УДК 517.51

©2008 р. В.В.Нестеренко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ГАНА

Вказано два класи функцій $f : X \times Y \to Z$, які мають властивістю Гана, коли простір Y не задовольняє другу аксіому зліченності.

We introduce two classes of functions $f : X \times Y \to Z$ with Hahn property when Y is not a second countable space.

1. Вступ. Властивість відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких існує залишкова в X множина A, така, що $A \times Y$, міститься в множині $C(f)$ всіх точок сукупної неперервності f, називається *властивістю Гана.* В [1] Ж. Калбрі та Ж. Труаллік довели, що відображення з класу $CC(X \times Y, Z)$ нарізно неперервних відображень мають властивість Гана, коли X — топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний простір. В. Маслюченко [2 - 5] переніс цей результат на випадок відображень з класів $\overline{C}C$, KC і $\overline{K}C$. Пізніше в [6,7] В. Маслюченко і В. Нестеренко розширили результат Калбрі-Труалліка на функції з класу K_hC горизонтально квазінеперервних і неперервних відносно другої змінної відображень. У зв'язку з цими результатами виник новий клас просторів. Кажуть [5], що топологічний простір Y є *простором Гана*, якщо для довільного топологічного простору X і довільного метризовного простору Z кожне відображення f з класу $\overline{C}C(X \times Y, Z)$, всіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної і неперервні відносно першої змінної при значеннях другої змінної, що пробігає деяку всюди щільну множину в Y, має властивість Гана. Зрозуміло, що кожний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є простором Гана. Обернене, взагалі кажучи, не правильно.

В цій роботі ми покажемо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ з класу $K_hC(X \times Y, Z)$ або з класу всіх відображень, які неперервні відносно другої змінної і квазінеперервні за сукупністю змінних, мають властивість Гана, коли простір Y, можливо, не задовольняє другу аксіому зліченності, а є простором Гана з деякими додатковими властивостями.

2. Основні означення та позначення. Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система множин в $X \times Y$. Ми кажемо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *$\mathcal{A}$-квазінеперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і для кожного околу O точки p_0 в $X \times Y$ існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що $A \subseteq O$ і $f(A) \subseteq W$. Якщо в ролі системи $\mathcal{A}$ взяти відповідно множини $\{U \times V : U$ — відкрита непорожня в X, V — відкрита непорожня в Y $\}$, $\{U \times \{y\} : U$ — відкрита непорожня в X, $y \in Y\}$, або $\{U \times V : U$ — відкрита непорожня в X, V — окіл точки $y_0 \in Y\}$,то $\mathcal{A}$-квазінеперервність у точці p_0 називається відповідно *сукупною квазінеперервністю*, *горизонтальною квазінеперервністю* або *симетричною квазінеперервністю відносно y в точці* p_0. Відображення f називається *сукупною квазінеперервним*, *горизонтальною квазінеперервним* або *симетричною квазінеперервним відносно y* якщо воно є таким у кожній точці.

3. Приклад простору Гана, який не задовольняє другу аксіому зліченності. Спочатку наведемо приклад простору Гана, який не задовольняє другу аксіому зліченності.

Приклад. Розглянемо простір $P = \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, де за δ-околи точок $(x,y) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ будемо брати звичайні околи в евклідовій топології, а для точок $(x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ базисними δ-околами будуть служити множини $([x-\delta, x+\delta] \times (0,\delta]) \cup \{(x,0)\}$. Цей простір не буде задовольняти другу аксіому зліченності, бо він містить континуальний дискретний підпростір $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Розглянемо довільну функцію f з $\overline{C}C(X \times P, Z)$, де X — топологічний простір, а Z — метризовний. Введемо в розгляд простір $P_0 = \mathbb{R} \times [0,+\infty)$ з евклідовою топологією. Простір P_0 задовольняє другу аксіому зліченності. Покажемо, що $f \in \overline{C}C(X \times P_0, Z)$. Для цього досить пояснити, що коли функція $g : P \to Z$ — неперервна, то і функція $g : P_0 \to Z$ є неперервною.

Нехай $|\circ - \circ|$ — метрика на просторі Z, яка породжує його топологію. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, 0)$ і покладемо $z_0 = g(p_0)$. З неперервності $g : P \to Z$ випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що

$$|g(x,y) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon,$$

$$\text{коли } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], 0 < y \leq \delta. \qquad (*)$$

Зрозуміло, що коли $0 < y \leq \delta$, то $|g(x_0,y) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon$. Отже, g^{x_0} — неперервна в точці y_0. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ функції $g^x : [0,+\infty) \to Z$ — неперервні. Переходячи до границі в нерівності (*) при $y \to +0$, одержуємо, що $|g(x,0) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon$. Отже, $|g(x,y) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon$, коли $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], 0 \leq y \leq \delta$. Це означає, що функція $g : P_0 \to Z$ неперервна в точці p_0.

У випадку коли $p = (x,y)$, де $y > 0$, системи околів точки p у просторах P і P_0 однакові. Отже, функція $g : P_0 \to Z$ неперервна.

Таким чином, $f \in \overline{C}C(X \times P_0, Z)$. Тоді існує залишкова множина A в X, така, що відображення $f : X \times P_0 \to Z$ неперервне в кожній точці множини $A \times P_0$. Залишилось показати, що і відображення $f : X \times P \to Z$ неперервне на $A \times P$. Цей факт одразу стає очевидним у зв'язку з тим, що кожний окіл точки у просторі $X \times P_0$ є околом відповідної точки у просторі $X \times P$.

Таким чином, простір P є простором Гана, який не задовольняє другу аксіому зліченності.

4. Допоміжні твердження. Нам знадобляться деякі додаткові твердження. Наступна лема була встановлена, наприклад, в [8].

Лема 1. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, U — відкрита непорожня множина в X, U — відкрита непорожня множина в Y, множина A міститься в X і така, що $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Лема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, A — всюди щільна в X множина і звуження $f|_{A \times Y}$ — неперервне відображення. Тоді відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $(x_0, y_0) \in A \times Y$ і довільний окіл W точки $z_0 = f(x_0, y_0)$. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнений окіл W_1 точки z_0, такий, що $W_1 \subseteq W$. З неперервності $f|_{A \times Y}$ в точці (x_0, y_0) випливає, що існують відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно у просторах X і Y, такі, що $f((A \cap U) \times V) \subseteq W_1$. Згідно з лемою 1 маємо, що $f(U \times V) \subseteq \overline{f((A \cap U) \times V)} \subseteq \overline{W_1} = W_1 \subseteq W$. Отже, відображення f неперервне в точці (x_0, y_0).

Наступна теорема була встановлена в [6,7].

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z — метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ — відображення з класу $K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ є залишковою в X.*

В [9] була встановлена наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай простори X і Z*

задовольняють другу аксіому зліченності, Y — топологічний простір і відображення $f:\ X\times Y\to Z$ квазінеперервне. Тоді існує залишкова в Y множина B, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно y в кожній точці добутку $X\times B$.

5. Основні результати. Тепер переходимо до викладу основних результатів.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z — метризовний простір і відображення $f:\ X\times Y\to Z$ з класу $K_hC(X\times Y,Z)$. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Доведення. Нехай спочатку простір X берівський. Згідно з теоремою 1 для кожного $y\in Y$ множина $C_y(f)$ є залишковою в X. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує зліченна всюди щільна множина Y_0 в Y. Позначимо $X_0=\bigcap\limits_{y\in Y_0}C_y(f)$. Множина X_0 залишкова, бо кожна множина $C_y(f)$ залишкова, а множина Y_0 зліченна.

Розглянемо звуження $g=f|_{X_0\times Y}$. Легко бачити, що $g\in\overline{C}C(X_0\times Y,Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то відображення g має властивість Гана. Це означає, що множина $A=C_Y(g)=\{x\in X_0:\{x\}\times Y\subseteq C(g)\}$ є залишковою в X_0. Оскільки $X\setminus A=(X\setminus X_0)\cup(X_0\setminus A)$, множина $X\setminus X_0$ є першої категорії в X і множина $X_0\setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в X, то множина $X\setminus A$ є першої категорії в X, отже, A — залишкова в X.

Якщо тепер скористаємося лемою 2, то одержимо, що відображення f неперервне в кожній точці множини $A\times Y$.

Нехай тепер X — довільний топологічний простір. Згідно з теоремою Банаха про категорію простір X можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $X_I\sqcup X_{II}\sqcup\Gamma$, де X_I — відкрита в X множина першої категорії, X_{II} — відкрита в X множина, яка є берівським простором в індукованій з X топології і Γ — замкнена ніде не щільна в X множина, що є межею множини X_{II}. Нехай $f_0=f|_{X_{II}\times Y}$. Зрозуміло, що $f_0\in K_hC(X_{II}\times Y,Z)$. Оскільки простір X_{II} берівський, то за доведеним вище множина $C_Y(f_0)$ залишкова в X_{II}, а значить, і в X, адже $X_{II}=X\setminus(X_I\cup\Gamma)$ залишкова в X. Але ж X_{II} — відкрита множина, то $C_Y(f_0)\subseteq C_Y(f)$. Тому і множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.

Теорема 4. *Нехай простір X задовольняє другу аксіому зліченності, Y — берівський простір, який є простором Гана і кожна всюди щільна в Y множина є сепарабельною, Z — метризовний сепарабельний простір і відображення $f:X\times Y\to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних і неперервне відносно другої змінної. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Доведення. Нехай спочатку простір X берівський. Згідно з теоремою 2 у просторі Y існує всюди щільна множина B, така, що відображення f є симетрично квазінеперервним відносно y в кожній точці множини $X\times B$.

Візьмемо довільну точку $y\in B$ і покажемо, що множина $C_y(f)$ є залишковою в X. Нехай це не так, тобто множина $D_y(f)=X\setminus C_y(f)$ є множиною другої категорії в X. Нехай $\{W_n:n\in\mathbf{N}\}$ — база простору Z. Розглянемо множини $A_n==\{x\in D_y(f):(\forall U\in\mathcal{U}_x)(\forall V\in\mathcal{V}_y)(f(x,y)\in W_n, f(U\times V)\not\subseteq W_n)\}, n\in\mathbf{N}$, де $\mathcal{U}_x$ і $\mathcal{V}_y$ — системи околів точок x і y відповідно. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=D_y(f)$. Оскільки множина $D_y(f)$ залишкова, то існують номер n_0 і відкрита множина G, такі, що множина A_{n_0} щільна в G. З симетричної квазінеперервності в кожній точці множини $G\times\{y\}$ випливає, що існують відкрита множина U і окіл V точки y, такі, що $U\subseteq G$ і $f(U\times V)\subseteq W_{n_0}$. Тоді $U\cap A_{n_0}=\emptyset$. А це суперечить щільності множини A_{n_0} в G. Отже, для кожного $y\in B$ множина $C_y(f)$ є залишковою в X.

Оскільки з кожної всюди щільної множини в Y можна виділити зліченну всюди щільну множину, то існує зліченна всюди щільна множина B_0 в Y, така, що $B_0\subseteq B$. Позначимо $X_0=\bigcap\limits_{y\in B_0}C_y(f)$. Множина X_0 залишкова, бо кожна множина $C_y(f)$ залишкова, а множина Y_0 зліченна.

Розглянемо звуження $g = f|_{X_0 \times Y}$. Легко бачити, що $g \in \overline{C}C(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то відображення g має властивість Гана. Це означає, що множина $A = C_Y(g) = \{x \in X_0 : \{x\} \times Y \subseteq C(g)\}$ є залишковою в X_0. Оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множини $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в X, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A — залишкова в X.

Якщо тепер скористатись лемою 2, то одержимо, що відображення f є неперервним на $A \times Y$.

Аналогічно до того, як це робилось в теоремі 3 розглядається випадок, коли X — довільний топологічний простір з другою аксіомою зліченності.

Автор висловлює щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за постановку задач та численні консультації, а також Михайлюку Володимиру Васильовичу за цінні поради і вказівки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Calbrix J., Troallic J.-P. Applications separement continues //C.R.Acad. Sc.Paris. Ser.A. — 1979. — 288. — P. 647 - 648.

2. Маслюченко В.К. Нове про нарізно неперервні відображення // Тези Міжнародної математичної конференції присвяченої пам'яті академіка М.п.Кравчука. — Київ-Луцьк, 1992. — С. 125.

3. Маслюченко В.К.,Репало Б.І. Майже нарізно неперервні відображення //Чернівецький ун-т. — Чернівці, 1993. — 15 с. Деп. в ДНТБ України 9.10.93, № 956 — УК.93

4. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали Міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. — Чернівці: Рута, 1995. — С. 192 — 246.

5. Маслюченко В.К. Простори Гана і задача Діні// Мат. методи і фіз.-мех. поля. —1998. — 41, №4. — С. 39 - 45.

6. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. — Чернівці, 1996. — 15 с. Деп. в УкрІНТЕІ 01.11.96, № 98 - Укр. 96.

7. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій// Укр. мат. журн. — 2000. — 52, №12. — С. 1711 - 1714.

8. Маслюченко В.К. Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Математичні Студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С. 213 - 218.

9. Нестеренко В.В. Сукупна квазінеперервність многозначних відображень // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 349. Математика. — Чернівці: Рута. — 2007, — С. 98 - 100.