УДК 517.9

©2008 р. **М.І.Масікевич, М.І.Матійчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОЦІНКИ МАТРИЦІ ГРІНА В ЧВЕРТІ ПРОСТОРУ B-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Установлено оцінки матриці Гріна B-параболічної системи з імпульсною дією у чверті простору за часовою та однією просторовою змінними.

Estimations of Green's matrix for a parabolic system with an impulse action was established in a quarter of the space with respect to the hour variable and one of the spatial variables.

Часто при вивченні еволюції реальних процесів з короткотривалими збуреннями зручно знехтувати їх тривалістю і вважати ці збурення миттєвими. Таке трактування приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями, або так звані, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у працях А.М.Самойленка та О.М.Перестюка [3].

З іншого боку, існує завершена теорія задачі Коші та крайових задач для систем з регулярними та сингулярними коефіцієнтами [1, 2, 4].

У цій статті введено означення Λ_ω-умов матриці Гріна B-параболічних систем з імпульсною дією та розглянуто випадки виконання цих оцінок.

1. Означення та допоміжні твердження. Розглянемо в шарі $\Pi^+ = (t_0;\infty) \times E_n^+$, $E_n^+ = E_{n-1} \times (0;\infty)$ систему лінійних рівнянь

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t) D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x), \quad (1)$$

де $|k| = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$, $x \in E_n^+$, $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x_n > 0$, $D_{x'}^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$.

Означення B-параболічної системи. Система рівнянь (1) називається рівномірно B-параболічною, якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\det\left(\sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(t)(i\sigma)^k(-\sigma_n^2)^j - \lambda E\right) = 0$$

задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda(t,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b},$$

$\delta = const > 0$.

Пряме та обернене перетворення Фур'є-Бесселя. Пряме перетворення:

$$\psi(\sigma) = F\varphi(x) =$$

$$= \int_{E_n^+} e^{-i\sigma'x'}\varphi(x) j_\nu(\sigma_n x_n) x_n^{2\nu+1} dx \ \ (\nu > -1/2),$$

обернене перетворення:

$$\varphi(x) = F^{-1}\psi = c'_\nu \int_{E_n^+} e^{i\sigma'x'}\psi(\sigma) j_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma,$$

де $c'_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1)$, $j_\nu(\sigma_n x_n)$ – нормована функція Бесселя, яка дорівнює

$$j_\nu(\sigma_n x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+k)\Gamma(k+1)}\left(\frac{\sigma_n x_n}{2}\right)^{2k}.$$

Згортка функції. На елементах простору нескінченно диференційовних функцій, парних по останньому аргументу, спадних при

$|x| \to \infty$ не повільніше ніж $|x|^{-m}$ (m – довільне фіксоване число) визначена операція згортки

$$f * g = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} f(x' - \xi', x_n) g(\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi,$$

де

$$T_{x_n}^{\xi_n} f(x) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi f(x', \sqrt{x_n^2 + \xi_n^2 - 2x_n\xi_n \cos\alpha}) \sin^{2\nu} \alpha d\alpha \ -$$

оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя B_{x_n}.

Лема [1, с. 36] (про перетворення Фур'є). Нехай $f(s)$ – ціла функція n комплексних змінних $s_1, s_2, \ldots, s_n$, $s_k = \sigma_k + i\gamma_k$, яка задовольняє нерівність

$$|f(s)| \le C \exp\left\{ -\sum_{k=1}^n a_k |\sigma_k|^{p_k} + \sum_{k=1}^n b_k |\sigma_k|^{q_k} \right\},$$

$p_k > 1, q_k > 1, a_k > 0, b_k > 0$.

Тоді її перетворення Фур'є $\psi(z)$ є цілою функцією змінних $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_k = x_k + iy_k$ і для нього справедлива оцінка

$$|\psi(z)| = |F(f(\sigma))| \le B \exp\left\{ -\sum_{k=1}^n \alpha_k |x_k|^{q'_k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n \beta_k |y_k|^{p'_k} \right\},$$

$\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\dfrac{1}{p_k} + \dfrac{1}{p'_k} = 1$, $\dfrac{1}{q_k} + \dfrac{1}{q'_k} = 1$.

Лема [2, с. 14] (про перетворення Бесселя). Нехай $f(s)$ – ціла парна функція аргументу $s = \sigma + i\gamma$, для якої справджується нерівність

$$|f(\sigma + i\gamma)| \le C \exp\{-C_1|\sigma|^p + C_2|\gamma|^q\},$$

де C, C_1, $C_2 > 0$, p, $q > 1$.

Тоді її перетворення Бесселя

$$\tilde{f}(x) = \int\limits_0^\infty f(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma$$

є цілою функцією аргументу $z = x + iy$ і справедливі оцінки

$$|D_x^k B_x^j T_x^\xi \tilde{f}(x)| \le C_{kj} T_x^{\xi_n} \{e^{-c_2 x^{q'}}\},$$

$$|D_z^k \tilde{f}(x+iy)| \le C_k \exp\{c_3 |y|^{p'}\},$$

де $p' = p(p-1)^{-1}$, $q' = q(q-1)^{-1}$, C_k, C_{kj}, c_2, c_3 залежать від C, C_1, p, q.

2. Постановка задачі та оцінки матриціанту. Знайдемо класичний розв'язок задачі Коші з імпульсною дією

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x), \quad t \ne \tau_i, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta_t u(t,x)|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x), \tag{3}$$

де елементи матриці $A_{kj}(t)$ – неперервні і обмежені при $t \ge t_0 \ge 0$, матриці B_i сталі, $\varphi(x)$ досить гладка фінітна функція в E_n^+, парна по x_n,

$$\Delta_t u|_{t=\tau_i} = u(\tau_i + 0, x) - u(\tau_i, x),$$

$$u(\tau_i, x) = \lim_{t \to \tau_i - 0} u(t,x),$$

$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p = T$.

За допомогою перетворення Фур'є-Бесселя задача Коші (1) – (3) зводиться до задачі Коші системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) (i\sigma')^k (-\sigma_n^2)^j v(t,\sigma),$$

$$t \ne \tau_i, \tag{4}$$

$$v(t,\sigma)|_{t=t_0} = v_0(\sigma), \tag{5}$$

$$\Delta_t v(t,\sigma)|_{t=\tau_i} = B_i v(\tau_i, \sigma), \tag{6}$$

де

$$v_0(\sigma) = F\varphi(x) = \int\limits_{E_n^+} e^{-i\sigma' x'} \varphi(x) j_\nu(\sigma_n x_n) x_n^{2\nu+1} dx.$$

Нехай $Q(t,t_0,\sigma)$ – нормальна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші [2, с. 20]

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j Q,$$

$$Q(t,t_0,\sigma)|_{t=t_0} = E.$$

Тоді матрицант $V(t,t_0,\sigma)$ задачі (4) – (6) визначається формулою [3, с.51]

$$V(t,t_0,\sigma) = Q(t,\tau_{p-1},\sigma)\prod_{i=p-1}^{1}((E+B_i)\times$$

$$\times Q(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma)),$$

$\tau_0 = t_0, \tau_{p-1} < t \le \tau_p$.

Якщо матриці $E+B_i$ невироджені, то матрицант $V(t,t_0,\sigma)$ також невироджена матриця.

Розв'язок задачі (4) – (6) визначається формулою

$$v(t,\sigma) = V(t,t_0,\sigma)v_0(\sigma).$$

Матриця $Q(t,t_0,\sigma)$ при $t > t_0$ є цілою функцією аргументу $\sigma+i\gamma$, парною відносно останнього аргументу σ_n, і для її норми виконується нерівність [2, с.20]

$$|Q(t,t_0,\frac{\sigma+i\gamma}{(t-t_0)^{1/(2b)}})| \le$$

$$\le C\exp\{-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}\}, 0<\delta_1<\delta, F_1>0.$$

Це твердження доводиться на основі B-параболічної системи аналогічно, як і для параболічних систем [1, с. 46].

На основі оцінок матриці $Q(t,t_0,\sigma)$ одержуються відповідні оцінки матрицанту

$$|V(t,t_0,\frac{\sigma+i\gamma}{(t-t_0)^{1/(2b)}})| \le$$

$$\le C^pB\exp\{-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}\},$$

де $B = \prod_{i=1}^{p-1}|E+B_i|$.

Тоді розв'язок задачі (1) – (3) визначається формулою [2, с.21]

$$u(t,x) = \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,t_0,x'-\xi',x_n)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+}d\xi, \tag{7}$$

де

$$G(t,t_0,x'-\xi',x_n) =$$

$$= c'_\nu \int_{E_n^+} e^{i\sigma'(x'-\xi')}V(t,t_0,\sigma)j_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu+1}d\sigma -$$

матриця Гріна задачі Коші (1) – (3).

Для дослідження властивостей матриці Гріна задачі Коші в необмежених за часовою змінною областях, важливо одержати виконання Λ_ω-умов. Далі буде сформульовано означення Λ_ω-умов та розглянуто класи систем, які задовольняють ці умови.

Означення Λ_ω-умов. Система (1) задовольняє Λ_ω-умову, $\omega\in E_1$, якщо існує матриця Гріна задачі (1) – (3), яка має похідні $D_{x'}^k D_{x_n}^l B_{x_n}^j G(t,t_0,x',x_n,\xi_n)$ і справджується оцінка

$$|D_{x'}^k D_{x_n}^l B_{x_n}^j G(t,t_0,x',x_n,\xi_n)| \le C_{klj}\times$$

$$\times a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+l+|k|)}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{\omega(t-t_0)}e^{-c|\frac{x}{a(t,t_0)}|^q}\right\}, \tag{8}$$

$\{t,t_0\}\subset[t_0;\infty)$, $t_0<t$, $x\in E_n^+$, $\xi_n>0$, $a(t,t_0)$ – неперервна монотонно зростаюча функція аргумента t така, що $a(t_0,t_0)=0$, C_{klj}, c – додатні сталі, залежні від δ, ν, $\sup_t|A_{kj}(t)|$, модуля неперервності коефіцієнтів $A_{kj}(t)$ при $|k|+2j=2b$, $n_\nu=n+2\nu+1$, $q=\dfrac{2b}{2b-1}$.

Наведемо деякі приклади класів систем, які задовольняють Λ_ω-умови з $\omega\le 0$.

<u>Випадок 1.</u> Нехай коефіцієнти системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|+j=2b} A_{kj}(t)D_{x'}^k B_{x_n}^j u \tag{9}$$

є неперервними і обмеженими при $t\in[t_0,\infty)$ та існує стала $\mu>0$ така, що для довільних

t, дійсного вектора σ та комплексного вектора a справджується оцінка

$$\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(t)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j a, \overline{a}\Bigg) \leq$$

$$\leq -\mu|\sigma|^{2b}|a|^2, \qquad (10)$$

де μ – додатна стала, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у просторі C^N. Тоді система (9) задовольняє Λ_0-умову з $a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}$.

Для доведення розглянемо відповідну систему в образах Фур'є-Бесселя

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|+2j\leq 2b} A_{kj}(t)(is')^k(-s_n^2)^j v \equiv P_0(t,s)v,$$

$$s=\sigma+i\gamma.$$

Нехай Q_l – стовпчик з номером l фундаментальної матриці розв'язків $Q(t,t_0,s)$. Тоді

$$\mathrm{Re}(P_0(t,s)Q_l,Q_l) = \frac{1}{2}[(P_0(t,s)Q_l,Q_l)+$$

$$+\overline{(P_0(t,s)Q_l,Q_l)}] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Big(\frac{dQ_l}{dt},\overline{Q}_l\Big)+\Big(\overline{Q}_l,\frac{d\overline{Q}_l}{dt}\Big)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Q_l|^2.$$

З умови (10) і леми 2.1 [1, с. 38] маємо

$$\mathrm{Re}(P(t,s)Q_l,\overline{Q}_l) \leq (-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b})|Q_l|^2,$$

$$0<\delta_1<\delta, F_1>0,$$

і

$$\frac{d}{dt}|Q_l|^2 \leq (-2\delta_1|\sigma|^{2b}+2F_1|\gamma|^{2b})|Q_l|^2.$$

Проінтегрувавши останню нерівність і використавши лему 4.1 [1, с. 39], одержимо

$$|Q(t,t_0,s)| \leq Ce^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b})(t-t_0)}. \qquad (11)$$

З (11) і зображення матриціанту маємо

$$|V(t,t_0,s)| \leq C^p B e^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b})a^{2b}(t,t_0)},$$

де $a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}$, $0<\delta_1<\delta$, $F_1>0$, або

$$|V(t,t_0,\frac{\sigma+i\gamma}{a(t,t_0)})| \leq C^p e^{-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}},$$

де $B=\prod_{i=1}^{p-1}|E+B_i|$.

Відносно цього аргумента матрицант є цілою функцією зі сталим типом.

<u>Випадок 2.</u> Нехай для B-параболічної системи зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=2r}\sum_{|l|+2j=k} A_{lj}D_{x'}^l B_{x_n}^j u(t,x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=2r}^{2b} P_k(D,B)u(t,x) \qquad (12)$$

виконуються наступні припущення:

а) дійсні частини λ-коренів рівняння $\det\left\{\sum_{k=2r}^{2b}P_k(\sigma)-\lambda E\right\}=0$ дорівнюють нулеві тільки при $\sigma=0$;

б) дійсні частини власних чисел матриці $P_{2r}(\sigma)$ не дорівнюють нулеві при $|\sigma|=1$.

Тоді система (12) задовольняє Λ_0-умову з

$$a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}, t-t_0\leq 1;$$

$$a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2r)}, t-t_0>1.$$

Для доведення цього факту, оцінимо матрицант системи. Оцінку досить провести, вважаючи, що $t-t_0>1$.

Позначимо $\alpha'=\dfrac{\alpha}{(t-t_0)^{1/(2r)}}$, $\gamma'=\dfrac{\gamma}{(t-t_0)^{1/(2r)}}$. Враховуючи оцінку

$$\left|\exp\Big\{P\Big(\frac{\alpha+i\gamma}{(t-\tau_0)^{1/(2r)}}\Big)(t-\tau)\Big\}\right| \leq$$

$$\leq Ce^{-\delta_1|\alpha|^{2r}+F_1|\gamma|^{2b}} \ [1, \text{с.}120]$$

та введені позначення, отримаємо

$$|\exp\{P(\alpha'+i\gamma')(t-t_0)\}| \leq$$

$$\leq Ce^{-\delta_1|\alpha'|^{2r}(t-t_0)+F_1|\gamma'|^{2b}(t-t_0)^{\frac{2b}{2r}}}.$$

Із зображення матрицанта маємо оцінку для його норми

$$|V(t,t_0,\frac{\alpha+i\gamma}{a(t,t_0)})| \leq C^p e^{(-\delta_1|\alpha|^{2r}+F_1|\gamma|^{2b})}.$$

Випадок 3. Нехай коефіцієнти B-параболічної системи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x) \qquad (13)$$

сталі та дійсні частини λ-коренів рівняння $\det\left\{\sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j - \lambda E\right\} = 0$ не дорівнюють нулеві при жодних $\sigma \in E_n$.

Тоді система (13) задовольняє Λ_ω-умову з $\omega < 0$, $a(t,t_0) = (t-t_0)^{1/(2b)}$.

Як і раніше, для доведення оцінимо матрицант системи. Розглянемо рівняння

$$\det\left\{\sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j\beta^{2b-|k|-2j} - \lambda E\right\} = 0.$$

Його корені $\lambda(\sigma,\beta)$ є однорідними функціями степеня $2b$ від σ, β і при $|\sigma|^2+\beta^2 = 1$ вони задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta) < -\delta$. Для $\beta = 0$ від'ємність $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta)$ випливає з умови B-параболічності, а дорівнювати нулеві $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta)$ не може за припущенням.

Розглянемо допоміжну систему

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j\beta^{2b-|k|-2j} W \equiv$$

$$\equiv P(\sigma,\beta)W, \qquad (14)$$

$$W(t,\sigma,\beta)|_{t=t_0} \equiv W_0(\sigma,\beta),$$

$$\Delta_t W(t,\sigma,\beta)|_{t=\tau_i} \equiv B_i W(\tau_i,\sigma,\beta).$$

Розв'язок цієї системи дається формулою

$$W(t,s,\beta) = e^{P(s,\beta)(t-\tau_{p-1})}\times$$

$$\times \prod_{i=p-1}^{1}((E+B_i)e^{P(s,\beta)(\tau_i-\tau_{i-1})})W_0(\sigma,\beta).$$

Оскільки система (14) містить лише старшу групу членів, то можна використати оцінку (5) п. 2 §2 [1, с. 47]

$$|e^{P(s,\beta)t}| \le Ce^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}-\delta_1\beta^{2b})}.$$

Тоді

$$|W(t,s,\beta)| \le C^pBe^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}-\delta_1\beta^{2b})},$$

$$0<\delta_1<\delta, F_1 > F(\delta_1).$$

оскільки $W(t,s,\beta) = V(t,s)$, то

$$|V(t,\frac{\sigma+i\gamma}{a(t,t_0)})| \le$$

$$\le C^pBe^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b}-\delta_1 a^{2b}(t,t_0))}.$$

Випадок 4. Якщо коефіцієнти системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u \equiv P(t,D,B)u \qquad (15)$$

є неперервними і обмеженими функціями при $t \in [t_0,\infty)$ та існує стала $\mu > 0$ така, що для довільних $t\in[t_0,\infty)$, дійсних $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, β і комплексного a справджується нерівність

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j\beta^{2b-|k|-2j}a,\overline{a}\right\} \le$$

$$\le (|\sigma|^2+\beta^2)^b|a|^2, \qquad (16)$$

то ця система задовольняє Λ_ω-умову з $\omega < 0$, $a(t,t_0) = (t-t_0)^{1/(2b)}$.

Розглянемо допоміжну систему

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j\beta^{2b-|k|-2j}W. \qquad (17)$$

Система (17) відповідає B-параболічній системі, для якої виконуються умови прикладу 1 і яка містить лише старшу групу членів, тому доведення аналогічне доведенню випадку 1.

Випадок 5. Нехай для системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u \qquad (18)$$

виконуються наступні умови:

а) коефіцієнти $A_{kj}(t)$ неперервні і обмежені при $t\in[t_0,\infty)$;

б) λ-корені рівняння

$$\det\left\{\sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j\beta^{2b-|k|-2j}- -\lambda E\right\}=0 \qquad (19)$$

задовольняють умову

$$\mathrm{Re}\lambda(t,\sigma,\beta)<-\delta, \quad \delta>0,$$

для довільних $t\in[t_0,\infty)$, дійсних σ і β таких, що $|\sigma|^2+\beta^2=1$;

в) існують числа $\varepsilon>0$, $\Delta>0$ і $R>0$ такі, що для $\{t_1,t_2\}\subset[t_0,\infty)$, $|t_1|\ge R$, $|t_2|\ge R$, $|t_1-t_2|<\Delta$, справджуються нерівності

$$|A_{kj}(t_1)-A_{kj}(t_2)|<\varepsilon.$$

Тоді система (18) задовольняє Λ_ω-умову з $\omega<0$, $a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}$.

Щоб довести Λ_ω-умову, знайдемо оцінку матрицанту. Для цього оцінимо нормальну фундаментальну матрицю $Q(t,t_0,s)$ системи (17). За допомогою міркувань, проведених в першому випадку та умови б), вибравши досить малим ε і використовуючи методику з [1, с. 46], прийдемо до нерівності

$$|Q(t,t_0,s)|\le\tilde C|Q(t_m,t_0,s)|\times$$
$$\times e^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F|\gamma|^{2b}-\delta_1)(t-t_m)}, t\in[t_m,t_{m+1}],$$

де $t_0\ge R$, $t_m=t_0+(m-1)\Delta$, $m\ge1$, $0<\delta_1<\delta$, $\tilde C>0$, $F>0$.

Візьмемо $\Delta=\dfrac{2}{\delta_1}\ln\tilde C$ і доведемо правильність для $m\ge1$ оцінки

$$|Q(t,t_0,s)|\le\tilde C\exp\left\{\Big(-\frac{\delta_1}{2}(t-t_m)-\frac{\delta_1}{2}(t-t_0)\Big)+\right.$$
$$\left.+(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F|\gamma|^{2b})(t-t_0)\right\}, t\in[t_m,t_{m+1}].$$

Методом математичної індукції безпосередньо можна довести, що

$$|Q(t,t_0,s)|\le Ce^{\left(-\frac{\delta_1}{2}-\delta_1|\sigma|^{2b}+F|\gamma|^{2b}\right)(t-t_0)}$$

для довільних t, t_0 таких, що $R\le t_0\le t$.

Для матрицанту маємо

$$|V(t,t_0,\frac{\sigma+i\gamma}{a(t,t_0)})|\le C^pB\times$$
$$\times e^{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F|\gamma|^{2b}-\frac{\delta_1}{2}a^{2b}(t,t_0))},$$

де $a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}$.

3. Оцінка матриці Гріна. В попередньому пункті вводилося означення Λ_ω-умов та розглядалися класи систем, які задовольняють ці умови. В кожному з випадків одержувалися оцінки матрицанту. В даному пункті буде показано, як безпосередньо з оцінок матриціанту одержуються Λ_ω-умови для матриці Гріна.

Нехай

$$|V(t,t_0,\frac{\sigma+i\gamma}{a(t,t_0)})|\le C\exp\{-\delta_1|\sigma|^{2b}+$$
$$+F_1|\gamma|^{2b}+\omega(t-t_0)\},$$

$a(t,t_0)=(t-t_0)^{1/(2b)}$, $\omega\le0$.

Позначимо $\hat\sigma=\dfrac{\sigma}{a(t,t_0)}$. Запишемо перетворення Фур'є-Бесселя матрицанту $V(t,t_0,\hat\sigma)$:

$$G(t,t_0,x)=c'_\nu\int_{E_n^+}e^{i\hat\sigma'x'}V(t,t_0,\hat\sigma)j_\nu(\hat\sigma_nx_n)\times$$
$$\times\hat\sigma_n^{2\nu+1}d\hat\sigma=c'_\nu\int_{E_{n-1}}e^{i\sigma'\hat x'}\left(\int_0^\infty V(t,t_0,\hat\sigma)\times\right.$$
$$\left.\times j_\nu(\sigma_n\hat x_n)\sigma_n^{2\nu+1}(t-t_0)^{-\frac{2\nu+1}{2b}}d\sigma_n\right)d\hat\sigma'(t-t_0)^{-\frac{n}{2b}}=$$
$$=c'_\nu\int_{E_{n-1}}e^{i\sigma'\hat x'}\psi(t,t_0,\hat\sigma',\hat x_n)d\sigma'(t-t_0)^{-\frac{2\nu+1+n}{2b}}, \qquad (20)$$

де

$$\psi(t,t_0,\hat\sigma',\hat x_n)=$$
$$=\int_0^\infty V(t,t_0,\hat\sigma)j_\nu(\sigma_n\hat x_n)\sigma_n^{2\nu+1}d\sigma_n.$$

Функція $V(t,t_0,\hat\sigma)$ задовольняє всі умови леми про перетворення Бесселя цілих функцій, тому $\psi(t,t_0,\hat\sigma',\hat x_n)$ – нескінченно-диференційовна функція по x_n і задовольняє нерівність:

$$|D^l_{\hat x_n} D^j_{\hat x_n} T^{\hat\xi_n}_{\hat x_n}\psi(t,t_0,\hat\sigma',\hat x_n)| \le$$
$$\le C_{lj} e^{-\delta_1|\sigma'|^{2b}+F_1|\gamma'|^{2b}+\omega(t-t_0)} T^{\hat\xi_n}_{\hat x_n}\{e^{-c_1\hat x_n^q}\}. \quad (21)$$

Інтеграл (20) є перетворенням Фур'є по σ' функції $\psi(t,t_0,\hat\sigma',\hat x_n)$, яка є цілою і задовольняє (21). Згідно з лемою про перетворення Фур'є функція $G(t,t_0,x)$ як функція аргументів $\hat x_1, \ldots, \hat x_{n-1}$ є цілою функцією і для неї справедлива оцінка

$$|G(t,t_0,x+iy')| \le C(t-t_0)^{-\frac{2\nu+1+n}{2b}} \times$$
$$\times \exp\left\{ -c\sum_{s=1}^{n} \hat x_s^q + c_1\sum_{s=1}^{n-1}\hat y_s^q + \omega(t-t_0)\right\}$$

або

$$|G(t,t_0,x+iy')| \le C(t-t_0)^{-\frac{n_\nu}{2b}} \times$$
$$\times \exp\left\{ -c\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{x_s}{a(t,t_0)}\right)^q + \right.$$
$$\left. + c_1\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{y_s}{a(t,t_0)}\right)^q + \omega(t-t_0)\right\}.$$

Отже,

$$|G(t,t_0,x+iy')| \le Ca(t,t_0)^{n_\nu} \times$$
$$\times \exp\left\{-c\left|\frac{x}{a(t,t_0)}\right|^q + c_1\left|\frac{y}{a(t,t_0)}\right|^q + \omega(t-t_0)\right\},$$

де $a(t,t_0) = (t-t_0)^{1/(2b)}$, $n_\nu = 2\nu+1+n$, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$, C, c, c_1 – додатні сталі, які залежать від δ, ν; $\sup\limits_t |A_{kj}(t)|$, модуля неперервності $A_{kj}(t)$ при $|k|+2j = 2b$.

Далі одержимо оцінки для похідних матриці Гріна. Для цього обчислимо

$$D^k_{x'} D^l_{x_n} B^j_{x_n} G(t,t_0,x,\xi) = D^k_{x'} D^l_{x_n} B^j_{x_n} T^{\xi_n}_{x_n} \times$$
$$\times G(t,t_0,x'-\xi',x_n) = D^k_{x'} D^l_{x_n} B^j_{x_n} T^{\xi_n}_{x_n} \times$$
$$\times \left(c'_\nu \int\limits_{E_{n-1}} e^{i\hat\sigma'(x'-\xi')}\psi(t,t_0,\hat\sigma',x_n)d\hat\sigma'\right) =$$
$$= c'_\nu \int\limits_{E_{n-1}} e^{i\sigma'(\hat x'-\hat\xi')} D^l_{\hat x_n} B^j_{\hat x_n} T^{\hat\xi_n}_{\hat x_n}\psi(t,t_0,\hat\sigma',x_n) \times$$
$$\times (i\hat\sigma')^k d\sigma'(t-t_0)^{-\frac{n-1}{2b}} =$$
$$= c'_\nu \int\limits_{E_{n-1}} e^{i\sigma'(\hat x'-\hat\xi')} D^l_{\hat x_n} B^j_{\hat x_n} T^{\hat\xi_n}_{\hat x_n}\psi(t,t_0,\hat\sigma',x_n) \times$$
$$\times (i\hat\sigma')^k d\sigma'(t-t_0)^{-\frac{n_\nu+2j+l+|k|}{2b}}.$$

Використовуючи оцінку (19) і лему про перетворення Фур'є, отримаємо Λ_ω-умову:

$$|D^k_{x'} D^l_{x_n} B^j_{x_n} G(t,t_0,x',x_n,\xi_n) \le$$
$$\le C_{klj}(t-t_0)^{-\frac{n_\nu+2j+l+|k|}{2b}} \times$$
$$\times \exp\left\{-c\left|\frac{x'}{(t-t_0)^{1/(2b)}}\right|^q + c_1\left|\frac{y'}{(t-t_0)^{1/(2b)}}\right|^q + \right.$$
$$\left. + \omega(t-t_0)\right\} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\left|\frac{x_n}{(t-t_0)^{1/(2b)}}\right|^q}\right\} =$$
$$= C_{klj} a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+l+|k|)} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{\omega(t-t_0)} \times \right.$$
$$\left. \times e^{-c\left|\frac{x}{a(t,t_0)}\right|^q + c_1\left|\frac{y'}{a(t,t_0)}\right|^q}\right\},$$

де $a(t,t_0) = (t-t_0)^{\frac{1}{2b}}$, $n_\nu = n+2\nu+1$, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$, C_{klj}, c, c_1 – додатні сталі, залежні від δ, ν, $\sup\limits_t |A_{kj}(t)|$, модуля неперервності $A_{kj}(t)$ при $|k|+2j = 2b$.

Теорема. *Нехай в шарі Π^+ задано B-параболічну систему (1) зі сталими або залежними від t коефіцієнтами, задано початкову умову (2) та імпульсну дію (3). Нехай коефіцієнти $A_{kj}(t)$ неперервні і обмежені, початкова функція $\varphi(x)$ є досить гладкою фінітною функцією в E^+_n, парною по x_n, матриці B сталі такі, що $E+B_i$ – невироджені.*

Якщо у випадку 1 виконується умова сильної параболічності (10), у випадку 2 – умови а) і б), у випадку 3 – умови на корені характеристичного рівняння, у випадку 4 – умова (16) та у випадку 5 – умови а)

– в) на коефіцієнти системи (1) та корені характеристичного рівняння (19), то існує матриця Гріна задачі (1) – (3), для похідних якої виконуються Λ_ω-умови.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *С.Д.Эйдельман.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Высшая школа: Головное изд-во, 1987. – 228 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.