УДК 517.982

©2008р. О. В. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

МНОЖИНА ТОЧОК РОЗРИВУ l-НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ПЕРШОГО КЛАСУ

Охарактеризовано множину точок розриву функцій першого класу Бера $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ звуження яких на кожну пряму є неперервним.

We characterize the discontinuity point set of a Baire one function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that its restrictions to every line is continuous.

1. Вступ

Питання про опис множини точок розриву нарізно неперервних відображень на даний момент дуже добре вивчене. Зокрема, В.Маслюченко і В.Михайлюк [1] отримали повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій, що визначені на добутку метризовних просторів. В ряді робіт автора було здійснено опис коливань нарізно неперервних функцій, що визначені на добутку метризовних просторів. В [2] за допомогою введеного там поняття стичної множини було отримано характеризацію множин точок розриву квазінеперервних функцій, що визначені на довільних спадково нормальних просторах.

Що ж стосується множини точок розриву *l-неперервних функцій*, (тобто функцій, звуження яких на кожну пряму є неперервним), то можна згадати лише тільки класичну роботу Юнґів [3], в якій вони будують приклад l-неперервної функції на $\mathbb{R}^2$ з континуальною множиною точок розриву. В цій роботі ми, модифікуючи метод стичних множин, охарактеризуємо множини точок розриву l-неперервних функцій.

2. l-стичні множини

Множину $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ми називатимемо *l-околом точки* $x_0 \in \mathbb{R}^d$, якщо для кожного напрямку $e \in \mathbb{R}^d$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що $[x_0, x_0 + \varepsilon e] \subseteq M$. Казатимемо, що M є *l-околом множини* $E \subseteq \mathbb{R}^d$, якщо M є l-околом кожної точки $x \in E$.

Зауважимо, що l-неперервність функції $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, означає, що для кожної точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ і $\varepsilon > 0$ існує такий її l-окіл M, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, для кожного $x \in M$.

Замкнену множину E називатимемо *l-стичною,* якщо існує такий її замкнений l-окіл M, що $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^d \setminus M}$. Зліченні об'єднання l-стичних множин називатимемо *σ-l-стичними множинами.*

Твердження 2.1. *Нехай M замкнений l-окіл точки x_0 в $\mathbb{R}^d$. Тоді $x_0 \in \overline{\mathrm{int} M}$.*

Доведення. Розглянемо множини $E_n = \{x \in \mathbb{R}^d : [x_0, x_0 + \frac{1}{n}x] \subseteq M\}$. Оскільки M є l-околом точки x_0, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^d$. Але $\mathbb{R}^d$ другої категорії. Тому існує такий номер n, що множина E_n не є ніде не щільною. Значить, множина $U = \mathrm{int}\overline{E_n}$ є відкритою і непорожньою. Нехай $V = \bigcup_{x \in U}(x_0, x_0 + \frac{1}{n}x)$, $E = \bigcup_{x \in E_n \cap U}(x_0, x_0 + \frac{1}{n}x)$. Нескладно довести, що V відкрита і непорожня, причому $V \subseteq \overline{E}$ і $x_0 \in \overline{V}$. Але $E \subseteq M$ і M замкнена. Тому $V \subseteq \overline{E} \subseteq M$. Отже, $x_0 \in \overline{V} \subseteq \overline{\mathrm{int} M}$.

Лема 2.3. *Нехай F – замкнена підмножина $\mathbb{R}^d$. Тоді існує нескінченно диференційовна функція $\psi : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$, така, що $\psi^{-1}(0) = F$.*

Доведення. На $\mathbb{R}^d$ ми розглядатимемо евклідову норму. Символом $B(a, r)$ позначатимемо відкриту кулю відносно цієї норми.

Розглянемо для довільних $a \in \mathbb{R}^d$ та $r > 0$ нескінченно диференційовну функцію $\varphi_{a,r} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ таку, що $\mathrm{supp}\varphi_{a,r} = B(a, r)$ (наприклад, $\varphi_{a,r}(x) = e^{-\frac{1}{r^2 - \|x-a\|^2}}$ при $x \in B(a, r)$ і $\varphi_{a,r}(x) = 0$ в інших точках $\mathbb{R}^d$). Далі занумеруємо в послідовність $\big((a_n, r_n)\big)_{n=1}^{\infty}$

всі центри куль $a \in \mathbb{Q}^d$ та їх радіуси $r \in \mathbb{Q}^+$ такі, що $B(a,r) \cap F = \emptyset$. Покладемо $\psi_n = \varphi_{a_n, r_n}$. Підберемо тепер коефіцієнти $\lambda_n > 0$ так, щоб функція $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n$ була б нескінченно диференційовною. Для цього достатньо забезпечити рівномірну збіжність всіх рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\partial^k \psi_n(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$. Нехай $\mu_n = \max\left\{\left|\frac{\partial^k \psi_n(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}\right| : x \in \mathbb{R}^d, i_s \leq d, k \leq n\right\}$ і $\lambda_n = \frac{1}{2^n \mu_n}$. Тоді при $n \geq k$ і $x \in \mathbb{R}^d$ матимемо, що $\lambda_n \left|\frac{\partial^k \psi_n(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}\right| \leq \lambda_n \mu_n = \frac{1}{2^n}$. Отже, ψ – шукана функція.

Твердження 2.3. *Нехай $\varphi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ – опукла функція і $F \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ – замкнена ніде не щільна множина. Тоді множина $E = \{(x, \varphi(x)) : x \in F\}$ – l-стична в $\mathbb{R}^d$.*

Доведення. Використавши попереднє твердження, візьмемо таку диференційовну функцію $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to [0, +\infty)$, яка перетворюється в нуль лише на множині F. Розглянемо множину $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : \varphi(x) < y < \varphi(x) + \psi(x)\}$ і покажемо, що $M = \mathbb{R}^d \setminus G$ є шуканим l-околом множини E. Оскільки функції φ і ψ неперервні то G відкрита, а значить, M замкнена.

Розглянемо $z_0 \in E$. Тоді $z_0 = (x_0, y_0)$, де $x_0 \in F$ і $y_0 = \varphi(x_0)$. Покажемо, що $z_0 \in \overline{G} = \overline{\mathbb{R}^d \setminus M}$. Нехай U та V околи точок x_0 та y_0 відповідно і $W = U \times V$. Оскільки функції φ та ψ неперервні, $\psi(x_0) = 0$ і F ніде не щільна, то існує таке $x_1 \in U \setminus F$, що $y_1 = \varphi(x_1) + \frac{1}{2}\psi(x_1) \in V$. Тоді $z_1 = (x_1, y_1) \in G \cap W$.

Доведемо тепер, що M є l-околом точки z_0. Візьмемо напрямок $w = (u, v) \in \mathbb{R}^d$, де $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, а $v \in \mathbb{R}$, і знайдемо $\varepsilon > 0$, таке, що $[z_0, z_0 + \varepsilon w] \subseteq M$. Випадок $u = 0$ очевидний, адже тоді вся пряма, що проходить через точку z_0 в напрямку w міститься в M.

Нехай тепер $u \neq 0$. Розглянемо функції $f(t) = \varphi(x_0 + tu)$ і $g(t) = \psi(x_0 + tu)$, $t \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що f опукла а g диференційовна. Оскільки точки $t = 0$ є точкою мінімуму функції g, то $g'(0) = 0$. Далі, за рахунок опуклості f, існує права похідна $k_+ = f'_+(0)$. Таким чином, функція $f + g$ також має праву похідну, причому $(f+g)'_+(0) = k_+$. Якщо $v \leq k_+$, то промінь $y = vt + y_0$, $t > 0$, проходить нижче правої дотичної до графіка функції f в точці 0. А тому, за рахунок опуклості, $y = vt + y_0 \leq k_+ t + y_0 \leq f(t) \leq f(t) + g(t)$, при $t \geq 0$. Нехай $v > k_+$. Оскільки $k_+ = \lim\limits_{t \to +0} \frac{f(t)+g(t)-y_0}{t}$, то для деякого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $v > \frac{f(t)+g(t)-y_0}{t}$ при $0 < t \leq \varepsilon$. Тоді $f(t) \leq f(t) + g(t) \leq vt + y_0$, при $0 \leq t \leq \varepsilon$. Отже, так чи інакше, ми будемо мати, що для деякого $\varepsilon > 0$ виконується, що $vt + y_0 \notin (f(t), f(t) + g(t))$ при $0 \leq t \leq \varepsilon$. Повертаючись до функцій φ і ψ матимемо, що $vt + y_0 \notin (\varphi(x_0 + ut), \varphi(x_0 + ut) + \psi(x_0 + ut))$ при $0 \leq t \leq \varepsilon$. Отже, $[z_0, z_0 + \varepsilon w] = \{(x_0 + ut, y_0 + vt) : 0 \leq t \leq \varepsilon\} \subseteq M$.

Таким чином, M – замкнений l-окіл множини F, такий, що $F \subseteq \overline{\mathbb{R}^d \setminus M}$. Отже, F – l-стична множина.

3. Побудова l-неперервної функції з даною множиною точок розриву

Лема 3.1. *Нехай E – l-стична підмножина $\mathbb{R}^d$. Тоді існують замкнений l-окіл M множини E і множина $A \subseteq \mathbb{R}^d \setminus M$ такі, що $\overline{A} \cap M = E$.*

Доведення. Розглянемо деякий замкнений l-окіл M множини E, для якого $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^d \setminus M}$. Нехай $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ щільна в E. Для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ виберемо точку $a_{mn} \in B(x_n, \frac{1}{m+n}) \setminus M$. Тоді множина $A = \{a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$ шукана.

Теорема 3.2. *Нехай E – σ-l-стична підмножина $\mathbb{R}^d$. Тоді існує напівнеперервна знизу l-неперервна функція $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ така, що $D(f) = E$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок l-стичної множини E. Виберемо M і A такі, як в лемі 3.1. Нехай $X = \mathbb{R}^d \setminus E$ і $B = M \cap X$. Оскільки $\overline{A} \cap \overline{B} \cap X = \emptyset$, то за лемою Урисона існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 1$ на A і $f(x) = 0$ на B. Довизначимо f поклавши $f(x) = 0$ на E. Тоді $f(x) = 1$ на A і $f(x) = 0$ на M. Зрозуміло, що поза множиною E функція f неперервна, а значить, і l-неперервна. Крім того, оскільки M – l-окіл E і $f(x) = 0$ на M, то f l-неперервна в точках множини E, Отже, f l-неперервна на $\mathbb{R}^d$. Далі, ясно, що $D(f) \subseteq E$. Крім того, оскільки $f(x)=1$ на A і $f(x)=0$ на $E\subseteq\overline{A}$, то $D(f)=E\subseteq f^{-1}(0)$ і тому f напівнеперервна зверху.

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, де E_n – l-стичні. Побудуємо для кожного n таку напівнеперервну знизу l-неперервну функцію $f_n:\mathbb{R}^d\to[0,1]$, що $D(f_n)=E_n$. Тоді $f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n$ є напівнеперервною знизу l-неперервною функцією, причому, міркуючи як в [1, лема 2], нескладно довести, що $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}D(f_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$.

4. Характеризация множин точок розриву l-неперервних функцій

Теорема 4.1. *Нехай E – підмножина $\mathbb{R}^n$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) E – σ-l-стична;

(ii) існує напівнеперервна l-неперервна функція $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ така, що $D(f)=E$;

(iii) існує така l-неперервна функція першого класу $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, що $D(f)=E$.

Доведення. Імплікація (i)$\Rightarrow$(ii) доведена в теоремі 3.2. Оскільки на досконало нормальному просторі кожна напівнеперервна функція належить до першого класу [4, с.182], то (ii)$\Rightarrow$(iii). Доведемо, що (iii)$\Rightarrow$(i).

Занумеруємо в послідовність $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ всі інтервали з раціональними кінцями. Покладемо $E_n=f^{-1}(V_n)\setminus\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}$. Оскільки функція f належить до першого класу, то E_n – множини типу F_σ. Розглянемо замкнені множини E_{nk}, такі, що $E_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{nk}$.

Доведемо, що $D(f)=\bigcup_{n,k=1}^{\infty}E_{nk}$. Перевіримо спочатку включення $\subseteq$. Нехай $x_0\in D(f)$. Тоді існує така множина $A\subseteq\mathbb{R}^d$, що для неї $x_0\in\overline{A}$, але $f(x_0)\notin\overline{f(A)}$. Візьмемо таке $n\in\mathbb{N}$, що $f(x_0)\in V_n$ і $\overline{V}_n\cap f(A)=\emptyset$. Покажемо, що $x_0\in E_n$. По-перше, зрозуміло, що $x_0\in f^{-1}(V_n)$. Припустимо, що $x_0\in\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}$. Тоді, оскільки $x_0\in\overline{A}$, то $A\cap\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}\neq\emptyset$. Візьмемо $a\in A\cap\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}$. Але кожна лінійно неперервна функція є нарізно неперервною, а значить, і квазінеперервною [5, теорема III]. Тому (див. [1, лема 1]) $f(\mathrm{int}\overline{S})\subseteq\overline{f(S)}$, для довільної множини $S\subseteq\mathbb{R}^d$. Тому $f(a)\in f(\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(V_n))}\subseteq\overline{V}_n$, що неможливо. Таким чином, $x_0\in f^{-1}(V_n)\setminus\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}=E_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{nk}$.

Доведемо тепер зворотне включення. Візьмемо $x_0\in E_{nk}$. Тоді $x_0\in E_n=f^{-1}(V_n)\setminus\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}$. Нехай $A=\mathbb{R}^d\setminus f^{-1}(V_n)$. Тоді $\overline{A}=\overline{\mathbb{R}^d\setminus f^{-1}(V_n)}=\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\overline{f^{-1}(V_n)}\ni x_0$ і $\overline{f(A)}\subseteq\mathbb{R}\setminus V_n\not\ni f(x_0)$. Отже, $x_0\in D(f)$.

Залишилось довести, що множини E_{nk} l-стичні. Нехай $M_n=\overline{f^{-1}(V_n)}$. Зрозуміло, що M_n є замкненим l-околом множини E_{nk}. Крім того, $E_{nk}\subseteq E_n\subseteq\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}M_n=\overline{\mathbb{R}^d\setminus M_n}$.

Оскільки з l-неперервності випливає нарізна неперервність, а нарізно неперервні функції двох дійсних змінних автоматично є функціями першого класу Бера [6], то для функцій двох змінних попередня теорема дає повний опис множини точок розриву l-неперервних функцій.

Наслідок 4.2. *Нехай E – підмножина $\mathbb{R}^2$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) E – σ-l-стична;

(ii) існує напівнеперервна l-неперервна функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ така, що $D(f)=E$;

(iii) існує така l-неперервна функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, що $D(f)=E$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів// Укр. мат. ж. – 2000. – **52**, N6. – С.740 - 747.

2. *Malyuchenko O.V.*, The discontinuity point sets of quasi-continuous functions // Bul. Austral. Math. Soc. – 2007. – **75**. – P.373-379.

3. *Young W.H., Young G.G.* Discontinuous functions continuous with respect to every straight line// Quart. J. Pure Appl. Math. – 1909. – **41**. – P. 87-93.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752с.

5. *Hahn H.* Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sint// Math. Z. – 1919. – **4**. – S. 306 - 319.

6. *Lebesque H.* Sur l'approximation des fonctions// Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P.278-287.