УДК 517.521

©2008 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ОДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Наведено нову ознаку збіжності числових рядів.

We obtain a new test for convergence of infinite numerical series.

Для числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

з ненульовими дійсними або комплексними членами наведемо ознаку збіжності, що узагальнює ознаку д'Аламбера.

1. Основна теорема

Зафіксуємо довільне число $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо лінійну функцію

$$\mathcal{P}(z_0, z_1, \ldots, z_m) =$$

$$= p_0 z_0 + p_1 z_1 + \ldots + p_{m-1} z_{m-1} - z_m$$

комплексних змінних $z_0, z_1, \ldots, z_m$, де $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ – дійсні або комплексні числа, і многочлен

$$P_m(\lambda) = \mathcal{P}(1, \lambda, \ldots, \lambda^m)$$

степеня m.

У подальшому вимагатимемо виконання для $P_m(\lambda)$ однієї з наступних двох умов.

Умова А. *Модулі коренів многочлена* $P_m(\lambda)$ *менші* 1.

Умова Б. *Модулі коренів многочлена* $P_m(\lambda)$ *більші* 1.

Теорема 1. *Нехай всі члени ряду* (1) *ненульові і*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(1, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n+m}}{a_n}\right) = 0 \tag{2}$$

або

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\frac{a_n}{a_{n+m}}, \ldots, \frac{a_{n+m-1}}{a_{n+m}}, 1\right) = 0. \tag{3}$$

Тоді:

1) *Якщо виконується умова* А, *то ряд* (1) *збігається.*

2) *Якщо виконується умова* Б, *то ряд* (1) *розбігається.*

Це твердження встановлюється за допомогою різницевих рівнянь.

2. Допоміжні твердження

Розглянемо лінійні різницеві рівняння

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k x_{n+k}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

і

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m-1} (p_k + q_{k,n}) x_{n+k}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел і $q_{k,n}$, $k = \overline{0, m-1}$, $n \in \mathbb{N}$, – дійсні або комплексні числа, для яких

$$\sup_{k=\overline{0,m-1},\ n\in\mathbb{N}} |q_{k,n}| < +\infty.$$

Зафіксуємо довільні числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Розв'язок x_n рівняння (4) або (5), що задовольняє початковим умовам

$$x_k = a_k, \ k = \overline{1, m},$$

позначатимемо через $x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Такий розв'язок єдиний і його можна знайти за допомогою методу кроків, використовуючи (4) або (5).

Наведемо результати про розв'язки цих рівнянь, що дадуть змогу довести теорему 1.

Розглянемо лінійний простір $\mathbb{C}^m$ векторів

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

з нормой

$$\|z\| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_m|.$$

Визначимо відображення $A:\ C^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $B_n:\ C^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ і $P:\ C^m \longrightarrow \mathbb{C}$ рівностями

$$A(z_1, z_2, \ldots, z_m) =$$

$$= (z_2, z_3, \ldots, z_m, p_0 z_1 + \ldots + p_{m-1} z_m), \quad (6)$$

$$B_n(z_1, z_2, \ldots, z_m) =$$

$$= (0, 0, \ldots, 0, q_{0,n} z_1 + \ldots + q_{m-1,n} z_m) \quad (7)$$

і

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_m) = z_1.$$

Норми цих відображень відповідно дорівнюють

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^m,\ \|x\|=1} \|Ax\|,$$

$$\|B_n\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^m,\ \|x\|=1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} q_{k,n} x_k \right|, \quad (8)$$

$$\|P\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^m,\ \|x\|=1} |Px| = 1 \quad (9)$$

і

$$\|B_n\| \le \sum_{k=0}^{m-1} |q_{k,n}|. \quad (10)$$

Також будемо використовувати нижню норму лінійних відображень. Нагадаємо, що для лінійного відображення $B:\ C^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ нижня норма визначається рівністю

$$\|B\|_0 = \inf_{x \in \mathbb{C}^m,\ \|x\|=1} \|Bx\|.$$

Важливим для дослідження різницевого рівняння (5) є співвідношення

$$\|B\|_0 = \frac{1}{\|B^{-1}\|}, \quad (11)$$

що справджується у випадку оборотного відображення B.

Теорема 2. *Нехай x_n – довільний розв'язок різницевого рівняння* (4).

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = A^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Це твердження випливає із (4) і (6).

Наслідок 1. *Розв'язок $x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння* (4) *подається у вигляді*

$$x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m) = PA^{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Теорема 3. *Нехай x_n – довільний розв'язок різницевого рівняння* (5).

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) =$$

$$= (A + B_{n-1}) \cdots (A + B_1)(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Це твердження випливає з (5), (6) і (7).

Наслідок 2. *Розв'язок $x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ рівняння* (5) *подається у вигляді*

$$x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m) =$$

$$= P(A + B_{n-1}) \cdots (A + B_1)(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Позначимо через $\sigma(A)$ і $r(A)$ відповідно спектр і спектральний радіус відображення A.

Нагадаємо, що $\sigma(A)$ – множина чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для кожного з яких відображення $\lambda I - A$, де I – одиничне відображення, необоротне, і

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}\ [1]. \quad (12)$$

Теорема 4. *Для спектра $\sigma(A)$ відображення A справджується рівність*

$$\sigma(A) = \{\lambda : P_m(\lambda) = 0\}. \quad (13)$$

Доведення. Оскільки відображення A діє в скінченновимірному просторі $\mathbb{C}^m$, то для кожної точки $\mu \in \sigma(A)$ існує ненульовий вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$, для якого

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Оскільки на підставі (6)

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= (x_2, x_3, \ldots, x_m, p_0 x_1 + p_1 x_2 + \ldots + p_{m-1} x_m),$$

то

$$\mu x_1 = x_2,\ \mu x_2 = x_3,\ \ldots,\ \mu x_{m-1} = x_m$$

і

$$\mu x_m = p_0 x_1 + p_1 x_2 + \ldots + p_{m-1} x_m.$$

Тому
$$x_1 \neq 0,$$
$$x_k = \mu^{k-1} x_1,\ k = \overline{2, m},$$
і
$$(p_0 + p_1\mu + \ldots + p_{m-1}\mu^{m-1} - \mu^m)x_1 = 0.$$
Отже, $P_m(\mu) = 0$ і
$$\sigma(A) \subset \{\lambda : P_m(\lambda) = 0\}. \tag{14}$$
Також виконується співвідношення
$$\sigma(A) \supset \{\lambda : P_m(\lambda) = 0\}. \tag{15}$$
Справді, нехай μ – таке число, що $P_m(\mu) = 0$. Тоді
$$A(1, \mu, \ldots, \mu^{m-1}) =$$
$$= (\mu, \mu^2, \ldots, \mu^{m-1}, p_0 + p_1\mu + \ldots + p_{m-1}\mu^{m-1}) =$$
$$= (\mu, \mu^2, \ldots, \mu^m) = \mu(1, \mu, \ldots, \mu^{m-1}).$$
Отже, співвідношення (15) справджується.

З (14) і (15) випливає (13).

Теорему 4 доведено.

Наслідок 3. *Умова* А *виконується тоді і тільки тоді, коли* $r(A) < 1$.

Наслідок 4. *Умова* Б *виконується тоді і тільки тоді, коли відображення* A *оборотне і* $r(A^{-1}) < 1$.

Теорема 5. *Для кожного числа* $q > r(A)$ *існує таке залежне від* q *число* $M \geq 1$, *що для всіх* $n \in \mathbb{N}$
$$\|A^{n-1}\| \leq Mq^{n-1}.$$
Твердження теореми випливає з (12).

З теореми 5, наслідку 1 і співвідношення (9) випливає, що має місце наступне твердження.

Наслідок 5. *Для кожного* $q > r(A)$ *існує таке залежне від* q *число* $M \geq 1$, *що для розв'язку* $x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *рівняння* (4) ($(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *– довільний елемент простору* $\mathbb{C}^m$) *виконуватиметься співвідношення*
$$|x_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)| \leq Mq^{n-1}\|(a_1, a_2, \ldots, a_m)\|.$$
Далі наведемо оцінки для норми та нижньої норми відображення
$$(A + B_n) \cdots (A + B_1)$$
зверху та знизу відповідно.

Теорема 6. *Для кожного числа* $q > r(A)$ *існує таке залежне від* q *число* $M \geq 1$, *що*
$$\|(A + B_n) \cdots (A + B_1)\| \leq M \prod_{k=1}^{n} (q + M\|B_k\|).$$
Доведення. Використаємо очевидну рівність
$$(A + B_n) \cdots (A + B_1) = A^n + \sum_{l=1}^{n} S_l, \tag{16}$$
в якій S_l – сума $\dfrac{n!}{l!(n-l)!}$ доданків, кожний з яких має вигляд
$$A^{m_0} B_{k_1} \ldots A^{m_{l-1}} B_{k_l} A^{m_l}, \tag{17}$$
де $k_1, \ldots, k_l$ і $m_0, \ldots, m_l$ – відповідно натуральні і невід'ємні числа, для яких
$$n \geq k_1 > \ldots > k_l \geq 1,$$
$$m_0 + \ldots + m_l = n - l.$$
Вважається, що в (17) $A^0 = I$. Оскільки на підставі теореми 5
$$\|A^{m_0} B_{k_1} A^{m_1} B_{k_2} \ldots A^{m_{l-1}} B_{k_l} A^{m_l}\| \leq$$
$$\leq M^{l+1} q^{n-l} \|B_{k_1}\| \|B_{k_2}\| \cdots \|B_{k_l}\|,$$
то
$$\|S_l\| \leq \sum_{n \geq k_1 > \ldots > k_l \geq 1} M^{l+1} q^{n-l} \|B_{k_1}\| \cdots \|B_{k_l}\|.$$
Тому завдяки (16)
$$\|(A + B_n) \cdots (A + B_1)\| \leq$$
$$\leq \|A^n\| + \sum_{l=1}^{n} \|S_l\| \leq Mq^n +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{n \geq k_1 > \ldots > k_l \geq 1} M^{l+1} q^{n-l} \|B_{k_1}\| \cdots \|B_{k_l}\| =$$
$$= M \prod_{k=1}^{n} (q + M\|B_k\|).$$
Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Нехай для відображення A виконується умова* Б *і*

$$\|A^{-1}\|\|B_k\| < 1, \ k \geq 1.$$

Тоді для кожного числа $Q \in (r(A^{-1}), 1)$ існує таке залежне від Q число $M \geq 1$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\|(A + B_n) \cdots (A + B_1)\|_0 \geq$$

$$\geq \frac{1}{M} \prod_{k=1}^{n} \left(Q + M \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B_k\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B_k\|} \right)^{-n}. \quad (18)$$

Доведення. Завдяки умові Б

$$0 \notin \sigma(A).$$

Тому відображення A є оборотним. Зафіксуємо довільне $k \in \{1, \ldots, n\}$. На підставі рівності

$$A + B_k = A(I + A^{-1}B_k)$$

і того, що

$$\|A^{-1}B_k\| \leq \|A^{-1}\|\|B_k\| < 1, \quad (19)$$

відображення $A + B_k$ також є оборотним (див., наприклад, [1,2]) і

$$(A + B_k)^{-1} = (I + A^{-1}B_k)^{-1}A^{-1}.$$

На підставі (19)

$$(I + A^{-1}B_k)^{-1} = I + \sum_{l=1}^{\infty} \left(-A^{-1}B_k\right)^l.$$

Отже,

$$(A+B_k)^{-1} = A^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(-A^{-1}B_k\right)^l A^{-1}. \quad (20)$$

Далі використаємо очевидну нерівність

$$\|D_k\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B_k\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B_k\|},$$

де

$$D_k = \sum_{l=1}^{\infty} \left(-A^{-1}B_k\right)^l A^{-1}.$$

Завдяки теоремі 6

$$\left\|\left(A^{-1} + D_1\right) \cdots \left(A^{-1} + D_n\right)\right\| \leq$$

$$\leq M \prod_{k=1}^{n} \left(Q + M \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B_k\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B_k\|} \right)^n,$$

а завдяки рівності (11)

$$\|(A + B_n) \cdots (A + B_1)\|_0 =$$

$$= \|(A + B_1)^{-1} \cdots (A + B_n)^{-1}\|^{-1}.$$

Тому на підставі (20) виконується нерівність (18).

Теорему 7 доведено.

Тепер наведемо твердження про оцінки зверху і знизу розв'язків різницевого рівняння (5) у випадку виконання відповідно умов А і Б.

Теорема 8. *Нехай для відображення A виконується умова* А *і*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} |q_{k,n}| = 0.$$

Тоді для кожного числа $q \in (r(A), 1)$ існує таке число $N \geq 1$, що для розв'язку $x_n(a_1, \ldots, a_m)$ різницевого рівняння (5), де $(a_1, \ldots, a_m)$ – довільний елемент простору $\mathbb{C}^m$, виконується нерівність

$$|x_n(a_1, \ldots, a_m)| \leq N q^{n-1} \|(a_1, \ldots, a_m)\|$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Твердження теореми є наслідком теореми 6.

Теорема 9. *Нехай*:

(1) *виконується умова* Б;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{m-1} |q_{k,n}| = 0$;

(3) *для розв'язку x_n різницевого рівняння* (5) *виконується нерівність*

$$\|(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1})\| \neq 0$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тоді для кожного $Q \in (r(A^{-1}), 1)$ існує таке число $N \geq 1$, залежне від розв'язку x_n і Q, що

$$\|(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1})\| \geq \frac{1}{NQ^n}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Твердження теореми є наслідком теореми 7.

Зауваження 1. Якщо для розв'язку x_n різницевого рівняння (5) для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$\|(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+m-1})\| = 0,$$

то

$$\|(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1})\| = 0$$

для всіх $n \geq n_0$.

Зауваження 2. Теореми 8 і 9 можна довести, використовуючи теореми про стійкість і нестійкість за першим наближенням розв'язків різницевих рівнянь [3,4].

3. Доведення теореми 1

Якщо для членів числового ряду (1) виконується співвідношення (2), то для деякої збіжної до 0 числової послідовності $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$

$$P\left(1, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n+m}}{a_n}\right) = \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Із цього співвідношення випливає, що a_n – розв'язок різницевого рівняння (5), в якому

$$q_{0,n} = -\varepsilon_n$$

і

$$q_{k,n} = 0,\ k = \overline{1, m-1}.$$

Якщо для членів числового ряду (1) виконується співвідношення (3), то для деякої збіжної до 0 числової послідовності $(\delta_n)_{n\geq 1}$ (можна вважати, що $|\delta_n| < 1$ для всіх $n \geq 1$)

$$\mathcal{P}\left(\frac{a_n}{a_{n+m}}, \ldots, \frac{a_{n+m-1}}{a_{n+m}}, 1\right) = \delta_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Із цього співвідношення випливає, що a_n – розв'язок різницевого рівняння (5), в якому

$$q_{k,n} = -\frac{p_k \delta_n}{1+\delta_n},\ k = \overline{0, m-1}.$$

Зазначимо, що в обох випадках

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} |q_{k,n}| = 0.$$

Тоді у випадку виконання умови А для деяких чисел $q \in (0,1)$ і $M \geq 1$ (див. теорему 8) виконується співвідношення

$$|a_n| \leq Mq^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тому на підставі ознаки порівняння (див., наприклад, [5]) числовий ряд (1) збігається. У випадку виконання умови Б на підставі теореми 9 і того, що $a_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, для деяких чисел $Q \in (0,1)$ і $M \geq 1$ для загального члена ряду (1) виконується співвідношення

$$|a_n| \geq \frac{1}{MQ^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| \neq 0$ і, отже, числовий ряд (1) розбігається (завдяки необхідній умові збіжності числового ряду [5]).

Обгрунтування твердження теореми 1 завершено.

4. Окремі випадки теореми 1

У випадку многочлена

$$\mathcal{P}(z_0, z_1, \ldots, z_m) = -rz_0 + z_m$$

співвідношення (2) має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left(-r + \frac{a_{n+m}}{a_n}\right) = 0.$$

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 10. *Нехай члени ряду* (1) *задовольняють умови*:

1) $a_n \neq 0$, $n \geq 1$;

2) *для деякого натурального числа* m *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n} = r,\ r \in \mathbb{C}.$$

Тоді у випадку $|r| < 1$ *ряд* (1) *збігається, а у випадку* $|r| > 1$ *цей ряд розбігається.*

Приклад 1. Ряд (1), члени якого ненульові і

$$a_{n+2} - (1-i)a_n = \sin^2 a_n,\ n \geq 1,$$

розбігається.

Справді, якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n| \neq 0$, то ряд (1) розбігається. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n} = 0$ і, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1 - i$. Оскільки $|1-i| > 1$, то на підставі теореми 10 ряд (1) розбігається.

Також окремим випадком теореми 1 є

Теорема 11. *Нехай $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, і виконується співвідношення* (3).

Тоді у випадку $\sum\limits_{k=0}^{m-1} |p_k| < 1$ ряд (1) *збігається, а у випадку $|p_0| > 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} |p_k|$ цей ряд разбігаеться.*

Справді, у випадку $\sum\limits_{k=0}^{m-1} |p_k| < 1$ виконується умова А, а у випадку $|p_0| > 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} |p_k|$ виконується умова Б. Тому теорема 11 – наслідок основної теореми 1.

Приклад 2. Нехай для членів числового ряду (1) виконуються співвідношення

$$p_0 a_n + \ldots + p_{m-1} a_{n+m-1} + a_{n+m} = \\ = f_n(a_n),\ n \geq 1, \qquad (21)$$

де $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ – відображення, для якого $f_n(0) = 0$, $n \geq 1$, і

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|}{x} = 0. \qquad (22)$$

Якщо виконується умова А і сума $\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|$ є досить малою, то числовий ряд (1) збігається. Справді, завдяки цим умовам

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (23)$$

оскільки нульовий розв'язок різницевого рівняння

$$p_0 x_n + \ldots + p_{m-1} x_{n+m-1} + x_{n+m} = f_n(x_n)$$

асимптотично стійкий [3]. Тому на підставі (21), (22) і (23) для членів ряду (1) виконується співвідношення (2) і завдяки теоремі 1 ряд (1) збігається.

З теорем 10 і 11 отримується

Ознака д'Аламбера ([5]). *Нехай члени ряду* (1) *задовольняють умови*:

1) $a_n > 0$, $n \geq 1$;
2) *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,\ 0 \leq r \leq +\infty.$$

Тоді у випадку $r < 1$ ряд (1) *збігається, а у випадку $r > 1$ цей ряд розбігається.*

Зазначимо, що інші ознаки збіжності числових рядів можна знайти в [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца, Москва: Наука, 1968. – 664 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, Москва: Наука, 1968. 496 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь, Рівне: Вид-во Національного ун-ту водного господарства та природокористування, 2004. 416 с.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Про стійкість за лінійним наближенням // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 1. – 132–145.
5. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении, Киев: "Факт", 2004. 560 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів, Рівне: Вид-во Рівненського державного технічного ун-ту, 2001. 240 с.