УДК 519.21

©2008 р. Є.Ф.Царков, І.В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОВЕДІНКА В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО – ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу в скалярному випадку.

We obtain necessary and sufficient conditions for the exponential stability in the square mean of a solution to a linear stochastic differential-functional equation of neutral type in the scalar case.

Постановка задачі

Питанню стійкості за Ляпуновим розв'язків детермінованих диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (ДДФРНТ) присвячено достатньо велика кількість робіт, серед яких особливе місце займають праці наукових шкіл Хейла Дж. [15], Азбелєва Н.В. [1], Каменського М.И. [2], Хусаинова Д.Я. [13], Слюсарчука В.Ю. [9].

У роботах Колмановського В.Б. і Носова В.Р. [8], Царкова Є.Ф. [14], Хусаинова Д.Я. [13] та їхніх учнів вивчалися питання поведінки розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (СДФРНТ) за умови, що розв'язки відповідного ДДФРНТ стійкі за Ляпуновим. Питанню існування сильного розв'язку СДФРНТ та узагальненню другого методу Ляпунова присвячено роботи Колмановського В.Б. і Шайхета Л.И. [2], Берези В.Ю, Ясинського В.К. [7] та інших.

Нехай на ймовірнісному базисі [7] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ - фільтрація, задано сильний розв'язок [2], [7] $x(t) = x(t,\omega) \in R^1$ лінійного стохастичного диференціально – функціонального рівняння нейтрального типу (ЛСДРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}\, dt + \{Gx_t\}\, dw(t). \qquad (1)$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi, \qquad (2)$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leq s \leq 0\} \in \mathbb{C}([-h,0])$; $\varphi \in C([-h,0])$ - F_0 - вимірний випадковий процес; $w(t) = w(t,\omega)$ - одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$, D, L, G - функціонали, що задані на просторі співвідношеннями [4], [15] для $\psi \in C([-h,0])$

$$D\psi \equiv \int_{-h}^{0} \psi(t)dr_1(t);$$
$$L\psi \equiv \int_{-h}^{0} \psi(t)dr_2(t); \qquad (3)$$
$$G\psi \equiv \int_{-h}^{0} \psi(t)dr_3(t)$$

де $r_i(t)$, $i = 1,2,3$ - функції обмеженої варіації на відрізку $[-h,0]$.

Для лінійного СДФРНТ (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$ [5] для якого існує $E\{x^2(t)\} < \infty$.

Формула Коші для ЛСДФРНТ

Поряд з рівнянням (1) розглянемо детерміноване диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу [1], [15]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}\, dt. \qquad (4)$$

за початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \ \ -h \le t \le 0. \qquad (5)$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [15] як розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) := \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, -h \le t < 0; \\ 1, t = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Припустимо, що тривіальний розв'язок рівняння (4) експоненціально стійкий, тобто $\forall t \ge 0$ існують константи $M > 0$ та $c > 0$, такі, що

$$E\left|y(t)\right|^2 \le Me^{-ct}E\left\|\varphi\right\|^2, \qquad (7)$$

де $\|\varphi\| \equiv \max\limits_{-h \le t \le 0} |\varphi(t)|$.

Тоді має місце твердження.

Теорема 1. *Розв'язок ЛСДФРНТ* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dw(s). \qquad (8)$$

де $y(t)$*- розв'язок* (4), (2).

Доведення. Враховуючи лінійність функціонального оператора нейтральності D, отримаємо

$$Dx_t = Dy_t + \int_0^t DX_{t-s}Gx_s dw(s), \qquad (9)$$

Підставимо (9) в (4) і, врахувавши лінійність функціонального оператора L, отримаємо
$dDx_t = dDy_t + d\int_0^t DX_{t-s}Gx_s dw(s) = Ly_t dt + DX_0 Gx_t dw(t) + \int_0^t d_t DX_{t-s}Gx_s dw(s) = Ly_t dt + Gx_t dw(t) + \int_0^t (LX_{t-s}dt)Gx_s dw(s) = Ly_t dt + Gx_t dw(t) + L\{\int_0^t X(t-s)dtGx_s dw(s)\}dt = L\{y_t + \int_0^t X(t-s)dtGx_s dw(s)\}dt + Gx_t dw(t) = Lx_t dt + Gx_t dw(t)$.

Тут перестановка функціонала L з операцією інтегрування обґрунтована за конструкцією лінійного оператора L. Таким чином, випадковий процес, який задано (8), задовольняє ЛСДФРНТ. Теорема 1 доведена.

Асимптотична стійкість розв'язків ЛСДФРНТ

Дамо означення стійкості в середньому квадратичному розв'язку ЛСДФРНТ (1), (2).

Означення 1. Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) назвемо стійким в середньому квадратичному, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$, таке, що $\forall t\,[0,T]$ і $\varphi \in ([-h,0])$

$$E\left|x(t)\right|^2 \le \varepsilon, \qquad (10)$$

якщо

$$E\left\|\varphi\right\| < \delta,$$

де $E\{\bullet\}$ - операція математичного сподівання.

Означення 2. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ СДРРНТ (1), (2) називається асимптотично стійким в середньому квадратичному, якщо він є стійким в термінах означення 1 і

$$\lim_{t\to\infty} E\left|x(t)\right|^2 \to 0.$$

Для наступного означення потрібно ввести поняття рівномірної асимптотичної стійкості [15]. Нехай початкова умова для рівняння (1) має вигляд

$$x_\sigma \equiv x(\sigma + \theta) = \varphi, \qquad (11)$$

де $\sigma \in R^1$.

Означення 3. Тривіальний розв'язок задачі (1), (11) називається асимптотично стійким рівномірно по $\sigma \in R^1$, якщо він є асимптотично стійким в термінах означення 2 для $\forall\sigma \in R^1$.

Зауважимо, що надалі умову (7) можна замінити на більш сильну умову. А саме можна припускати, що розв'язок рівняння (4) є рівномірно асимптотично стійким.

Лема [15]. *Якщо тривіальний розв'язок рівняння* (4) *рівномірно асимптотично стійкий, то він є експоненціально стійкий, і розв'язок задачі* (4), (6) *задовольняє нерівності для* $K >$, $\rho > 0$*:*

$$|X(t)| \le Ke^{-\rho t}, \underset{[t-h,t]}{Var} X \le Ke^{-\rho t}.$$

Для одержання необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ ЛСДФРНТ (1), (2) введемо наступні позначення і пов'язані з ними твердження.

Використовуючи інтегральне представлення (7) сильного розв'язку (1), запишемо інтегральне рівняння Вольтерри нейтрального типу для випадкового процесу $\gamma(t) \equiv Gx_t$:

$$\gamma(t) = Gy_t + \int_0^t H(t-s)\gamma(t)dw(s), \tag{12}$$

де

$$H(t) \equiv GX_t, \tag{13}$$

Введемо наступні позначення

$$M(t,\varphi) \equiv E\{|x(t)|^2/F_0\} = E\{|x(t)|^2\},$$

$$\Gamma(t,\varphi) \equiv E\{|\gamma(t)|^2/F_0\} = E\{|\gamma(t)|^2\}.$$

Тут умовні математичні сподівання рівні звичайним в силу незалежності випадкових процесів $x(t)$ і $\gamma(t)$ від початкової σ - алгебри F_0 [7].

Далі піднесемо до квадрату інтегральне представлення (7) сильного розв'язку ЛСДФРНТ, обчислимо математичне сподівання і, враховуючи рівність 0 математичного сподівання від інтеграла Вінера-Іто і рівність математичного сподівання від квадрату інтеграла Вінера-Іто звичайному інтегралу Рімана [7], одержимо рівняння для другого моменту $M(t,\varphi)$ вигляду

$$M(t,\varphi) = |y(t)|^2 + \int_0^t |X(t-s)|^2\, \Gamma(s,\varphi)ds. \tag{14}$$

Аналогічно матимемо

$$\Gamma(t,\varphi) = |Gy_t|^2 + \int_0^t |H(t-s)|^2\, \Gamma(s,\varphi)ds. \tag{15}$$

Доведемо допоміжні твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умова* (7), *тобто розв'язок* (4) *експоненціально стійкий. Тоді розв'язок інтегрального рівняння* (16) *задовольняє умову:*

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \forall \varphi \in C\left([-h,0]\right):$$

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{tC_2} < C_1 \left\|\varphi\right\|^2. \tag{16}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$B = \int_0^\infty |H(t)|^2\, dt < 1. \tag{17}$$

Доведення. За умови (7) існує константи $M > 0$, така що

$$|H(t)| \le Me^{-\rho t}, |Gy_t| \le Me^{-\rho t}\left\|\varphi\right\| \tag{18}$$

для $\forall \varphi \in C\left([-h,0]\right)$. Значить можна застосувати перетворення Лапласа [6] до (15) і отримати рівняння для зображення

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt = \int_0^\infty |Gy_t|^2\, e^{-zt}dt +$$

$$+\int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{-zt}ds \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt, \tag{19}$$

яке еквівалентне рівнянню

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty |Gy_t|^2\, e^{-\lambda t}dt \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{-\lambda t}dt\right)^{-1}. \tag{20}$$

для достатньо великого $Re\lambda > 0$. Не втрачаючи загальності візьмемо $Im\lambda = 0$. Зауважимо, що функція $R(z) = \int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{-zt}dt$ як функція від $z \in R$ є неперервною функцією, а також $|R(z)|$ є спадною функцією на $(-\rho, \infty)$ при $Imz = 0$.

Достатність. Нехай виконується (17). Значить $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{zt}dt < 1$ де $z \in [-\varepsilon, \infty)$. Тоді для $z \in [-\varepsilon, \infty)$ виконується нерівність

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt < \int_0^\infty |Gy_t|^2\, e^{-zt}dt \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{\varepsilon t}dt\right)^{-1} \le \int_0^\infty |Gy_t|^2\, e^{\varepsilon t}dt \times$$

$$\times \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{\varepsilon t}dt\right)^{-1} \le$$

$$\le M^2 \left\|\varphi\right\|^2 (\rho - \varepsilon)^{-1} \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2\, e^{\varepsilon t}dt\right)^{-1}. \tag{21}$$

Якщо в нерівності (21) покласти $C_2 = \varepsilon$ і $C_1 = M^2 (\rho - \varepsilon)^{-1} \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\varepsilon t} dt\right)^{-1}$, то одержимо з (21) умову (16).

Необхідність. Нехай виконується (16) та $Imz = 0$, тобто

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \forall \varphi \in C([-h, 0]) :$$

$$\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{tC_2} < C_1 \|\varphi\|^2 .$$

Це означає, що $\forall s \in (-\infty, C_2)$: $\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{ts} dt < C_1 \|\varphi\|^2$. Це означає, що функція $\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{ts} dt$ є аналітичною функцією при $s \in (-\infty, C_2)$, тобто не має полюсів при $s \in (-\infty, C_2)$. Тоді використовуючи представлення (20), робимо висновок про те, що функція $1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{st} dt$ не має нулів при $s \in (-\infty, C_2)$. Тобто

$$\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{C_2 t} dt < 1.$$

Якщо ж врахувати те, що функція $\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{C_2 t} dt$ є не зростаючою, робимо висновок про те, що виконується (17). Теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Нехай виконується умови (7) для коефіцієнтів ЛДФРНТ (4), (5) та (4), (6).*

1. Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку (1), (2) є виконання умови

$$r(B) < 1, \tag{22}$$

де $r(A)$ – спектральний радіус матриці A, оператор B задано формулою (17).

2. Якщо $r(B) > 1$, то в будь-якому околі нуля знайдеться початкова функція $\varphi(t)$ така, що

$$\lim_{t\to\infty} M\left\{|x(t)|^2\right\} = \infty. \tag{23}$$

Доведення. 1. Достатність. Нехай виконується (22), а значить виконується (18). Умова (7) гарантує [15] існування деякої сталої $M_2 > 0$ та $c_2 > 0$ таких, що

$$|Gy_t|^2 e^{tc_2} \le M_2 \|\varphi\|^2 , |y(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2 \|\varphi\|^2 ,$$

$$|X(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2 \quad \text{і} \quad |H(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2 \tag{24}$$

для довільного $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Зауважимо, сталу $c_2 > 0$ для виконання оцінок (24) слід вибирати як у теоремі 2.

Далі за виконання нерівностей (24) очевидна оцінка для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$

$$\Gamma(t, \varphi) e^{tc_2} = |Gy_t|^2 e^{tc_2} +$$

$$+ \int_0^t |H(t-s)|^2 e^{(t-s)c_2} e^{sc_2} \Gamma(s, \varphi) ds \le$$

$$\le M_2 \|\varphi\|^2 + M_2 \int_0^t e^{sc_2} \Gamma(s, \varphi) ds \le$$

$$\le M_2 (1 + c_1) \|\varphi\|^2 . \tag{25}$$

де c_1 визначена в доведенні теореми 2.

Тоді з врахуванням одержаних нерівностей (24), (25) легко виписати оцінку для $M(t, \varphi)$, що задовольняє рівняння (15), а саме

$M(t, \varphi) \le M_2 (1 + c_1) \|\varphi\|^2 e^{-tc_2}$. для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Це гарантує виконання умови (10) експоненціальної стійкості. Достатність доведено.

Необхідність. При виконанні умови (7) нехай розв'язок $x(t) \equiv 0$ експоненціально стійкий, тобто $E|x(t)|^2 \le Me^{-ct} E\|\varphi\|^2$ для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$, де $M > 0$ та $c > 0$. Тоді матимемо

$$\Gamma(t, \varphi) = E\left\{ \ |Gx_t|^2 \right\} \le \max_{-h \le \theta \le 0} E\left\{|x(t+\theta)|^2\right\} \times$$

$$\times \left(\mathop{Var}_{-h \le t \le 0} r_3 \right)^2 \le Ke^{-ct} E\|\varphi\| ,$$

де $K > 0$ - деяка константа.

А значить можна підібрати сталу $A_1 > 0$ та c таку, що

$$\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{tc} dt < c_1 \|\varphi\| .$$

Залишилось використати теорему 3.1., що дає нерівність (22), якщо врахувати рівність (24) леми 3.1.

Доведення 2. З рівності (21) отримуємо, що полюси $\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{-\lambda t} dt$ збігаються з нулями $\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds\right)$. $\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds$ - неперервна спадна функція дійсного аргументу λ , така що $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds = 0$.

Отож, оскільки виконується (23), то знайдеться $\lambda_0 > 0$, таке що $\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds\right) = 0$. А це означає, що функція $\int_0^\infty \Gamma(t, \varphi) e^{-\lambda t} dt$ має полюс при $\lambda = \lambda_0 > 0$. Це ж в свою чергу означає, що $\lim\limits_{t \to \infty} \Gamma(t, \varphi) = \lim\limits_{t \to \infty} e^{\lambda_0 t} = \infty$, що і доводить (23). Теорема 3.2 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально – дифференциальных уравнений. – М.:Наука, 1991. – 280 с.

2. *Андреева Е.А., Шайхет Л.Е., Колмановский В.Б.* Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 333 с.

3. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа// Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1981. – Т.19. – С.55 – 126.

4. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально – разностные уралвнения – М.: Мир, 1967. – 545 с.

5. *Береза В.Ю, Ясинський В.К.* Про існування розв'язків стохастичних диференціально – функціональних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями// Вісник Київського університету. Серія: Фізико – математичні науки. – Київ: КНУ, 2002. – Вип. 5. – С. 19 – 27.

6. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

7. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – М:Физматизд, 1994. - Т.2 – 473 с.

8. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с послидействием. – М.: Наука, 1981. – 448с.

9. *Слюсарчук В.Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією: Монографія. – Рівне: Вид – во УДУВГП, 2003. – 288с

10. *Снекторский И.Я.* Обобщенные формулы вариации постоянной линейного неоднородного стохастического уравнения// Проблемы управления и информатики. – 1998, №5. – С. 107 – 112.

11. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир,1996. – 655 с.

12. *Хусаинов Д.Я.* Оценки решений линейных дифференцыально – функциональных уравнений нейтрального типа// Укр. мат. журн. – 1991. – Е.43,№9. С.1123 – 1135.

13. *Хусаинов Д.Я, Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально – функциональных систем. – Киев: Изд – во. КНУ,1997. – 236 с.

14. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально – функциональных уравнений . – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

15. *Hale. J.* Theory of Functional Differential Equations (Springer, 1978).

16. *Gihman I.I., Skorohod A.V.* Stochastic Differential Equations (Springer, 1972).