УДК 517.9:532

©2008 р. М.Ю.Царьков

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглядаються абстрактні параболічні рівняння із змінними коефіцієнтами. Встановлюються результати про існування та єдиність розв'язку.

We consider abstract parabolic equations with variable coefficients. Some results on the existence and uniqueness of solutions are established.

Нехай H – оснащений гільбертовий простір: $W \subset H \subset W'$. Тут W' – простір, спряжений до гільбертового простору W. Простір W вкладений в простір H лінійно, неперервно і щільно, що визначає аналогічне вкладення H в W'. Скалярний добуток (u, v) простору H розширений з $W \times W$ на $W \times W'$ і на $W' \times W$ за неперервністю. Після такого розширення значення функціонала $f \in W'$ на елементі $v \in W$ збігається з (f, v) і, що теж саме, з (v, f). Позначимо через J ізометричний оператор, який діє з простору W в простір W' і визначається співвідношенням $(u, v)_W = (Ju, v)$, $u, v \in W$.

В [1] досліджувалося абстрактне параболічне рівняння

$$v'(t) + Jv(t) = f(t)$$

із сталим операторним коефіцієнтом J. Узагальнюючи ці результати, ми розглядаємо спочатку аналогічне абстрактне параболічне рівняння першого порядку, але із змінним операторним коефіцієнтом, а потім абстрактне параболічне рівняння довільного порядку із змінними операторними коефіцієнтами.

Розглядається рівняння

$$v'(t) + M(t)Jv(t) = f(t), \qquad (1)$$

де шукана функція $v(t)$ визначена на відрізку $[0, T]$ і приймає значення з простору W. Вона має також задовольняти початкову умову

$$v(0) = v_0. \qquad (2)$$

Припускається, що $M(t)$ – неперервна на $[0, T]$ функція, значеннями яких є обмежені додатно визначені оператори в просторі W', а $\mu(t)$ – неперервна на $[0, T]$ функція, яка визначається як нижня межа оператора $M(t)$ для кожного t.

Наведемо означення похідної в розумінні теорії розподілів для функцій із значеннями в банаховому просторі. Нехай E – банаховий простір, а $h(t)$ і $g(t)$ – локально інтегровні на $(0, T)$ функції із значеннями в E. Якщо для довільної нескінченно диференційовної фінітної на $(0, T)$ функції $\varphi(t)$ (пробної функції) виконується рівність

$$\int_0^T h(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt,$$

то $g(t)$ називається похідною $h(t)$ в розумінні теорії розподілів.

Лема. Нехай функція $f(t)$ належить простору $L_2(0, T; W')$, а елемент v_0 належить простору H. Якщо функція $v(t)$ одночасно належить просторам $L_2(0, T; V)$ та $C([0, T]; H)$ і є також розв'язком задачі (1), (2), задовольняючи рівняння (1) в розумінні теорії розподілів, то для неї виконується нерівність

$$||v(t)||_H^2 + \int_0^t \mu(s)||v(s)||_W^2\, ds \le$$

$$\le ||v_0||_H^2 + \int_0^t \frac{1}{\mu(s)}\, ||f(s)||_{W'}^2\, ds. \qquad (3)$$

Доведення. Внаслідок (1) функція $v'(t)$ буде належати простору $L_2(0, T; W')$. Використовуючи продовження скалярного добутку простору H, домножимо (1) при $t = s$ скалярно на $v(s)$. За лемою із [1], стор. 209 результат можна записати так:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}||v(s)||_H^2 + (M(s)Jv(s), v(s)) =$$

$$= (f(s), v(s))$$

(похідна обчислюється в розумінні теорії розподілів). Помноживши цю рівність на 2, інтегруємо по відрізку $[0, t]$:

$$||v(t)||_H^2 + 2\int_0^t (M(s)Jv(s), v(s))ds =$$

$$= ||v_0||_H^2 + 2\int_0^t (f(s), v(s))ds.$$

Використовуючи нерівність

$$(M(s)Jv(s), v(s)) = (M(s)Jv(s), Jv(s))_{W'} \geq$$

$$\geq \mu(s)||v(s)||_W^2 \ ,$$

оцінюємо інтеграл в лівій частині рівності знизу. Нарешті, одержуємо потрібну нерівність, оцінюючи інтеграл в правій частині рівності зверху за нерівністю Коші-Буняковського. Лема доведена.

При доведенні наступної тереми скористаємося таким зауваженням. Нехай L – скінченновимірний підпростір простору W. Нехай P – ортопроектор на L в просторі H. Розглядаючи P як оператор з H в W, будемо мати, що його спряжений P' діє з W' в H і задовольняє тотожність

$$(Pu, f) = (u, P'f), \quad u \in W, \quad f \in W'.$$

З цієї тотожності випливає, що P' є розширенням оператора P, також є проектором на L з ядром $\{f \in W' \mid (f, u) = 0,\ u \in L\}$.

Теорема 1. Нехай функція $f(t)$ належить простору $L_2(0, T;\, W')$, а елемент v_0 належить простору H. Тоді існує одна й тільки одна функція $v(t)$, яка одночасно належить просторам $L_2(0, T; V)$ та $C([0, T]; H)$, задовольняє рівняння (1) в розумінні теорії розподілів і задовольняє умову (2).

Доведення. Єдиність випливає з леми. Доведемо існування розв'язку, використовуючи, як це зроблено в [1], метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай L_m – послідовність скінченновимірних підпросторів простору W, яка зростає по включенню і така, що об'єднання цих підпросторів є щільною множиною в W. Через P_m позначимо відповідний ортопроектор в просторі H. Для кожного m визначимо на $[0, T]$ функцію $v_m(t)$ із значеннями в L_m як розв'язок задачі

$$v_m'(t) + P_m'\, M(t)Jv_m(t) = P_m'\, f(t), \qquad (4)$$

$$v_m(0) = P_m\, v_0. \qquad (5)$$

Задача (4), (5) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь (див. [1]), тому за відомою теоремою вона має тільки один розв'язок. Міркуючи як при доведенні леми і враховуючи, що $P_m\, v_m(t) = v_m(t)$, одержуємо нерівність

$$||v_m(t)||_H^2 + \int_0^t \mu(s)||v_m(s)||_W^2\, ds \leq$$

$$\leq ||v_0||_H^2 + \int_0^t \frac{1}{\mu(s)}\, ||f(s)||_{W'}^2\, ds.$$

З цієї нерівності випливає обмеженість послідовності $v_m(t)$ в просторах $L_2(0, T; V)$ та $C([0, T]; H)$. Тому вона має підпослідовність, яка збігається в слабкій топології простору $L_2(0, T; V)$ і $*$-слабкій топології простору $L_\infty(0, T; H)$ (див. [1]). Збережемо позначення $v_m(t)$ для цієї підпослідовності, а границю позначемо $v(t)$. Покажемо, що $v(t)$ задовольняє рівняння (1). Для $m > n$ помножимо рівняння (4) на елемент $w \in L_n$ скалярно в просторі H. Результат запишемо у вигляді

$$(v_m'(t), w) + (v_m(t), J^{-1}M(t)Jw)_W =$$

$$= (f(t), w). \qquad (6)$$

Цю рівність помножимо на функцію $\varphi(t)$, нескінченно диференційовану і фінітну на $(0, T)$ (тобто пробну функцію), а одержану тотожність проінтегруємо по відрізку $[0, T]$. Після інтегрування частинами одержуємо рівність

$$-\int_0^T (v_m(t), \varphi'(t)w)dt+$$

$$+\int_0^T (v_m(t), \varphi(t)J^{-1}M(t)Jw)_V dt =$$

$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t)w)dt,$$

в якій легко переходимо до границі, коли m прямує до нескінченності. Результат можна записати у вигляді:

$$-\int_0^T (v(t), w)\varphi'(t)dt+$$

$$+\int_0^T (M(t)Jv(t), w)\varphi(t)dt =$$

$$= \int_0^T (f(t), w)\varphi(t)dt$$

для $w \in L_n$. Оскільки об'єднання підпросторів L_n є щільним в W, ця рівність виконується для всіх w з W. Таким чином, в розумінні теорії розподілів для всіх w з W маємо рівність

$$\frac{d}{dt}(v(t), w) + (M(t)Jv(t), w) = (f(t), w).$$

За лемою з [1] (стор. 201) це означає, що $v(t)$ задовольняє (1) в розумінні теорії розподілів. З (1) випливає, що $v'(t)$ належить простору $L_2(0, T;\, W')$. Разом з належністю $v(t)$ до простору $L_2(0, T;\, W)$ згідно з інтерполяційною теоремою Ліонса-Мадженеса це дає неперервність $v(t)$ на $[0, T]$ як функції із значеннями в H. Далі, міркуючи як в [1] (стор. 209), одержуємо, що задовольняється також початкова умова (2). Теорема доведена.

Тепер розглянемо рівняння

$$u^{(n)}(t) + M(t)Ju^{(n-1)}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n} A_j(t)u^{(n-j)}(t) = f(t), \tag{7}$$

де шукана функція визначена на відрізку $[0, T]$ і приймає значення з простору W. Вона має також задовольняти початкові умови

$$u^{(j)}(0) = u_j,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Припускається, що $M(t)$, $A_j(t), j = 1, \ldots, n$, – неперервні на $[0, T]$ функції, значеннями яких є лінійні та неперервні оператори. При фіксованому t оператор $M(t)$ є неперервним додатно визначеним оператором в W', оператор $A_1(t)$ лінійно та неперервно діє з H в W', оператори $A_j(t)$, $j = 2, \ldots, n$, аналогічно діють з W в W'.

Для $n = 2$ і $M(t) = \mu(t)I$ ця задача розглядалася в [2] (тут I – одиничний оператор, а $\mu(t)$ – скалярна функція).

Теорема 2. Нехай функція $f(t)$ належить простору $L_2(0, T; W')$, елемент u_{n-1} належить H, а елементи u_0, $\ldots$, u_{n-2} належать W. Тоді існує одна й тільки одна визначена на $[0,\, T]$ функція $u(t)$, яка

1) має неперервні на $[0,\, T]$ похідні до порядку $n-2$ як функція із значеннями у просторі W,

2) має неперервну на $[0,\, T]$ похідну порядка $n-1$ як функція із значеннями у просторі H,

3) має узагальнену похідну порядку $n-1$ з простору $L_2(0, T; W)$,

4) задовольняє рівняння (7) в розумінні теорії розподілів і задовольняє початкові умови (8).

Доведення. Розв'язок $u(t)$ шукатимемо у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(t). \tag{9}$$

Функція $w_0(t)$ визначається як розв'язок задачі

$$w_0^{(n)}(t) + M(t)Jw_0^{(n-1)}(t) = f(t) \tag{10}$$

$$w_0^{(i)}(0) = u_i, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Згідно з теоремою 1 розв'язок існує і є єдиним. Справді, після заміни $v(t) = w_0^{(n-1)}(t)$ рівняння (7) набуває вигляду (1). Якщо $v(t)$ визначити як розв'язок (1), який задовольняє початкову умову $v(0) = u_{n-1}$, то розв'язок задачі (10), (11) знайдемо інтегруючи $v(t)$ і враховуючи при цьому початкові умови (11).

Далі послідовно визначаємо інші доданки ряду (9) як розв'язки задач

$$w_{k+1}^{(n)}(t) + M(t)Jw_{k+1}^{(n-1)}(t) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} A_j(t) w_k^{(n-j)}(t) \qquad (12)$$

$$w_{k+1}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1. \qquad (13)$$

Розв'язки існують, що випливає з теореми 1.

Нехай b – мінімум $\mu(t)$, а a_j – максимум $||A_j(t)||$. Введемо позначення

$$h_k(t) = ||w_0^{(k-1)}(t)||_H^2 + b\int_0^t ||w_0^{(k-1)}(s)||_W^2 ds.$$

Використовуючи оцінку (3) матимемо, що

$$h_{k+1}(t) \le \frac{1}{b}\int_0^t ||\sum_{j=1}^{n} A_j(s) w_k^{(n-j)}(s)||_{W'}^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{b}\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{n} a_j ||w_k^{(n-j)}(s)||_W\right)^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{b}\int_0^t \left(a_1 \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{h_k(s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{j=2}^{n} \frac{a_j\, s^{(2j-3)}}{(j-2)!(2j-3)}\sqrt{h_k(s)}\right)^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{b^2}\left(a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j\, T^{(2j-3)}}{(j-2)!(2j-3)}\right)^2 \int_0^t h_k(s) ds.$$

Якщо позначити через C сталий множник перед інтегралом, то дістанемо нерівність

$$h_{k+1}(t) \le C\int_0^t h_k(s) ds. \qquad (14)$$

Якщо m – максимум функції $h_0(t)$, то методом математичної індукції звідси одержуємо оцінку

$$h_k(t) \le \frac{C^k T^k m}{k!},$$

яка забезпечує збіжність ряду $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k^{(n-1)}(t)$ в просторах $L_2(0,T;V)$ та $C([0,T];H)$. Тому ряд (9) та його похідні до порядку $n-2$ збігаються в просторі $C([0,T];W)$. Для суми ряду (9) виконуються всі твердження теореми, зокрема виконання (7) та (8) перевіряється безпосередньою підстановкою.

Для встановлення єдиності розв'язку розглядаємо задачу (7), (8) з нульовими початковими умовами і нульовою правою частиною рівняння (7). Якщо $u(t)$ є розв'язком цієї задачі, то

$$u^{(n)}(t) + M(t)Ju^{(n-1)}(t) = -\sum_{j=1}^{n} A_j(t) u^{(n-j)}(t),$$

$$u^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Аналогічно з попереднім введемо функцію $h(t)$, яка відповідає $u(t)$. Так само, як з (12) і (13) отримано (14), з останніх рівностей одержується оцінка

$$h(t) \le C\int_0^t h(s) ds,$$

з якої випливає, що $h(t)$ – нульова функція. Тоді і $u(t)$ нульова і єдиність доведена. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

2. *Царьков М.Ю.* О разрешимости возмущенного абстрактного параболического уравнения // Труды математического факультета. Симферополь, СГУ.— 1997.—С.103—106.

3. *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь у комплексних інтерполяційних шкалах // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика.—2004.— **Вип. 191—192**.—С.89—94.