УДК 517.911.5

©2008 р. Н.В. Скрипник

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

УСЕРЕДНЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОХІДНОЮ ХУКУХАРИ

Обґрунтовано метод усереднення для диференціальних рівнянь з похідною Хукухари та з імпульсами у фіксовані моменти часу.

In this paper we substantiate the averaging method for differential equations with Hukuhara's derivative and impulses in fixed moments of time.

Розвиток теорії многозначних відображень призвів до питання, що розуміти під похідною від многозначного відображення. Основною причиною виникнення труднощів для введення цього поняття є нілінійність простору $comp(\mathbb{R}^n)[conv(\mathbb{R}^n)]$ непорожніх компактних [і опуклих] множин евклідового простору $\mathbb{R}^n$, що веде до відсутності операції різниці двох множин. Тому існує декілька підходів до вирішення цієї проблеми. Одним з них є різниця Хукухари [5].

Означення 1 [5]. *Нехай X, $Y \in conv(\mathbb{R}^n)$. Множина $Z \in conv(\mathbb{R}^n)$ така, що $X = Y + Z$, називаєтся різницею множин X та Y і позначаєтся $X \overset{h}{-} Y$.*

Означення 2 [3,5]. *Многозначне відображення $X : \mathbb{R} \to conv(\mathbb{R}^n)$ називається диференційованим за Хукухарою в точці $t_0 \in \mathbb{R}$, якщо існує множина $D_h X(t_0) \in conv(\mathbb{R}^n)$ така, що границі*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)}{\Delta t}$$

та

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

існують та дорівнюють $D_h X(t_0)$.

Відзначимо, що в даному означенні припускається, що для всіх достатньо малих додатних Δt різниці $X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta t)$ та $X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{-} X(t_0)$ існують.

Перші результати з диференціальних рівнянь із похідною Хукухари

$$D_h X = F(t, X), \; X(0) = X_0, \tag{1}$$

де $F : \mathbb{R} \times conv(\mathbb{R}^n) \to conv(\mathbb{R}^n)$ многозначне відображення, $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)-$ початковий стан, були отримані в роботах F.S. De Blasi, F.Iervolino [3,4] та охоплювали коло питань, пов'язаних з існуванням розв'язків, їх єдиністю та неперервною залежністю від початкових умов та параметрів.

Означення 3 [4]. *Многозначне відображення $X(\cdot)$ називається розв'язком рівняння (1), якщо воно неперервне, диференційовне за Хукухарою та задовольняє системі (1) майже всюди на $[0, T]$.*

Диференціальне рівняння (1) еквівалентне інтегральному рівнянню [3]

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s))\, ds,$$

інтеграл в якому розуміється в сенсі Хукухари [4].

Має місце наступна теорема існування та єдиності:

Теорема 1 [3,4]. *Нехай многозначне відображення $F(t, X)$ задовольняє умови:*

1) $F(t, X)$ вимірне по t на $\mathbb{R}$ при кожному фіксованому $X \in conv(\mathbb{R}^n)$;

2) $F(t, X)$ неперервне по X на $conv(\mathbb{R}^n)$ при майже всіх $t \in \mathbb{R}$;

3) існує сумовна функція $k(t)$ така, що

$$h(F(t, X), 0) \leq k(t)$$

для майже всіх $t \in \mathbb{R}$.

Тоді задача (1) має принаймні один розв'язок.

Якщо, окрім того, $F(t,X)$ задовольняє умову Ліпшиця по X на $conv(\mathbb{R}^n)$, тобто існує обмежена сумовна функція $\lambda(t) \geq 0$ така, що

$$h(F(t,X_1),F(t,X_2)) \leq \lambda(t)h(X_1,X_2),$$

то задача (1) має єдиний розв'язок.

Застосування методу усереднення для диференціальних рівнянь з похідною Хукухари розглядалось в роботах M.Kisielewicz [6] та А.В.Плотнікова [1]. У працях В.О.Плотнікова та П.М.Кітанова досліджені імпульсні диференціальні рівняння з похідною Хукухари та отримано обгрунтування методу повного усереднення для систем, праві частини яких задовольняють умову Ліпшиця.

Розглянемо обгрунтування схеми часткового усереднення для імпульсних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари у випадку, коли праві частини неусередненого рівняння не задовольняють умову Ліпшиця.

Розглянемо імпульсне диференціальне рівняння з похідною Хукухари вигляду

$$D_hX(t) = \varepsilon F(t,X),\ t \neq \tau_i,\ X(0) = X_0, \quad (2)$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} = \varepsilon I_i(X). \quad (3)$$

Системі (2), (3) поставимо у відповідність наступну частково усереднену систему

$$D_hY(t) = \varepsilon \overline{F}(t,Y),\ t \neq \sigma_j,\ X(0) = X_0, \quad (4)$$

$$\Delta Y|_{t=\sigma_j} = \varepsilon \overline{I}_j(Y), \quad (5)$$

де

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} h\left(\int_0^T F(t,X)dt + \sum_{0\leq\tau_i<T} I_i(X),\right. \quad (6)$$

$$\left.\int_0^T \overline{F}(t,X)dt + \sum_{0\leq\sigma_j<T} \overline{I}_j(X)\right) = 0.$$

Має місце наступна теорема, що встановлює близкість розв'язків задач (2), (3) і (4), (5) на скінченному проміжку.

Теорема 2 *Нехай в області*

$$D = \{(t,X) : t \geq 0, X \in Q \subset conv(\mathbb{R}^n)\}$$

виконуються наступні умови:

1) многозначне відображення $F(t,X)$ вимірне по t при кожному фіксованому X та існують функція $k(t) \geq 0$, стала $k_0 \geq 0$ і неспадна функція $\psi(u) \geq 0$, $\lim\limits_{u\downarrow 0}\psi(u) = 0$ такі, що

$$h(F(t,X_1),F(t,X_2)) \leq k(t)\psi(h(X_1,X_2)),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} k(t)dt \leq k_0(t_2-t_1)$$

на будь-якому скінченному проміжку $[t_1,t_2]$;

2) многозначні відображення $I_i(X)$ такі, що

$$h(I_i(X_1),I_i(X_2)) \leq k_0\psi(h(X_1,X_2));$$

3) многозначне відображення $\overline{F}(t,X)$ вимірне по t при кожному фіксованому X та задовольняють по X умові Липшиця з обмеженою суммовною функцією $\lambda(t) \geq 0$, тобто існує $\lambda(t) \leq \lambda$ така, що

$$h(\overline{F}(t,X_1),\overline{F}(t,X_2)) \leq \lambda(t)h(X_1,X_2);$$

4) многозначні відображення $\overline{I}_j(X)$ задовольняють умову Ліпшиця зі сталою λ :

$$h(\overline{I}_j(X_1),\overline{I}_j(X_2)) \leq \lambda h(X_1,X_2));$$

5) існують сумовна функція $M(t) \geq 0$ та стала $M_0 \geq 0$ такі, що

$$|F(t,X)| \leq M(t),\ |\overline{F}(t,X)| \leq M(t),$$

$$|I_i(X)| \leq M_0,\ |\overline{I}_i(X)| \leq M_0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leq M_0(t_2-t_1)$$

для будь-якого скінченного проміжку $[t_1,t_2]$;

6) рівномірно відносно X в області Q існує границя (6) та існує стала $0 \leq d < \infty$ така, що

$$\frac{1}{T}i(t,t+T) \leq d,\ \frac{1}{T}j(t,t+T) \leq d,$$

де $i(t,t+T)$ і $j(t,t+T)-$ кількість точок послідовностей τ_i та σ_j відповідно на проміжку $[t,t+T]$;

7) розв'язок $Y(t)$, $Y(0)=X_0\in Q'\subset Q$ системи (4), (5) при $t\ge 0$ для всіх $\varepsilon\in(0,\theta]$ належить області Q разом з деяким $\rho-$ околом.

Тоді для будь яких як завгодно малого $\eta>0$ і як завгодно великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\theta]$, що при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ на відрізку $t\in[0,\varepsilon^{-1}]$ виконується нерівність

$$h(X(t),Y(t))\le\eta,$$

де $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)-$ розв'язки систем (2), (3) та (4), (5) відповідно.

Доведення. Диференціальні рівняння з похідною Хукухари (2), (3) та (4), (5) еквівалентні відповідно інтегральним рівнянням

$$X(t)=X_0+\varepsilon\int_0^t F(s,X(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),\tag{7}$$

$$Y(t)=X_0+\varepsilon\int_0^t \overline{F}(s,Y(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(Y(\sigma_j)).\tag{8}$$

Оцінимо $h(X(t),Y(t))$. На підставі співвідношень (7) та (8) маємо
$h(X(t),Y(t))=$

$$=h\left(X_0+\varepsilon\int_0^t F(s,X(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.X_0+\varepsilon\int_0^t \overline{F}(s,Y(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(Y(\sigma_j))\right)\le$$

$$\le\varepsilon h\left(\int_0^t F(s,X(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\int_0^t \overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\right)+$$

$$+\varepsilon h\left(\int_0^t \overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j)),\right.$$

$$\left.\int_0^t \overline{F}(s,Y(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(Y(\sigma_j))\right)\le$$

$$\le\varepsilon h\left(\int_0^t F(s,X(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\int_0^t \overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\right)+$$

$$+\varepsilon\lambda\int_0^t h(X(s),Y(s))ds+\varepsilon\lambda\sum_{0\le\sigma_j<t}h(X(\sigma_j),Y(\sigma_j)).\tag{9}$$

Окремо розглянемо перший доданок. Проведемо розбиття відрізку $[L\varepsilon^{-1}]$ з кроком $\frac{L}{\varepsilon m}$, де $m-$ ціле число та позначимо $t_i=\frac{iL}{\varepsilon m}$, $i=\overline{0,m}$.

Нехай $t\in(t_k,t_{k+1}]$. Тоді

$$h\left(\int_0^t F(s,X(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\int_0^t \overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\right)=$$

$$=h\left(\sum_{s=0}^{k-1}\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}}F(s,X(s))ds+\sum_{t_s\le\tau_i<t_{s+1}}I_i(X(\tau_i))\right)+\right.$$

$$+\int_{t_k}^t F(s,X(s))ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),$$

$$\sum_{s=0}^{k-1}\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}}\overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{t_s\le\sigma_j<t_{s+1}}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\right)+$$

$$\left.+\int_{t_k}^t \overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\right)=$$

$$=h\left(\sum_{s=0}^{k-1}F^s+F^k,\sum_{s=0}^{k-1}\overline{F}^s+\overline{F}^k\right)\le$$

$$\le\sum_{s=0}^{k-1}h(F^s,\overline{F}^s)+h(F^k,\overline{F}^k),\tag{10}$$

де

$$F^s = \int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(\tau_i)),$$

$$\overline{F}^s = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(\sigma_j)),$$

$$s = \overline{0, k-1},$$

$$F^k = \int_{t_k}^{t} F(s, X(s))ds + \sum_{t_k \le \tau_i < t} I_i(X(\tau_i)),$$

$$\overline{F}^k = \int_{t_k}^{t} \overline{F}(s, X(s))ds + \sum_{t_k \le \sigma_j < t} \overline{I}_j(X(\sigma_j)).$$

Оцінимо $h(F^s, \overline{F}^s)$:
$h(F^s, \overline{F}^s) \le$

$$\le h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s))\right) +$$

$$+h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(t_s))\right) +$$

$$+h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(\sigma_j))\right) \le$$

$$\le \int_{t_s}^{t_{s+1}} k(s)\psi(h(X(s), X(t_s)))ds +$$

$$+k_0 \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} \psi(h(X(\tau_i), X(t_s))) +$$

$$+h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(t_s))\right) +$$

$$+\lambda \int_{t_s}^{t_{s+1}} h(X(s), X(t_s))ds +$$

$$+\lambda \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} h(X(\sigma_j), X(t_s)). \qquad (11)$$

За умовою 6 теореми існує монотонно спадна функція $\vartheta(t)$, що прямує до 0 при $t \to \infty$, така, що в усій області Q виконується нерівність

$$h\left(\int_0^t F(s, X)ds + \sum_{0 \le \tau_i < t} I_i(X), \int_0^t \overline{F}(s, X)ds +\right.$$

$$\left. + \sum_{0 \le \sigma_j < t} \overline{I}_j(X)\right) \le t\vartheta(t).$$

Таким чином,

$$h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(t_s))\right) \le$$

$$\le h\left(\int_0^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{0 \le \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_0^{t_{s+1}} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{0 \le \sigma_j < t_{s+1}} \overline{I}_j(X(t_s))\right) +$$

$$+h\left(\int_0^{t_s} F(s, X(t_s))ds + \sum_{0 \le \tau_i < t_s} I_i(X(t_s)),\right.$$

$$\left.\int_0^{t_s} \overline{F}(s, X(t_s))ds + \sum_{0 \le \sigma_j < t_s} \overline{I}_j(X(t_s))\right) \le$$

$$\le t_{s+1}\vartheta(t_{s+1}) + t_s\vartheta(t_s) \le 2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$

Крім того, за умовою 5 теореми та рівності (7), маємо

$$h(X(s), X(t_s)) \le h\left(X(t_s) +\right.$$

$$+\varepsilon\int_{t_s}^{s}F(\tau,X(\tau))d\tau+\varepsilon\sum_{t_s\le\tau_i<s}I_i(X(\tau_i)),X(t_s)\Bigg)\le$$

$$\le\varepsilon\left[M_0(s-t_s)+d\frac{L}{\varepsilon m}M_0\right]\le\frac{LM_0(1+d)}{m}. \tag{12}$$

Тоді враховуючи (11) отримаємо

$$h(F^s,\overline{F}^s)\le\frac{k_0L(1+d)}{\varepsilon m}\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right)+$$

$$+2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)+\frac{\lambda L^2M_0(1+d)^2}{\varepsilon m^2}. \tag{13}$$

Оцінимо $h(F^k,\overline{F}^k)=$

$$=h\Bigg(\int_{t_k}^{t}F(s,X(s))ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),$$

$$\int_{t_k}^{t}\overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\Bigg)\le$$

$$\le\int_{t_k}^{t}|F(s,X(s))|ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}|I_i(X(\tau_i))|+$$

$$+\int_{t_k}^{t}|\overline{F}(s,X(s))|ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}|\overline{I}_j(X(\sigma_j))|\le$$

$$\le\frac{2LM_0(1+d)}{\varepsilon m}. \tag{14}$$

З (10), (13) та (14) випливає

$$\varepsilon h\Bigg(\int_{0}^{t}F(s,X(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}I_i(X(\tau_i)),$$

$$\int_{0}^{t}\overline{F}(s,X(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\overline{I}_j(X(\sigma_j))\Bigg)\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{s=0}^{k-1}\left[\frac{k_0L(1+d)}{\varepsilon m}\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)+\frac{\lambda L^2M_0(1+d)^2}{\varepsilon m^2}\right]+$$

$$+\frac{2LM_0(1+d)}{m}\le$$

$$\le k_0L(1+d)\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right)+2Lm\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)+$$

$$+\frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m}\equiv\gamma(m,\varepsilon).$$

На підставі (9) маємо

$$h(X(t),Y(t))\le\varepsilon\lambda\int_0^t h(X(s),Y(s))ds+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{0\le\sigma_j<t}h(X(\sigma_j,Y(\sigma_j))+\gamma(m,\varepsilon),$$

звідки, використовуючи нерівність Гроноулла-Беллмана, отримаємо

$$h(X(t),Y(t))\le\gamma(m,\varepsilon)(1+\varepsilon\lambda)^{dt}e^{\varepsilon\lambda t}\le$$

$$\le\gamma(t,\varepsilon)e^{\varepsilon\lambda dt}e^{\varepsilon\lambda t}\le\gamma(m,\varepsilon)e^{(1+d)L}. \tag{15}$$

Число m_0 виберемо з умови

$$k_0L(1+d)\psi\left(\frac{M_0(1+d)}{m}\right)+$$

$$+\frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m}<\frac{\eta}{2}e^{-(1+d)L},$$

потім при фіксованому m_0 виберемо ε_0 з умови

$$2Lm_0\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)<\frac{\eta}{2}e^{-(1+d)L}.$$

Таким чином, $h(X(t),Y(t))<\eta$ за умови, що $X(\cdot)$ на відрізку $[0,L\varepsilon^{-1}]$ не залишає області Q.

Покажемо, що $X(\cdot)\in Q$ на відрізку $[0,L\varepsilon^{-1}]$. Справді, оскільки початкова множина $X_0\in intQ$, то на деякому відрізку $[0,t^0]$ розв'язок $X(\cdot)\in Q$. Виберемо ε_0 і m_0 так, щоб

$$\gamma(m,\varepsilon)<e^{-(1+d)L}\min\left\{\frac{\rho}{2},\frac{\eta}{2}\right\}.$$

Тоді на відрізку $[0,t^0]$, де $X(\cdot)\in Q$, матимемо

$$h(X(t),Y(t))<\frac{\rho}{2}.$$

Якщо припустити, що $t^0<L\varepsilon^{-1}$, то на відрізку $[0,L\varepsilon^{-1}]$ внаслідок неперервності розв'язків $X(\cdot)$ та $Y(\cdot)$ знайдеться точка t', в якій буде виконуватись нерівність

$$\frac{\rho}{2}<h(X(t'),Y(t'))<\rho.$$

Звідси випливає, що при $t = t'$ розв'язок не залишив області Q. Тому $t' \in [0, t^0]$ та тоді $h(X(t'), Y(t')) < \frac{\rho}{2}$, тобто отримали суперечність. Таким чином, $t^0 \geq L\varepsilon^{-1}$. ■

З даної теореми безпосередньо випливає

Теорема 3. *Нехай в області*

$$D = \{(t, X) : t \geq 0, X \in Q \subset conv(\mathbb{R}^n)\}$$

виконуються наступні умови:

1) многозначні відображення $F(t, X)$, $\overline{F}(t, X)$ вимірні по t при кожному фіксованому X, обмежені сталою M та задовольняють по X умову Ліпшиця зі сталою λ;

2) многозначні відображення $I_i(X)$, $\overline{I}_j(X)$ рівномірно обмежені сталою M та задовольняють умову Ліпшиця зі сталою λ;

3) рівномірно відносно X в області Q існує границя (6) та існує стала $0 \leq d < \infty$ така, що

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d, \ \frac{1}{T} j(t, t+T) \leq d,$$

де $i(t, t+T)$ и $j(t, t+T)-$ кількість точок послідовностей τ_i та σ_j відповідно на проміжку $[t, t+T]$;

4) розв'язок $Y(t)$, $Y(0) = X_0 \in Q' \subset Q$ системи (4), (5) при $t \geq 0$ для всіх $\varepsilon \in (0, \theta]$ належить області Q разом з деяким $\rho-$ околом.

Тоді для будь - яких наскільки завгодно малого $\eta > 0$ та наскільки завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ виконується нерівність

$$h(X(t), Y(t)) \leq \eta,$$

де $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)-$ розв'язки систем (2), (3) и (4), (5) відповідно.

В теоремі 2 можна послабити умови на праві частини неусередненного рівняння, а саме має місце теорема:

Теорема 4. *Нехай в області*

$$D = \{(t, X) : t \geq 0, X \in Q \subset conv(\mathbb{R}^n)\}$$

виконуються умови 3) - 7) теореми 2, та:

1') многозначне відображення $F(t, X)$ вимірне по t при кожному фіксованому X та рівномірно неперервне по X рівномірно відносно t;

2') многозначні відображення $I_i(X)$ одностайно неперервні.

Тоді для будь-яких як завгодно малого $\eta > 0$ та як завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ виконується нерівність

$$h(X(t), Y(t)) \leq \eta,$$

где $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)-$ розв'язки систем (2), (3) и (4), (5) відповідно.

Доведення цілком аналогічно доведенню теореми 2 за винятком того, що при оцінюванні $h(F^s, \overline{F}^s)$ перший доданок оцінимо використовуючи умови 1') та 2').

Для довільного $\eta_1 > 0$ знайдемо $\delta_1 > 0$ таке, що

$$h(F(t, X_1), F(t, X_2)) < \eta_1$$

та

$$h(I_i(X_1), I_i(X_2)) < \eta_1$$

при $h(X_1, X_2) < \delta$.

Виберемо $m_0^1 \in \mathbb{N}$ таке, що при $m > m_0^1$ виконується нерівність

$$\frac{LM_0(1+d)}{m} < \delta.$$

Тоді, використовуючи оцінку (12), маємо

$$h\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(s))ds + \sum_{t_s \leq \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\int_{t_s}^{t_{s+1}} F(s, X(t_s))ds + \sum_{t_s \leq \tau_i < t_{s+1}} I_i(X(t_s))\right) <$$

$$< \frac{L}{\varepsilon m}\eta_1 + d\frac{L}{\varepsilon m}\eta_1 = \frac{(1+d)L\eta_1}{\varepsilon m}.$$

У цьому випадку

$$\gamma(m, \varepsilon) \equiv (1+d)L\eta_1 + 2Lm\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) +$$

$$+\frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m}.$$

Числа η_1 та $m_0 \geq m_0^1$ виберемо з умов

$$(1+d)L\eta_1 < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L}$$

та

$$\frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m} < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L},$$

потім при фіксованому m_0 виберемо ε_0 з умови

$$2Lm_0\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L}.$$

Таким чином з (15) випливає, що $h(X(t), Y(t)) < \eta$. ■

Наслідок. Нехай

$$\overline{F}(t, X) \equiv F_0(X) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\int_0^T F(t, X)dt + \sum_{0\leq\tau_i<T} I_i(X)\right),$$

$$\overline{I}_i(X) \equiv \{0\}.$$

Тоді співвідношення (6) виконується та теореми 2 - 4 обгрунтовують схему повного усереднення.

Зауваження. Оскільки у просторі $conv(\mathbb{R}^n)$ операція віднімання не завжди визначена, то умови імпульсної дії (3) та (5) в загальному випадку необхідно записати у вигляді

$$X(\tau_i + 0) = \psi_i(X(\tau_i)),$$

$$Y(\sigma_j + 0) = \overline{\psi}_j(Y(\sigma_j)).$$

У цьому випадку формула усереднення (6) набуває вигляду:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} h\biggl(\int_0^T F(s, X)ds + \psi_{i(0,T)}(...\psi_2(\psi_1(X))...),$$

$$\int_0^T \overline{F}(s, X)ds + \overline{\psi}_{j(0,T)}(...\overline{\psi}_2(\overline{\psi}_1(X))...)\biggr) = 0.$$

1. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.

2. De Blasi F. S. On the differentiability of multifunctions // Pacific J. of Math.– 1976.– V. 66, № 1.– P. 67-81.

3. De Blasi F.S., Iervolino F. Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol.2, № 4-5. – P.491 – 501.

4. Brandao Lopes Pinto A.J., De Blasi F.S., Iervolino F. Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – V.4. – P.534 – 538.

5. Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.

6. Kisielewicz M. Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Mat. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397 – 408.