УДК 517.95

©2008 р. У.М. Федусь

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом у випадку нелокальної умови перевизначення.

We found conditions for the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for one-dimensional parabolic equation with an unknown coefficient at the time-derivative in the case of nonlocal overdetermination condition.

Вступ та формулювання задачі

У даній роботі досліджується задача визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом в одновимірному параболічному рівнянні з нелокальною додатковою умовою. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора одержано умови існування розв'язку задачі. З врахуванням властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду встановлено єдиність розв'язку.

Серед досліджених обернених задач ідентифікації коефіцієнта при похідній за часом зазначимо роботу Прилєпка О.І. та Костіна О.Б [1], в якій розглянуто задачу для n-вимірного параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом, що залежить від просторової змінної, та нелокальною інтегральною умовою перевизначення. Задача визначення двох невідомих коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності в однорідному рівнянні теплопровідності з локальними умовами перевизначення досліджена в [2]. У статті [3] було розглянуто аналогічну до дослідженої в цій статті задачу у випадку рівняння теплопровідності.

В області $Q_T=(0,h)\times(0,T)$ розглядаємо рівняння

$$c(t)u_t=a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_x+ +d(x,t)u+f(x,t) \qquad (1)$$

з невідомим коефіцієнтом $c(t)>0, t\in[0,T]$, початковою та крайовими умовами

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,h], \qquad (2)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(h,t)=\mu_2(t), \quad t\in[0,T] \qquad (3)$$

та умовою перевизначення

$$\nu_1(t)u_x(0,t)+\nu_2(t)u_x(h,t)=\mu_3(t),\ t\in[0,T]. \qquad (4)$$

Існування розв'язку

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(A1) $a\in H^{1+\gamma,0}(\overline{Q}_T),\ b,d,f\in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$, $\varphi\in H^{2+\gamma}[0,h], \mu_i\in C^1[0,T],\ i=1,2$, $\mu_3,\nu_i\in C[0,T],\ i=1,2$;

(A2) $\varphi''(x)>0,\ x\in[0,h],\ a(x,t)>0,\ (x,t)\in \overline{Q}_T, \nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)b(0,t)\mu_2'(t)>0$, $\nu_1(t)b(h,t)\geqslant 0,\ \nu_2(t)b(0,t)\geqslant 0$, $b(0,t)b(h,t)\mu_3(t)+\nu_1(t)b(h,t)d(0,t)\mu_1(t)+ \nu_2(t)b(0,t)d(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)b(h,t)f(0,t)+ +\nu_2(t)b(0,t)f(h,t)>0,\ t\in[0,T]$;

(A3) $\varphi(0)=\mu_1(0),\ \varphi(h)=\mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi'(0)+\nu_2(0)\varphi'(h)=\mu_3(0)$, $\mathbb{D}\varphi''(0)+d(0,0)\mu_1(0)+f(0,0)= \frac{\mu_1'(0)}{\mu_2'(0)}\Big(\varphi''(h)+d(h,0)\mu_2(0)+f(h,0)\Big)$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0<T_0\leqslant T$, що розв'язок $(c,u)\in C[0,T_0]\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $c(t)>0,\ t\in[0,T_0]$ задачі (1)–(4) існує.

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо теорему Шаудера про нерухому точку компактного оператора. Спочатку зведемо задачу (1)–(4) до інтегрального рівняння відносно невідомої функції c. Для цього покладемо $x=0$ і $x=h$ в (1):

$$c(t)\mu_1'(t)=a(0,t)u_{xx}(0,t)+b(0,t)u_x(0,t)+ +d(0,t)\mu_1(t)+f(0,t),$$

$$c(t)\mu_2'(t)=a(h,t)u_{xx}(h,t)+b(h,t)u_x(h,t)+ +d(h,t)\mu_2(t)+f(h,t).$$

Тоді, помноживши обидві рівності на $\nu_1(t)\times b(h,t)$ і $\nu_2(t)b(0,t)$ відповідно, додавши і використавши (4), отримаємо

$$c(t)=\big(a(0,t)\nu_1(t)b(h,t)u_{xx}(0,t)+a(h,t)\times \nu_2(t)b(0,t)u_{xx}(h,t)+b(0,t)b(h,t)\mu_3(t)+ +\nu_1(t)b(h,t)d(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(0,t)d(h,t)\times \mu_2(t)+\nu_1(t)b(h,t)f(0,t)+\nu_2(t)b(0,t)\times f(h,t)\big)\big(\nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)b(0,t)\times \mu_2'(t)\big)^{-1}. \tag{5}$$

Шляхом заміни $\mathbb{D}u(x,t)=v(x,t)+\varphi(x)+ +\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))$ зведемо задачу (1)–(3) до задачі з однорідними початковою та крайовими умовами:

$$c(t)v_t=a(x,t)v_{xx}+b(x,t)v_x+d(x,t)v-c(t)\times \left(\mu_1'(t)+\frac{x}{h}(\mu_2'(t)-\mu_1'(t))\right)+\widetilde{f}(x,t),$$

$$v(x,0)=0,\ v(0,t)=0,\ v(h,t)=0. \tag{6}$$

Тут
$\widetilde{f}(x,t)=a(x,t)\varphi''(x)+b(x,t)\big(\varphi'(x)+\frac{1}{h}\times (\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))\big)+d(x,t)\times \big(\varphi(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+ +\mu_1(0))\big)+f(x,t)$.
В припущенні, що функція $c(t)$ – відома, використовуючи функцію Гріна [4] $\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)$, для рівняння

$$c(t)z_t=a(x,t)z_{xx}+b(x,t)z_x+d(x,t)z,$$

запишемо розв'язок задачі (6):

$$v(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\,\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi- -\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\big)\times \widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi.$$

Повертаючись до змінної u, приходимо до зображення

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi- -\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\big)\times \widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi+\varphi(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+ +\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0)),$$

звідки

$$u_{xx}(x,t)=\varphi''(x)+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\times \widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi-\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+ +\frac{\xi}{h}\big(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau)\big)\big)\widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi. \tag{7}$$

Підставивши (7) в (5), отримаємо

$$c(t)=\Bigg(a(0,t)\nu_1(t)b(h,t)\Bigg(\varphi''(0)+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\times \int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\,\widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi-\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+ +\frac{\xi}{h}\big(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau)\big)\big)\widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi\Bigg)+ +a(h,t)\nu_2(t)b(0,t)\Bigg(\varphi''(h)+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\times \int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\widetilde{G}_{1xx}(h,t,\xi,\tau)d\xi-\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+ +\frac{\xi}{h}\big(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau)\big)\big)\widetilde{G}_{1xx}(h,t,\xi,\tau)d\xi\Bigg)+ +b(0,t)b(h,t)\mu_3(t)+\nu_1(t)b(h,t)d(0,t)\mu_1(t)+ +\nu_2(t)b(0,t)d(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)b(h,t)f(0,t)+ +\nu_2(t)b(0,t)f(h,t)\Bigg)(\nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+ +\nu_2(t)b(0,t)\mu_2'(t))^{-1},\quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Отже, ми звели задачу (1)–(4) до інтегрального рівняння (8) відносно невідомої c.

Встановимо апріорні оцінки розв'язку цього рівняння. Знайдемо оцінку c знизу. Оскільки в виразі (7) всі доданки, окрім першого, прямують до нуля при $t\to 0$, то існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0<T_0\leqslant T$, на якому

$$\varphi''(x)\geqslant -\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\,\widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi+ \\ +\int_0^t d\tau\int_0^h\Big(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\Big)\times \\ \times\widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi,$$

тоді з умов (A2) отримаємо

$$a(0,t)\nu_1(t)b(h,t)u_{xx}(0,t)+a(h,t)\nu_2(t)b(0,t)\times \\ \times u_{xx}(h,t)\geqslant 0,\quad t\in[0,T_0].$$

Звідси, враховуючи (8) та зроблені припущення, прийдемо до оцінки

$$c(t)\geqslant A_0>0,\ t\in[0,T_0]. \tag{9}$$

Покажемо, що функції $\widetilde{G}_i(x,t,\xi,\tau), i=1,2$, можуть бути побудовані методом Леві [4]:

$$\widetilde{G}_i(x,t,\xi,\tau)=G_{0i}(x,t,\xi,\tau)+ \\ +\int_\tau^t\int_0^h G_{0i}(x,t,\eta,\sigma)\Phi_i(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta\,d\sigma, \tag{10}$$

де

$$G_{0i}(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}}\times \\ \times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)+ \\ +(-1)^i\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)\Bigg),$$

$$\theta(t,\xi)=\int_0^t\frac{a(\xi,\tau)}{c(\tau)}\,d\tau,\quad i=1,2,$$

і функції $\Phi_i(x,t,\xi,\tau)$ є розв'язками рівняння

$$\Phi_i(x,t,\xi,\tau)=-LG_{0i}(x,t,\xi,\tau)-\int_\tau^t d\sigma\times \\ \times\int_0^h LG_{0i}(x,t,\eta,\sigma)\Phi_i(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta, \tag{11}$$

причому, випадок $i=1$ відповідає першій крайовій задачі, а випадок $i=2$ – другій крайовій задачі.

Зауважимо, що функції $G_{0i}(x,t,\xi,\tau)$ при фіксованих $(\xi,\tau), 0<\xi<h, 0<\tau<t<T$ є в Q_T розв'язками рівняння

$$c(t)G_{0it}(x,t,\xi,\tau)=a(\xi,t)G_{0ixx}(x,t,\xi,\tau), \\ 0<\xi<h,\ 0<\tau<t<T.$$

Визначимо оператор:

$$Lz=z_t-\frac{a(x,t)}{c(t)}\,z_{xx}-\frac{b(x,t)}{c(t)}\,z_x-\frac{d(x,t)}{c(t)}\,z.$$

Функції $\widetilde{G}_i$, визначені рівністю (10), де $\Phi_i(x,t,\xi,\tau)$ – розв'язки рівняння (11), задовольняють рівняння $Lz=0$ в області Q_T при фіксованих $(\xi,\tau)\colon\ 0<\xi<h,\ 0<\tau<t<T$.

Встановимо існування розв'язку рівняння (11) при кожному $i=1,2$ аналогічно до [4]. Для цього спочатку оцінимо

$$LG_{0i}(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{c(t)}\Big((a(\xi,t)-a(x,t))\times \\ \times G_{0ixx}(x,t,\xi,\tau)-b(x,t)G_{0ix}(x,t,\xi,\tau)- \\ -d(x,t)G_{0i}(x,t,\xi,\tau)\Big).$$

Нехай $a_0=\min\limits_{\overline{Q}_T}a(x,t), a_1=\max\limits_{\overline{Q}_T}a(x,t)$, $\theta_0(t)=\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}$ і

$$S(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}}\times \\ \times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)+ \\ +\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)\Bigg).$$

Оскільки

$$0<a_0\theta_0(t)\leqslant\theta(t,\xi)\leqslant a_1\theta_0(t),$$

то

$$G_{0i}(x,t,\xi,\tau)\leqslant C_1S(x,t,\xi,\tau), i=1,2. \tag{12}$$

Використаємо нерівність

$$z^p\exp(-qz^2)\leqslant C_{p,q}<\infty, \\ \forall z\in[0,\infty), p\geqslant 0, q>0, \tag{13}$$

для оцінки

$$|G_{0ix}(x,t,\xi,\tau)|\leqslant \frac{C_2 S(x,t,\xi,\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \qquad (14)$$

Розглянемо перший доданок з LG_{0i}:

$$|(a(\xi,t)-a(x,t))G_{0ixx}(x,t,\xi,\tau)|\leqslant$$
$$\leqslant C_3|x-\xi|^{\gamma}|G_{0ixx}(x,t,\xi,\tau)|.$$

Враховуючи те, що $|x-\xi|\leqslant|x-\xi+2nh|$ і $|x-\xi|\leqslant|x+\xi+2nh|$ при $n\geqslant 1$, застосовуючи нерівність (13), отримаємо

$$\frac{|x-\xi|^{\gamma}}{(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^{\gamma/2}}\,|G_{0ixx}(x,t,\xi,\tau)|\leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_4}{\sqrt{(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^3}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)+\right.$$
$$\left.+\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)\right),$$

звідки, використовуючи (12) і (14), прийдемо до оцінки

$$|LG_{0i}(x,t,\xi,\tau)|\leqslant\left(\frac{C_5}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\gamma/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{C_6}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}+C_7\right)\frac{1}{c(t)}S(x,t,\xi,\tau)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_8 S(x,t,\xi,\tau)}{c(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}}. \qquad (15)$$

Легко бачити, що $S(x,t,\xi,\tau)$ є функцією Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$c(t)u_t=2a_1u_{xx},\quad (x,t)\in Q_T. \qquad (16)$$

Легко переконатись, що

$$\int_0^h S(x,t,\xi,\tau)d\xi=1. \qquad (17)$$

Дійсно, якщо записати зображення розв'язку задачі для рівняння (16) з умовами

$$u(x,0)=1,\ 0\leqslant x\leqslant h,$$
$$u_x(0,t)=u_x(h,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (18)$$

отримаємо потрібний результат. З (17) приходимо до рівності

$\int_0^h\int_0^h S(x,t,\eta,\sigma)S(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta d\sigma=1$

або

$\int_0^h\left(\int\limits_0^h S(x,t,\eta,\sigma)S(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta\right)d\sigma=1.$

Звідси, за єдиністю розв'язку задачі (16), (18) маємо

$$\int_0^h S(x,t,\eta,\sigma)S(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta=S(x,t,\xi,\tau). \qquad (19)$$

Враховуючи отриману рівність та оцінку (15), встановимо існування розв'язку рівняння (11), який побудуємо методом ітерацій [5]

$$\Phi_i(x,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}(LG_{0i})_m(x,t,\xi,\tau), \qquad (20)$$

де $(LG_{0i})_m(x,t,\xi,\tau)$ – повторні ядра, що визначаються формулами

$$(LG_{0i})_1(x,t,\xi,\tau)=-LG_{0i}(x,t,\xi,\tau),$$
$$(LG_{0i})_{m+1}(x,t,\xi,\tau)=-\int\limits_{\tau}^{t}d\sigma\times$$
$$\times\int\limits_0^h LG_{0i}(x,t,\eta,\sigma)(LG_{0i})_m(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta,$$
$$i=1,2,\ m=1,2,\ldots.$$

Для цього проведемо оцінки повторних ядер. Для $(LG_{0i})_2$, враховуючи (15) і (19), отримаємо

$$|(LG_{0i})_2(x,t,\xi,\tau)|=\left|\int\limits_{\tau}^{t}\int_0^h LG_{0i}(x,t,\eta,\sigma)\times\right.$$
$$\left.\times LG_{0i}(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta d\sigma\right|\leqslant\frac{C_8^2}{c(t)}\times$$
$$\times\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\sigma}{c(\sigma)\left((\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))\right)^{1-\frac{\gamma}{2}}}\times$$

$$\times \int_0^h S(x,t,\eta,\sigma)S(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta = \frac{C_8^2}{c(t)} \times$$

$$\times \int_\tau^t \frac{S(x,t,\xi,\tau)d\sigma}{c(\sigma)(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))^{1-\frac{\gamma}{2}}(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Звідси, зробивши заміну

$$z = \frac{\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau)}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}, \qquad (21)$$

отримаємо

$$|(LG_{0i})_2(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_8^2 S(x,t,\xi,\tau)}{c(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\gamma}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{dz}{z^{1-\frac{\gamma}{2}}(1-z)^{1-\frac{\gamma}{2}}} = \frac{C_8^2 B(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})}{c(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\gamma}} \times$$

$$\times S(x,t,\xi,\tau). \qquad (22)$$

Оцінюючи аналогічно наступне ядро, маємо

$$|(LG_{0i})_3(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_8^3 B(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2})B(\frac{\gamma}{2},\gamma)}{c(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{3\gamma}{2}}} \times$$

$$\times S(x,t,\xi,\tau). \qquad (23)$$

З (15), (22), (23) бачимо, що при оцінюванні кожного наступного ядра особливість знаменника щоразу зменшується на $\mathbb{D}\frac{\gamma}{2}$, тому можна зробити висновок про існування такого номера $m_0 > 0$, що

$$|(LG_{0i})_{m_0}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_9}{c(t)} S(x,t,\xi,\tau).$$

Тоді для повторних ядер, номер яких перевищує m_0, справджується оцінка:

$$|(LG_{0i})_{m_0+1}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \Bigg| \int_\tau^t d\sigma \times$$

$$\times \int_0^h LG_{0i}(x,t,\eta,\sigma)(LG_{0i})_{m_0}(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_8 C_9 S(x,t,\xi,\tau)}{c(t)} \int_\tau^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))^{1-\frac{\gamma}{2}}} =$$

$$= \frac{2C_8C_9}{\gamma c(t)}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma}{2}} S(x,t,\xi,\tau),$$

$$|(LG_{0i})_{m_0+2}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{2C_8^2 C_9}{\gamma c(t)} \times$$

$$\times (\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^\gamma S(x,t,\xi,\tau) B\left(\frac{\gamma}{2}, 1+\frac{\gamma}{2}\right).$$

Звідси за методом математичної індукції маємо

$$|(LG_{0i})_{m_0+n}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{2C_8^n C_9}{\gamma c(t)}(\theta_0(t) -$$

$$-\theta_0(\tau))^{n\gamma} S(x,t,\xi,\tau) \prod_{k=1}^n B\left(\frac{\gamma}{2}, 1+(k-1)\frac{\gamma}{2}\right),$$

$n \in \mathbb{N}$.

Скориставшись зображенням бета-функції через гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$, отримаємо $\prod\limits_{k=1}^n B\left(\frac{\gamma}{2}, 1+(k-1)\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n\gamma}{2})}$, тому

$$|(LG_{0i})_{m_0+n}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{2C_9}{\gamma c(t)} \times$$

$$\times \frac{\left(C_8(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})\right)^n}{\Gamma(1+\frac{n\gamma}{2})} S(x,t,\xi,\tau).$$

Отже, з врахуванням (20) та збіжності ряду вигляду $\sum\limits_{m=1}^\infty \frac{x^m}{\Gamma(m\frac{\alpha}{2})}$ маємо

$$\mathbb{D}|\Phi_i(x,t,\xi,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{10}}{c(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}} S(x,t,\xi,\tau), \qquad (24)$$

$$i=1,2, \quad 0 \leqslant x,\xi \leqslant h,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T.$$

Аналогічно до [5] встановлюється, що для $0 \leqslant x, \xi \leqslant h$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ та довільного β, $0 < \beta < \gamma$, функції $\Phi_i(x,t,\xi,\tau), i = 1,2$, задовольняють умову Гельдера по x з показником β.

Легко перевірити, виходячи з (10) та властивостей функцій $G_{0i}(x,t,\xi,\tau), i = 1,2$, що $\widetilde{G}_i(x,t,\xi,\tau)$ задовольняють однорідні умови Діріхле (при $i = 1$) та Неймана ($i = 2$).

Отже, ми встановили існування функції Гріна першої та другої крайових задач для рівняння $Lz = 0$, яка може бути подана у вигляді (10).

Знайдемо оцінку функції $\widetilde{G}_{1x}(x,t,\xi,\tau)$, враховуючи (14), (24) та (19):

$$|\widetilde{G}_{1x}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant |G_{01x}(x,t,\xi,\tau)| + \left| \int_{\tau}^{t} d\sigma \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^h G_{01}(x,t,\eta,\sigma)\Phi_i(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} S(x,t,\xi,\tau) + C_{11} \int_{\tau}^{t} d\sigma \times$$

$$\times \int_0^h \frac{S(x,t,\eta,\sigma)S(x,\sigma,\xi,\tau)}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}} \times$$

$$\times d\eta = S(x,t,\xi,\tau) \left(\frac{C_2}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + C_{11} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\tau}^{t} \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}} \right).$$

Зробивши заміну змінних (21) в інтегралі

$$\int_{\tau}^{t} \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}} =$$

$$= (\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma-1}{2}} \int_0^1 \frac{dz}{z^{1-\frac{\gamma}{2}}(1-z)^{1/2}} =$$

$$= \frac{B\left(\frac{1}{2},\frac{\gamma}{2}\right)}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

отримаємо

$$|\widetilde{G}_{1x}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant S(x,t,\xi,\tau) \left(\frac{C_2}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{12}}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{1-\gamma}{2}}} \right) \leqslant \frac{C_{13}S(x,t,\xi,\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}.$$

Аналогічно

$$|\widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant S(x,t,\xi,\tau) \times$$

$$\times \left(\frac{C_{14}}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)} + C_{15} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\tau}^{t} \frac{(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma}{2}-1}}{c(\sigma)(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))} d\sigma \right) =$$

$$= \left(\frac{C_{14}}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)} + \frac{C_{16}B\left(2,\frac{\gamma}{2}\right)}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}} \right) \times$$

$$\times S(x,t,\xi,\tau) \leqslant \frac{C_{17}}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)} S(x,t,\xi,\tau).$$

Розглянемо інтеграл $\int_0^h \widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau) \times \widetilde{f}(\xi,\tau)d\xi\, d\tau$, який має таку ж особливість, як і

$$I(x,t,\tau) = \int_0^h \widetilde{f}(\xi,\tau)G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi =$$

$$= \int_0^h (\widetilde{f}(\xi,\tau) - \widetilde{f}(x,\tau))G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi +$$

$$+ \widetilde{f}(x,\tau) \int_0^h G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi.$$

Безпосереднім обчисленням отримаємо

$$G_{01x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{02\xi}(x,t,\xi,\tau) + \\ + R_1(x,t,\xi,\tau), \qquad (25)$$

де

$$R_1(x,t,\xi,\tau)=-\frac{(\theta_\xi(t,\xi)-\theta_\xi(\tau,\xi))}{4\sqrt{\pi(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^3}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Bigg(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)+$$
$$+\exp\Bigg(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)\Bigg)+$$
$$+\frac{(\theta_\xi(t,\xi)-\theta_\xi(\tau,\xi))}{8\sqrt{\pi(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^5}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg((x-\xi+$$
$$+2nh)^2\exp\Bigg(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)+$$
$$+(x+\xi+2nh)^2\exp\Bigg(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)\Bigg).$$

Продиференціювавши співвідношення (25) по x та проінтегрувавши отриманий вираз по ξ, маємо

$$\int_0^h G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi=-\int_0^h G_{02\xi x}(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times d\xi+\int_0^h R_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi=G_{02x}(x,t,0,\tau)-$$
$$-G_{02x}(x,t,h,\tau)+\int_0^h R_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi,$$

де

$$R_{1x}(x,t,\xi,\tau)=\frac{3(\theta_\xi(t,\xi)-\theta_\xi(\tau,\xi))}{8\sqrt{\pi(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^5}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg((x-\xi+2nh)\times$$
$$\times\exp\Bigg(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)+(x+\xi+2nh)\times$$
$$\times\exp\Bigg(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)\Bigg)-$$
$$-\frac{\theta_\xi(t,\xi)-\theta_\xi(\tau,\xi)}{16\sqrt{\pi(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))^7}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg((x-\xi+$$
$$+2nh)^3\exp\Bigg(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)+$$
$$+(x+\xi+2nh)^3\exp\Bigg(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Bigg)\Bigg).$$

Тоді, використовуючи нерівність (13), отримаємо

$$\left|\int_0^h G_{01xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^h|R_{1x}(0,t,\xi,\tau)|d\xi\leqslant\frac{C_{18}}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}.$$

Оскільки функція $\widetilde{f}\in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$, то використовуючи оцінку $G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)$, матимемо

$$|I(0,t,\tau)|\leqslant\int_0^h\xi^\gamma|G_{01xx}(0,t,\xi,\tau)|d\xi+$$
$$+\frac{C_{19}}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\leqslant\frac{C_{20}}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\gamma/2}}+$$
$$+\frac{C_{19}}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\leqslant\frac{C_{21}}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\gamma/2}}.$$

В результаті прийдемо до оцінки

$$\left|\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\,G_{01xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right|\leqslant C_{21}\times$$
$$\times\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}}\leqslant C_{22}\theta_0^{\gamma/2}(t)\leqslant C_{23}$$

і

$$\left|\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\big)\times\right.$$
$$\left.\times\widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right|\leqslant C_{24}\int_0^t\frac{d\tau}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Аналогічний результат отримується при оцінюванні $\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\widetilde{f}(\xi,\tau)\widetilde{G}_{1xx}(h,t,\xi,\tau)d\xi$ та $\int_0^t d\tau\int_0^h\big(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\big)\times$ $\times\widetilde{G}_{1xx}(h,t,\xi,\tau)d\xi$. Тоді з (8) маємо

$$c(t)\leqslant C_{25}+C_{26}\int_0^t\frac{d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Звідси, позначивши $c_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} c(t)$, прийдемо до нерівності

$$c_{\max} \leqslant C_{25} + C_{27}\sqrt{c_{\max}^{\gamma}},$$

або

$$y^2 \leqslant C_{25} + C_{27}y^{\gamma},$$

звідки

$$y^2 - C_{27}y^{\gamma} \leqslant C_{25}. \tag{26}$$

Тут $y \equiv \sqrt{c}_{\max}$, $0<\gamma<1$. Розв'язавши (26), отримаємо $y \leqslant C_{28}$, звідки

$$c(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Позначимо через $\mathcal{N} = \{c \in C[0,T_0] : 0<A_0\leqslant c(t)\leqslant A_1\}$. Запишемо рівняння (8) в операторному вигляді

$$\omega = P\omega,$$

де оператор P, визначений правою частиною (8), переводить множину $\mathcal{N}$ в себе.

Встановимо компактність оператора P. Розглянемо $\forall c \in \mathcal{N}$ та функції $f_1 \in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$ оператор вигляду:

$$(P_0c)(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h f_1(\xi,\tau)\, \widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi.$$

Оскільки функція $\int_0^h f_1(\xi,\tau)\widetilde{G}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi$ має таку ж особливість як і $\int_0^h f_1(\xi,\tau) \times \times G_{01xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi$, тому компактність достатньо встановити для випадку оператора

$$(P_1c)(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h f_1(\xi,\tau)G_{01xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi.$$

Покажемо, що множина $P_1\mathcal{N}$ є компактна. З встановлених оцінок маємо

$$|(P_1c)(t)|\leqslant C_{29}\sqrt{t}+C_{30}t^{\frac{\gamma}{2}}\leqslant C_{29}\sqrt{T}+C_{30}T^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Отже, множина $P_1\mathcal{N}$ – рівномірно обмежена. Встановимо одностайну неперервність цієї множини. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо різницю

$$\Delta = |(P_1c)(t_2)-(P_1c)(t_1)|$$

з довільними $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 \neq t_2$. Якщо $t_i \leqslant t_0\,(i=1,2)$, то, за рахунок вибору t_0, отримаємо

$$\Delta \leqslant |(P_1c)(t_2)|+|(P_1c)(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо $t_i\geqslant t_0\,(i=1,2)$, і нехай $t_1<t_2$, тоді

$$\Delta=\left|\int_0^{t_2} d\tau\int_0^h \frac{f_1(\xi,\tau)}{c(\tau)}\, G_{01xx}(0,t_2,\xi,\tau)d\xi - \right.$$
$$\left. -\int_0^{t_1} d\tau\int_0^h \frac{f_1(\xi,\tau)}{c(\tau)}\, G_{01xx}(0,t_1,\xi,\tau)d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h f_1(\xi,\tau)G_{01xx}(0,t_2,\xi,\tau)d\xi\right| +$$
$$+\left|\int_0^{t_1} \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h f_1(\xi,\tau)\,(G_{01xx}(0,t_2,\xi,\tau)- \right.$$
$$\left. -G_{01xx}(0,t_1,\xi,\tau))d\xi\right| \equiv \Delta_1+\Delta_2.$$

Враховуючи встановлені раніше оцінки, маємо

$$\Delta_1\leqslant C_{31}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)(\theta(t_2)-\theta(\tau))^{1-\gamma/2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{32}(\theta(t_2)-\theta(t_1))^{\gamma/2}.$$

Тоді існує таке $\delta_1 > 0$, що при $t_2-t_1 < \delta_1$ отримаємо $\Delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Розглянемо

$$\Delta_2=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left|\int_0^{t_1} \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h f_1(\xi,\tau)\times\right.$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\xi+2nh)^2\Bigg(-\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,\xi)-\theta(\tau,\xi))^5}}\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_1,\xi)-\theta(\tau,\xi))^5}}\times$$
$$\left.\times\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_1,\xi)-\theta(\tau,\xi))}\Big)\Bigg)d\xi\right|.$$

Функція $\theta(t,\xi)$ – монотонно зростаюча по змінній t, тому до неї існує обернена $\theta^{-1}(\sigma,\xi)$. Зробивши заміну $\sigma = \theta(t_1,\xi) - \theta(\tau,\xi)$ в Δ_2 та оцінивши отриманий вираз, матимемо

$$\Delta_2 \leqslant C_{33} \int\limits_0^{\frac{a_1 t_1}{A_0}} d\sigma \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\xi+2nh)^2 \times$$
$$\times \left| \left(-\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,\xi)-\theta(t_1,\xi)+\sigma)^5}} \times \right.\right.$$
$$\times \exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,\xi)-\theta(t_1,\xi)+\sigma)}\Big) +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\sigma^5}} \exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma}\Big)\right)\right| d\xi. \qquad (27)$$

Для заданого $\varepsilon > 0$ ми можемо вибрати таке $t_0 > 0$, що

$$\int\limits_0^{t_0} d\sigma \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi+2nh)^2}{\sqrt{\sigma^5}} \times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma}\Big) d\xi < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тоді при $\frac{a_1 t_1}{A_0} \leqslant t_0$ матимемо $\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо ж $\frac{a_1 t_1}{A_0} > t_0$, то, розбивши інтеграл в (27) на суму двох від 0 до t_0 і від t_0 до $\frac{a_1 t_1}{A_0}$, отримаємо

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + C_{33} \int_0^h d\xi \int\limits_{t_0}^{\frac{a_1 t_1}{A_0}} d\sigma \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma}^{\theta(t_2,\xi)-\theta(t_1,\xi)+\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi + 2nh)^2 \times$$
$$\times \left| \frac{\partial}{\partial z} \Big(-\frac{1}{\sqrt{z^5}} \exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\Big)\Big) \right| dz.$$

Обчислюючи похідну в підінтегральному виразі, оцінивши її, використовуючи лему 2.1.1 [4] та нерівність (13) при $z > t_0$, отримаємо

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + C_{34}(\theta(t_2,\xi) - \theta(t_1,\xi)).$$

Оскільки $\theta(t_2,\xi) - \theta(t_1,\xi) \leqslant C_{35}(t_2 - t_1)$, то існує таке $\delta_2 > 0$, що при $t_2 - t_1 < \delta_2$ матимемо $\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо позначити через $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, то, об'єднавши всі отримані оцінки, встановлюємо, що при $|t_2 - t_1| <$
δ маємо $\Delta < \varepsilon$, що і доводить одностайну неперервність множини $P_1\mathcal{N}$. Отже, оператор P_1– цілком неперервний.

Аналогічно можна довести, що оператор $(P_2 c)(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h f_1(\xi,\tau) G_{01xx}(h,t,\xi,\tau) d\xi$ – цілком неперервний.

З рівняння (8) видно, що для доведення компактності оператора P достатньо довести компактність операторів виду P_1 та P_2, яка уже встановлена. Застосовуючи теорему Шаудера, отримуємо існування розв'язку рівняння (8), а отже й розв'язку задачі (1)–(4).

У встановлених оцінках $C_i (i = \overline{1,35})$ – відомі величини.

Зауважимо, що за певних припущень на вихідні дані, отримуємо існування розв'язку задачі (1)–(4) з класу Гельдера [6].

Теорема 2. Нехай крім $(A1)-(A3)$ виконуються умови

$$\mu_i \in H^{1+\frac{\gamma}{2}}[0,T],\ \mu_3, \nu_i \in H^{\frac{1+\gamma}{2}}[0,T], i = 1,2.$$

Тоді розв'язок (c,u) задачі (1)–(4) належить класу $H^{\gamma/2}[0,T_0] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{T_0})$.

Єдиність розв'язку

Теорема 3. *Нехай існує розв'язок* $(c,u) \in H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ *задачі (1)–(4). Тоді, якщо* $a, b, d \in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$ *і*

$$\nu_1(t) b(h,t) \mu_1'(t) + \nu_2(t) b(0,t) \mu_2'(t) \neq 0,$$

то цей розв'язок єдиний.

Доведення теореми 2. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1,u_1) і (c_2,u_2) з класу $H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ задачі (1)–(4). Нехай $c = c_1 - c_2$, $u = u_1 - u_2$. Утворимо задачу для (c,u):

$$c_1(t) u_t = a(x,t) u_{xx} + b(x,t) u_x + d(x,t) u -$$
$$- c(t) u_{2t},\ (x,t) \in Q_T, \qquad (28)$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in [0,h], \qquad (29)$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \qquad (30)$$

$$\nu_1(t) u_x(0,t) + \nu_2(t) u_x(h,t) = 0,\ t \in [0,T]. \qquad (31)$$

Аналогічно до того, як ми отримали рівняння (5), приходимо до наступного рівняння відносно $c(t)$:

$$c(t)\left(\nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)b(0,t)\mu_2'(t)\right)- -a(0,t)\nu_1(t)b(h,t)u_{xx}(0,t)-a(h,t)\nu_2(t)\times \times b(0,t)u_{xx}(h,t)=0. \qquad (32)$$

За допомогою функції Гріна $\widetilde{G}_1$ запишемо розв'язок задачі (28) – (30) :

$$\mathbb{D}u(x,t)=-\int_0^t\int_0^h\frac{u_{2\tau}(\xi,\tau)c(\tau)}{c_1(\tau)}\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Тоді (32) набуде вигляду

$$c(t)\left(\nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)b(0,t)\mu_2'(t)\right)+ +\int_0^t c(\tau)K(t,\tau)d\tau=0, \qquad (33)$$

де

$$K(t,\tau)=\frac{1}{c_1(\tau)}\int_0^h(\nu_1(t)a(0,t)b(h,t)\times \times\widetilde{G}_{1xx}(0,t,\xi,\tau)+\nu_2(t)a(h,t)b(0,t)\times \times\widetilde{G}_{1xx}(h,t,\xi,\tau))u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi.$$

З припущень теореми маємо, що

$$\nu_1(t)b(h,t)\mu_1'(t)+\nu_2(t)b(0,t)\mu_2'(t)\neq 0,$$

а це означає, що (33) – однорідне інтегральне рівняння Вольтера другого роду. Тоді з того, що $u_2\in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ та з властивостей об'ємних теплових потенціалів [6, с.318] випливає, що ядро $K(t,\tau)$ рівняння (33) має інтегровну особливість:

$$\mathbb{D}\,|K(t,\tau)|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^{1-\frac{\gamma}{2}}},$$

де $C-$ відома константа. Оскільки рівняння (33) має єдиний розв'язок $c(t)\equiv 0$ на [0,T], то і $u(x,t)\equiv 0$. Тому $c_1(t)=c_2(t)$ і $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении// Сиб. мат. журнал. – 1993. – Т.34, № 5. – С.147-162.

2. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журнал. – 1994. – Т35, № 3. – С.612-621.

3. *Федусь У.М.* Обернена задача визначення коефіцієнта теплоємності// Мат. студії. – 2006. – Т.25, № 2. – С.126-140.

4. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.– 240 pp.

5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1967. – 428с.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.