsilon \to +0$ знайдемо, що для $\sigma \neq 0$ та $t \in (0,1]$

$$|J_{1,k}(t,\sigma)| \leq \frac{const}{|\sigma|^s}t^{-\omega_0/\gamma}.$$

Тоді $|\Lambda_1(t,\sigma)|$ оцінюється наступним чином:

$$|\Lambda_1(t,\sigma)| \leq c_n t^{-\omega_0/\gamma}\sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{b}_k}{|\sigma|^{n+k+1+s}} =$$

$$= \widetilde{c}_n\frac{t^{-\omega_0/\gamma}}{|\sigma|^{2n+3+[\gamma]}} \equiv \frac{\widetilde{c}_n t^{-\omega_0/\gamma}}{|\sigma|^{1+[\gamma]+p_0}} \equiv \frac{\widetilde{c}_n t^{-\omega_0/\gamma}}{|\sigma|^{\gamma_0}},$$
$$\sigma \neq 0, \ \ t \in (0,1].$$

Аналогічно оцінюємо $|\Lambda_2(t,\sigma)|$. Отже, якщо $\sigma \neq 0$, то для функції $G(t,\sigma)$ справджується нерівність

$$|G(t,\sigma)| \leq ct^{-\omega_0/\gamma}|\sigma|^{-\gamma_0}.$$

Оскільки

$$G(t,\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-tf(a(x))}j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \overset{t^{-1/\gamma}y=x}{=}$$

$$= t^{-(2\nu+2)/\gamma}\int\limits_0^\infty e^{-tf(t^{-1}a(y))}j_\nu(zy)y^{2\nu+1}dy,$$
$$z = t^{-1/\gamma}\sigma,$$

то, врахувавши властивості функцій f та a дістанемо, що

$$|G(t,\sigma)| \leq t^{-(2\nu+2)/\gamma}\int\limits_0^\infty e^{-d_0 y^\gamma}y^{2\nu+1}dy \equiv$$

$$\equiv c_0 t^{-(2\nu+2)/\gamma} \equiv c_0 t^{-(2n+3)/\gamma}, \ \ \forall \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\omega_0 > 2n+3$, то для $t \in (0,1]$ дістаємо, що

$$|G(t,\sigma)| \le \frac{ct^{-\omega_0/\gamma}}{(1+|\sigma|)^{\gamma_0}}, \ \ \forall \sigma \in \mathbb{R}, \ \ t \in (0,1].$$

Нехай $m \in \mathbb{N}$. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено у випадку $m = 0$, прийдемо до нерівності:

$$|D_\sigma^m G(t,\sigma)| \le \alpha_m t^{-\omega_m/\gamma}(1+[\sigma])^{-(m+\gamma_0)},$$
$$t \in (0,1], \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ m \in \mathbb{Z}_+, \qquad (7)$$

$$\omega_m = (\delta_0 \widetilde{p}_m + \gamma)\widetilde{s}_m, \ \ \widetilde{s}_m = n+2+[\gamma]+m,$$

$\widetilde{p}_m = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_{\widetilde{s}_m}\}$, $p_1, \ldots, p_{\widetilde{s}_m}$ – сталі з умови Б), яку задовольняє функція f, стала α_m не залежить від t.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *При кожному $t > 0$, $G(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Для функції $G(t,\sigma)$, $t \in (0,1]$, $\sigma \in \mathbb{R}$, та її похідних правильними є оцінки (7).*

Наслідок 1. *Вірними є нерівності*

$$\left| D_\sigma^m \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma) \right) \right| \le \widetilde{\alpha}_m t^{-(\omega_m + \delta_0 p_0)/\gamma} \times$$
$$\times (1+|\sigma|)^{-(m+\gamma_0)}, \ \ t \in (0,1], \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ m \in \mathbb{Z}_+, \qquad (8)$$

де δ_0, p_0 – сталі з умови 3) та умови Б) відповідно, які задовольняють функції a та f.

Доведення нерівності (8) аналогічне доведенню нерівності (8); при цьому використовується вигляд $\frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma)$ та зміни, які вносить у відповідну оцінку підінтегральний множник $f(a(\xi))$.

Функція G є розв'язком рівняння (2). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} F_B^{-1}[e^{-tf(a(\xi))}] = F_B^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-tf(a(\xi))} \right].$$

З іншої сторони,

$$A_f G(t,\sigma) = F_B^{-1}[f(a(\xi)) F_B[G(t,\sigma)]] =$$
$$= F_B^{-1}\left[f(a(\xi))e^{-tf(a(\xi))}\right] = -F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-tf(a(\xi))}\right].$$

Звідси вже випливає, що функція G задовольняє рівняння (2).

Теорема 3. *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0, T^*]$, $T^* = \min\{1, T\}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\triangle t}(\sigma) := \frac{1}{\triangle t}[G(t+\triangle t, \sigma) - G(t,\sigma)] \underset{\triangle t \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\triangle t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma)$$

виконується у розумінні збіжності у просторі Φ, тобто

1) $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ $D_\sigma^m \Phi_{\triangle t} \rightrightarrows D_\sigma^m \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\right)$, $\triangle t \to 0$, на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c_p > 0$: $\|\Phi_{\triangle t}\|_p \le c_p$,

де стала c_p не залежить від $\triangle t$.

Функція G диференційовна по t у звичайному розумінні, тому

$$\Phi_{\triangle t}(\sigma) = G'_t(t+\theta \triangle t, \sigma), \ \ 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D_\sigma^m \Phi_{\triangle t}(\sigma) = -c_\nu \int_0^\infty f(a(\xi)) e^{-(t+\theta\triangle t) f(a(\xi))} \times$$
$$\times D_\sigma^m j_\nu(\sigma\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

Крім того,

$$D_\sigma^m \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma) \right) = -c_\nu \int_0^\infty f(a(\xi)) e^{-tf(a(\xi))} \times$$
$$\times D_\sigma^m j_\nu(\sigma\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

Тоді урахувавши нерівність $|D_\sigma^m j_\nu(\sigma\xi)| \le 2A_\nu \xi^m$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\xi \ge 0$, знайдемо, що

$$|D_\sigma^m(\Phi_{\triangle t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma))| \le$$
$$\le \widetilde{c}_\nu \int_0^\infty f(a(\xi)) e^{-tf(a(\xi))} \left| e^{-\theta \triangle t f(a(\xi))} - 1 \right| \times$$

$$\times\xi^{m+2\nu+1}d\xi \le \widetilde{c}_0\theta^2|\triangle t|\int\limits_0^{\infty} f^2(a(\xi))e^{-tf(a(\xi))}\times$$

$$\times\xi^{m+2\nu+1}d\xi \le c_1|\triangle t|, \ \ m\in\mathbb{Z}_+$$

(збіжність останнього інтеграла випливає з умов, які задовольняють функції f та a), сталі $\widetilde{c}_0$, c_1 не залежать від $\triangle t$. Звідси вже дістаємо, що

$$D_\sigma^m\Phi_{\triangle t}(\sigma)\to D_\sigma^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\sigma)\right), \triangle t\to 0,$$

рівномірно по $\sigma\in[a,b]\subset\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Доведемо тепер, що умова 2) також виконується. Використовуючи оцінки функції G по часовому параметру та по змінній σ (див.(8)) знайдемо, що для досить малих значень параметра $\triangle t$ таких, що $t+\theta\triangle t\ge t/2$ справджуються нерівності

$$|D_\sigma^m\Phi_{\triangle t}(\sigma)|\le\widetilde{\alpha}_m(t+\theta\triangle t)^{-(\omega_m+\delta_0 p_0)/\gamma}\times$$

$$\times(1+|\sigma|)^{-(m+\gamma_0)}\le\frac{\widetilde{\alpha}_m}{(t/2)^{(\omega_m+\delta_0 p_0)/\gamma}(1+|\sigma|)^{m+\gamma_0}}.$$

Тоді для довільного $p\in\mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{m=0}^{p}M(\sigma)^{\gamma_0+m}|D_\sigma^m\Phi_{\triangle t}(\sigma)|\right\}\le c_p,$$

де стала c_p залежить від t та ν і не залежить від $\triangle t$.

Теорема доведена.

Наслідок 2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,\cdot)=(f*\frac{\partial}{\partial t}G)(t,\cdot),\forall f\in(\overset{\circ}{\Phi})',$$

$$t\in(0,T^*].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$(f*G)(t,x)=<f_\xi,T_x^\xi G(t,x)>\equiv$$

$$\equiv<f_\xi,T_\xi^x G(t,\xi)>.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,x)=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G)(t+\triangle t,x)-$$

$$-(f*G)(t,x)]=\lim_{\triangle t\to 0}<f_\xi,\frac{1}{\Delta t}\times$$

$$\times\left[T_x^\xi G(t+\triangle t,x)-T_x^\xi G(t,x)\right]>.$$

Внаслідок теореми 3 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\triangle t,x)-T_x^\xi G(t,x)\right]\underset{\triangle t\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\triangle t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_x^\xi G(t,x)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,x)=<f_\xi,\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Bigg[T_x^\xi G(t+\triangle t,x)-$$

$$-T_x^\xi G(t,x)\Bigg]>=<f_\xi,\frac{\partial}{\partial t}T_x^\xi G(t,x)>=$$

$$=<f_\xi,T_x^\xi\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)>=(f*\frac{\partial}{\partial t}G)(t,x).$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Лема 1. *Нехай* $f\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$,

$$\omega(t,x)=(f*G)(t,x), \ \ (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}.$$

Тоді граничне співвідношення $\omega(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, *виконується у просторі* $(\overset{\circ}{\Phi})'$.

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$F_B[\omega](t,\cdot)\longrightarrow F_B[f],t\to+0,$$

виконується у просторі $F\left[(\overset{\circ}{\Phi})'\right]=(\overset{\circ}{\Psi})'$.

Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то

$$F_B[\omega](t,\cdot)=F_B[(f*G)(t,\cdot)]=F_B[f]\cdot F_B[G]=$$

$$=e^{-tf(a(\sigma))}F_B[f], \qquad (9)$$

причому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$. Отже, (9) рівносильне такому граничному співвідношенню: $e^{-tf(a(\sigma))} \to 1$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$, тобто

$$< e^{-tf(a(\cdot))}, \psi >= \int_0^\infty e^{-tf(a(\sigma))}\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma \underset{\triangle t \to +0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\triangle t \to +0}{\longrightarrow} < 1, \psi >= \int_0^\infty \psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \ \ \forall \psi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Останнє ж співвідношення випливає з теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Зауваження 1. *Надалі функцію $G(t,\cdot)$ називатимемо фундаментальним розв'язком задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (2).*

Лема 1 дозволяє ставити задачу Коші для рівняння (2) так. Для (2) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = g, \tag{10}$$

де $g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. **Під розв'язком задачі Коші (2), (10) розумітимемо розв'язок рівняння (2), який задовольняє початкову умову (10) у тому сенсі, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.** Правильним є наступне твердження.

Теорема 4. *Задача Коші (2), (10) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (g*G)(t,x), g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)', t \in (0, T^*],$$
$$x \in (0, +\infty),$$

де G – ФРЗК для рівняння (2).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2). Справді (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(g*G)(t,x) = (g*\frac{\partial}{\partial t}G)(t,x),$$
$$A_f u(t,x) = F_B^{-1}[f(a(\xi))F_B[g*G](\xi)](x).$$

Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то

$$F_B[g*G](\xi) = F_B[g](\xi)\cdot F_B[G](t,\xi) =$$
$$= F_B[g]e^{-tf(a(\xi))}.$$

Отже,

$$A_f u(t,x) = F_B^{-1}\left[f(a(\xi))e^{-tf(a(\xi))}F_B[g](\xi)\right](x) =$$
$$= -F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{-tf(a(\xi))}F_B[g](\xi)\right](x) =$$
$$= -F_B^{-1}\left[F_B\Big[\frac{\partial}{\partial t}G\Big](t,\xi)\cdot F_B[g](\xi)\right](x) =$$
$$= -F_B^{-1}\left[F_B\Big[g*\frac{\partial}{\partial t}G\Big](t,\xi)\right](x) =$$
$$= -\left(g*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x).$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$ задовольняє рівняння (2). З леми 1 випливає, що $u(t,\cdot) \to g$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$, тобто u – розв'язок задачі Коші (2), (10) з початковою умовою $g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Зазначимо також, що u неперервно залежить від початкової функції g, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача Коші (2), (10) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_f^* v = 0, \ \ (t,x) \in [0,t_0)\times(0,\infty) \equiv \Omega'_+,$$
$$0 \le t < t_0 \le T^*, \tag{11}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = g, \ \ g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)', \tag{12}$$

де $A_f^* = A_f$ – звуження спряженого оператора до оператора A_f на простір $\overset{\circ}{\Phi} \subset (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Умова (12) розуміється в слабкому сенсі. Задачу (11), (12) надалі називатимемо спряженою до задачі (2), (10).

Розглянемо функцію

$$G^*(t-t_0, x) = F_B^{-1}[e^{(t-t_0)f(a(\xi))}](x).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено у випадку задачі Коші (2),(10) доводимо, що G^*, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна по t; розв'язок задачі Коші (11), (12) дається формулою

$$v(t,x) = (g * G^*)(t - t_0, x), \ \ (t,x) \in \Omega'_+,$$

при цьому $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$ при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0}$: $(\overset{\circ}{\Phi}_*)' \to \overset{\circ}{\Phi}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ розв'язок задачі (11),(12). Він є лінійним і неперервним. Визначений $Q^t_{t_0}$ для довільних t і t_0 таких, що $0 \leq t < t_0 \leq T^*$ і володіє властивостями:

$$\forall g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)' : \ \ \frac{dQ^t_{t_0} g}{dt} - A^*_f Q^t_{t_0} g = 0,$$

$$\lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0} g = g$$

(границя розглядається у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$).

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задачі Коші (2), (10), який розумітимемо як функціонал з простору $(\overset{\circ}{\Phi})' \supset \overset{\circ}{\Phi}$. Доведемо, що задача Коші (2), (10) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (2) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Зафіксуємо довільним чином t_0, $0 < t_0 \leq T^*$, і застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi$, $0 < t < t_0 \leq T^*$, де ψ – довільний функціонал з простору $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (2), (11) знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} < u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi > = < \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi > +$$

$$+ < u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t} > = - < A_f u, Q^t_{t_0}\psi > +$$

$$+ < u, A^*_f Q^t_{t_0}\psi > = - < A_f u, Q^t_{t_0}\psi > +$$

$$+ < A_f u, Q^t_{t_0}\psi > = 0, \ \ \forall \psi \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'.$$

Звідси випливає, що $< u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi >$ є сталою величиною. Використовуючи початкову умову $u|_{t=0} = 0$ знаходимо, що ця величина при всіх t, $0 < t \leq t_0$, рівна нулю. Зокрема, при $t \to t_0$ (у слабкому розумінні границі) дістаємо, що $< u(t_0,\cdot), \psi > = 0$. Оскільки ψ – довільний елемент з простору $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, а $\overset{\circ}{\Phi} \subset (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то $< u(t_0,\cdot), \psi > = 0$ для всіх ψ з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Отже, $u(t_0,\cdot)$ є нульовим функціоналом. Оскільки $t_0 \in (0, T^*]$ і вибране довільно, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0, T^*]$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами // Доповіді НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11 – 15.

2. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій //Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип. 15. – С. 51 – 56.

3. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6. Вып. 2. – С. 102 – 143.

4. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 336 – 337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 95 – 102.

5. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, N 2. – С. 299 – 310.

6. *Городецький В.В., Ратушняк В.П.* Про один клас псевдодиференціальних операторів нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 239. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 25 – 36.

7. *Ратушняк В.П.* Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку та їх застосування // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 94 – 100.