УДК 517.929.7

©2008 р. М.П. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ З ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку двоточкової крайової задачі з двома параметрами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом.

We investigate the question of the existence and approximate construction of a solution of a two-point boundary value problem for a differential equations system with a transformed argument and two parameters, using the numerical-analytical method.

Чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка є ефективним та універсальним методом дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 2]. На жаль, для рівнянь з відхиленим аргументом він поки-що не знайшов такого ж широкого застосування [3]. Відзначимо в цьому напрямку праці [1, 4] та [5, 6], де розглянуто деякі крайові задачі відповідно для систем із постійним запізненням та диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

У даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \qquad (1)$$

де $t \in [0,T]$; $x, f \in R^n$, $n \geq 3$; $\lambda : [0,T] \to \to [0,T]$ – довільне неперервне відображення. Функція $f(t,x,y)$ вважається неперервною по t,x,y в області $G = [0,T] \times D \times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n.

Припустимо також, що функція $f(t,x,y)$ в області G обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, та задовольняє умову Ліпшіца по x,y з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n}\}$:

$$|f(t,x,y)| \leq M, \qquad (2)$$

$$|f(t,\overline{x},\overline{y}) - f(t,\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})| \leq K(|\overline{x}-\overline{\overline{x}}| + |\overline{y}-\overline{\overline{y}}|), \qquad (3)$$

де $|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|, \ldots, |f_n(t,x,y)|)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Відзначимо, що у працях [7-10] для системи (1) обгрунтовано схеми чисельно-аналітичного методу у випадках відповідно багатоточкових, інтегральних, двоточкових із лінійним та нелінійним входженнями параметра крайових умов.

Розглянемо для системи (1) двоточкові крайові умови з лінійним входженням двох параметрів вигляду

$$\mu_1 Ax(0) + \mu_2 Bx(T) = d, \qquad (4)$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \qquad (5)$$

де μ_1 і μ_2 – невідомі скалярні параметри, A і B – сталі $n \times n$ матриці, $\det B \neq 0$, d – відомий сталий n-вимірний вектор, $d \neq 0$, x_1 і x_2 – відповідно перша та друга координати вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, x_{01} і x_{02} – задані значення.

Зауважимо, що для системи звичайних диференціальних рівнянь крайові умови вигляду (4), (5) розглядалися в [2].

Задача полягає у відшуканні неперервно диференційовного на відрізку $[0,T]$ розв'язку $x = x^*(t)$ системи (1) і таких значень параметрів $\mu_1 = \mu_1^*$, $\mu_2 = \mu_2^*$, щоб трійка $(x^*(t), \mu_1^*, \mu_2^*)$ задовольняла умови (4), (5).

Позначимо через D_β множину точок $x_0 = = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$, що містяться разом зі своїм β-околом в області D при всіх значеннях параметрів μ_1 і μ_2 із відповідно деяких областей $I_1 = [\mu_1^{'}, \mu_1^{''}]$, $I_2 = [\mu_2^{'}, \mu_2^{''}]$, $\mu_2^{'} > 0$, де

$$\beta = \frac{T}{2} M + \left| \frac{1}{\mu_2} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right] \right|.$$

Розумітимемо також надалі під $D^{'}$ множину векторів $y_0 = (x_{03}, \ldots, x_{0n}) \in R^{n-2}$, таких, що $x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$ належить D_β.

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \tag{6}$$

і найбільше власне значення $\nu_{\max}(Q)$ матриці $Q = TK$ не перевищує одиниці

$$\nu_{\max}(Q) < 1. \tag{7}$$

Для компактності подальших записів позначимо $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $I = I_1 \times I_2$.

Розглянемо послідовність функцій, що визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_m(t, y_0, \mu) = x_0 +$$
$$+ Lf(t, x_{m-1}(t, y_0, \mu), x_{m-1}(\lambda(t), y_0, \mu)) +$$
$$+ \frac{t}{\mu_2 T} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right],$$
$$m = 1, 2, ...,$$
$$x_0(t, y_0, \mu) = x_0 \in D_\beta, \tag{8}$$

де перші дві компоненти вектора x_0 задаються згідно з (5), а оператор L діє на неперервну при $t \in [0, T]$ функцію $g(t)$ наступним чином

$$Lg(t) \equiv \int_0^t \left[g(z) - \frac{1}{T} \int_0^T g(s) ds \right] dz.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що всі функції $x_m(t, y_0, \mu)$ задовольняють крайові умови (4), (5) для довільних $y_0 \in D^{'}$, $\mu \in I$.

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2), (3), (6), (7). Тоді послідовність функцій $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8), які для довільних $y_0 \in D^{'}$, $\mu \in I$ задовольняють крайові умови (4), (5), рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times D^{'} \times I$ до граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$, яка задовольняє крайові умови (4), (5) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + Lf(t, x(t), x(\lambda(t))) +$$
$$+ \frac{t}{\mu_2 T} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right], \tag{9}$$

який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$. Крім цього, $x^*(t, y_0, \mu)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))) + \Delta(y_0, \mu),$$
$$\mu_1 A x(0) + \mu_2 B x(T) = d,$$
$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \tag{10}$$

де

$$\Delta(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu_2 T} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right] -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t), x(\lambda(t))) dt.$$

Для відхилення $x^*(t, y_0, \mu)$ від $x_m(t, y_0, \mu)$ при всіх $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times D^{'} \times I$ і $m = 1, 2, ...$ вірна оцінка

$$|x^*(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq W_m(y_0, \mu), \tag{11}$$

де $W_m(y_0, \mu) \equiv Q^m (E - Q)^{-1} \beta$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною.

Встановимо спочатку, що при $(y_0, \mu) \in \in D^{'} \times I$ всі функції $x_m(t, y_0, \mu) \in D$. На підставі (8) із врахуванням (2) та леми 2.1 [2] знаходимо

$$|x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq 2t \left(1 - \frac{t}{T} \right) M +$$
$$+ \left| \frac{1}{\mu_2} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right] \right| \leq$$
$$\leq \beta. \tag{12}$$

Тому $x_1(t, y_0, \mu) \in D$, як тільки $(y_0, \mu) \in \in D^{'} \times I$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, ...$, $t \in [0, T]$ і будь-яких

$(y_0, \mu) \in D' \times I$ функції $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) не виходять за межі області D.

Покладаючи

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) = |x_{m+1}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)|,$$

на підставі (8) із врахуванням (3) отримуємо

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq$$

$$\leq K \left[(1 - \frac{t}{T}) \int_0^t \omega_m(s, y_0, \mu) ds + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T} \int_t^T \omega_m(s, y_0, \mu) ds \right], \qquad (13)$$

де

$$\omega_m(s, y_0, \mu) = r_m(s, y_0, \mu) + r_m(\lambda(s), y_0, \mu).$$

Згідно з (12),

$$r_1(t, y_0, \mu) = |x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq \beta,$$

тому із (13) при $m = 1$ знаходимо

$$r_2(t, y_0, \mu) \leq 2K\beta \cdot 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right) \leq Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times D' \times I$

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність

$$|x_{m+j}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta. \qquad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \to \infty} Q^m = 0, \qquad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \qquad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times D' \times I$ і

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, y_0, \mu) = x^*(t, y_0, \mu). \qquad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t, y_0, \mu)$ задовольняють крайові умови (4), (5), то й гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ для довільних $(y_0, \mu) \in D' \times I$ також їх задовольняє. При $j \to \infty$ із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх $m = 1, 2, \ldots$, $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times D' \times I$ отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із врахуванням (16) у (8) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, y_0, \mu)$ є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$. Отже, гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну методику [2], легко обгрунтовуються наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови, щоб гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ послідовності (8) була розв'язком задачі (1), (4), (5), дає наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t)))$, $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$, був одночасно і розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), необхідно і досить, щоб пара (y_0, μ) була розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(y_0, \mu) = 0, \qquad (17)$$

де

$$\Delta(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu_2 T} \left[B^{-1} d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E) x_0 \right] -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, y_0, \mu), x^*(\lambda(t), y_0, \mu)) dt.$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$ і для всіх $m = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$ крайової задачі (1), (4), (5) від її наближеного розв'язку $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) вірна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (4), (5):

а) при $(y_0, \mu) \in D' \times I$ згідно з (8) будуємо послідовність функцій $x_m(t, y_0, \mu)$, залежну від y_0 та μ як від параметрів;

б) знаходимо її граничну функцію $x^*(t, y_0, \mu)$;

в) знаходимо розв'язок $y_0 = y_0^*$, $\mu = \mu^*$ визначального рівняння (17);

г) знаходимо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t)))$, $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t, y_0^*, \mu^*)$ послідовності $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(y_0^*, \mu^*)$, можна взяти функцію $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$ вигляду (8).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, y_0, \mu)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (4), (5) не за граничною функцією $x^*(t, y_0, \mu)$, а за її m-тим наближенням $x_m(t, y_0, \mu)$.

Тому розглянемо наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(y_0, \mu) = 0, \tag{18}$$

де

$$\Delta_m(y_0, \mu) = \\ = \frac{1}{\mu_2 T}\left[B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1} A + \mu_2 E)x_0\right] - \\ -\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, x_m(t, y_0, \mu), x_m(\lambda(t), y_0, \mu))dt,$$

яке відрізняється від точного лише тим, що замість граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$ фігурує її m-те наближення $x_m(t, y_0, \mu)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (4), (5) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D'' \times I' \subset D' \times I$, в якій наближене визначальне рівняння (18) має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $(y_0, \mu) = (y_{0m}, \mu_m)$ ненульового індексу;

2) на межі S області $D'' \times I'$ виконується нерівність

$$\inf_{(y_0,\mu)\in S} |\Delta_m(y_0, \mu)| > 2KW_m(y_0, \mu).$$

Тоді крайова задача (1), (4), (5) має розв'язок $(x^*(t), \mu^*)$, $\mu^* \in I'$, початкове значення $x^*(0) = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$ якого таке, що $y_0^* \in D''$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук. думка, 1985. — 224 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.

3. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 7. — С. 960-979.

4. *Янчук С.В.* Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1997. — 111 с.

5. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. — 1990. — **145**. — P. 255-269.

6. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, N 1. — С. 128-132.

7. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 11. — С. 1581-1585.

8. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2001. — Вип.7. — С. 243-250.

9. *Філіпчук М.П.* Крайова задача з параметром для системи із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 150. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С. 103-106.

10. *Філіпчук М.П.* Задача з нефіксованою правою межею для системи із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика. — Чернівці: Рута, 2004. — С. 137-140.