УДК 517.96

©2008 р. С.В.Мартинюк, О.В.Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Знайдено зображення гладких розв'язків одного класу еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором, встановлено коректну розв'язність задачі Коші для таких рівнянь у просторах ультрарозподілів.

We find an expansion of smooth solutions for a class of evolution equations with a harmonic oscillator and establish the correct solvability of the Cauchy problem for these equations in spaces of ultradistributions.

У розвитку багатьох важливих напрямів математики та фізики значну роль відіграли поняття та методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = -d^2/dx^2 + q(x)$. Функція q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор A називається гармонійним осцилятором. Еволюційне рівняння з таким оператором вигляду

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to \infty$.

М.Л.Горбачуком, В.І.Горбачук, О.І.Кашпіровським доведено, що розв'язок рівняння (1) завжди має граничне значення $u(0) = \lim\limits_{t\to+0} u(t)$ у просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу S' і за ним завжди однозначно відновлюється, тобто простори типу S' є просторами початкових даних гладких розв'язків задачі Коші для даного рівняння. Тут S' – простори, топологічно спряжені до просторів типу S, введених І.М.Гельфандом та Г.Є.Шиловим.

У працях М.Л.Горбачука, П.І.Дудникова, С.Д.Івасишена, Л.М.Андросової, О.Г.Возняк, В.В.Городецького, І.І.Дрінь, В.А.Літовченка, Н.М.Шевчук та ін. доведено, що простори типу S' є множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними параболічного типу (до яких відноситься і рівняння (1)), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями. Отже, природним є питання про одержання аналогічних результатів для еволюційних рівнянь вищого порядку по t з оператором $\varphi(A)$, де φ – деяка функція. Тут знайдено зображення гладких розв'язків таких еволюційних рівнянь з оператором $\varphi^\nu(A)$, $\nu > 0$, де A – гармонійний осцилятор, встановлено коректну розв'язність задачі Коші для вказаних рівнянь у просторах ультрарозподілів типу S'.

1. І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов ввели в [1] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ – деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватися довільним чином разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір Л.Шварца швидко спадних функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних α, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \Big| \exists c > 0 \, \exists A > 0 \, \exists B > 0$$

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати так [1].

Простори S_α^β складається з тих і тільки тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le c B^m m^{m\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}),$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, B і a, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \le c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$$c > 0, a > 0, b > 0.$$

Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$. Як відомо, у просторі $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_k(x) = (-1)^k \pi^{-1/4} (2^k k!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(k)},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Символом Φ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in H$ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} h_k(x),$$

$$c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+,$$

відповідно через Φ' позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи простору Φ' називатимемо узагальненими функціями. Зазначимо (див. [2]), що мають місце неперервні та щільні вкладення: $\Phi \subset H \subset \Phi'$.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k =< f, h_k >$, $f \in \Phi'$, називається рядом Фур'є-Ерміта узагальненої функції $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнтами Фур'є (тут $< f, \cdot >$ позначає дію функціоналу f на основну функцію). Із результатів, отриманих в [2] випливає, що Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$; при цьому правильними є наступні співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S) \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{N} \; \exists c = c(m) > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $|c_k| \le c(2k+1)^{-m})$;

б) $(f \in S') \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N} \; \exists c > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \le c(2k+1)^m)$;

в) $(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \; \exists c > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \le c \exp\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$;

г) $(f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \; \exists c = c(\mu) > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $|c_k| \le c \exp\{\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$.

2. Нагадаємо, що символом $D \equiv D(\mathbb{R})$ позначається множина всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Збіжність в D визначається так: послідовність $\{\varphi_k, k \ge 1\} \subset D$ називається збіжною в D до функції $\varphi \in D$, якщо:

а) існує $R > 0$ таке, що $\operatorname{supp} \varphi_k \subset (-R; R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (-R; R)$;

б) $\varphi_k^{(m)} \underset{k\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} \varphi^{(m)}$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.

Сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів на D зі слабкою збіжністю позначається символом $D' \equiv D'(\mathbb{R})$. Елементи D' називаються узагальненими функціями. Сукупність узагальнених функцій з D', які обертаються в нуль на півосі $(-\infty, 0)$, позначається через D'_+. Відомо [3], що для довільних $\{f, g\} \subset D'_+$ у просторі D'_+ існує згортка $f * g$, яка визначається співвідношенням

$$< f * g, \eta >=< f(x) \times g(y), \eta_1(x) \eta_2(y) \varphi(x+y) >,$$

$$\varphi \in D,$$

де η_1 і η_2 – довільні функцій з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, рівні одиниці в околі півосі $[0, \infty)$ і нулю для досить великих від'ємних значень аргументу. D'_+ утворює асоціативну і комутативну алгебру відносно операції згортки. Оскільки $\delta * f = f * \delta = f$, $\forall f \in D'_+$, то одиницею в ній є δ-функція Дірака.

Якщо узагальнена функція $f = f_t$ залежить від параметра t, $f_t \in D'_+$ при кожному t, існує $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$, $g \in D'_+$, то тоді [3]

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}(f_t * g) = \frac{\partial^m f_t}{\partial t^m} * g, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Нехай узагальнена функція $g_\alpha \in D'_+$ залежить від параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ і визначається формулою

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \theta(t) t^{\alpha-1} (\Gamma(\alpha))^{-1}, & \alpha > 0, \\ g^{(m)}_{\alpha+m}, & \alpha \le 0, \end{cases}$$

де m – найменше серед натуральних чисел таке, що $m + \alpha > 0$; θ – функція Хевісайда, тобто

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Правильними є наступні твердження [3]:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$: $g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}$.

2) Нехай $I(\alpha) g = g * g_\alpha$, $\forall g \in D'_+$. Тоді

а) $\forall g \in D'_+$: $I(0) g = g$;

б) $\forall g \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $I(-n) g = g^{(n)}$;

в) $\forall g \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $(I(n) g)^{(n)} = g$;

г) $\forall g \in D'_+$ $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$:

$$I(\alpha) I(\beta) g = I(\alpha + \beta) g.$$

Завдяки властивостям б) і в) оператори $I(\alpha)$ при $\alpha < 0$ називають операторами дробового диференціювання, а при $\alpha > 0$ – операторами дробового інтегрування в D'_+.

Розглянемо у просторі Φ' оператор $\widehat{A}_f$, дія якого на елементи з Φ' визначається співвідношенням

$$\Phi' \ni \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k = \varphi \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (f(2k+1))^\nu c_k h_k = $$
$$= \widehat{A}_f \varphi \in \Phi',$$

де $\nu > 0$ – фіксований параметр, f – неперервна, невід'ємна на $[0, \infty)$ функція, яка задовольняє умову:

$$\exists d_0 > 0 \ \forall x \in [0, \infty): \ \ f(x) \ge d_0 x.$$

Очевидно, оператор $\widehat{A}_f$ є лінійним і неперервним в Φ'.

Теорема 1. *Нехай $\widetilde{A}_f$ – звуження оператора $\widehat{A}_f$ на $L_2(\mathbb{R})$. Тоді $\widetilde{A}_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$ зі щільною в $L_2(\mathbb{R})$ областю визначення*

$$D(\widetilde{A}_f) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}): \ \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{2\nu} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,$$

$$c_k(\varphi) = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}\}, \tag{2}$$

$$\mu_k := \ f(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому $\Phi \subset D(\widetilde{A}_f)$.

Доведення. Оскільки $L_2(\mathbb{R})$ – гільбертів простір, $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ – ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$, то з означення оператора $\widetilde{A}_f$ випливає, що $D(\widetilde{A}_f)$ має вказаний вигляд. Якщо $\varphi \in \Phi \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \Phi'$, то $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{m(\varphi)} c_k h_k$, при цьому

$$\widetilde{A}_f \varphi = \widehat{A}_f \varphi = \sum_{k=0}^{m} \mu_\nu^k c_k h_k.$$

Отже, для $\varphi \in \Phi$ умова (2) виконується. Таким чином, $\Phi \subset D(\widetilde{A}_f)$. Цим доведено, що $\overline{D(\widetilde{A}_f)} = L_2(\mathbb{R})$.

Оператор $\widetilde{A}_f$ симетричний в $L_2(\mathbb{R})$, бо

$$(\widetilde{A}_f, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^\nu c_k(\varphi) \overline{c_k(\psi)} = (\varphi, \widetilde{A}_f \psi),$$

$$\{\varphi, \psi\} \subset D(\widetilde{A}_f).$$

Оскільки $\overline{D(\widetilde{A}_f)} = L_2(\mathbb{R})$, то існує оператор $\widetilde{A}_f^*$, область визначення $D(\widetilde{A}_f^*)$ якого складається з тих елементів $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, для яких існують елементи $\psi^* \in L_2(\mathbb{R})$, що задовольняють співвідношення $(\widetilde{A}_f \varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*)$ для довільного $\varphi \in D(\widetilde{A}_f)$; при цьому $\widetilde{A}_f^* \psi = \psi^*$.

Доведемо, що $\widetilde{A}_f^* \subseteq \widetilde{A}_f$ (бо включення $\widetilde{A}_f \subseteq \widetilde{A}_f^*$ для симетричного оператора є очевидним). Нехай $\psi \in D(\widetilde{A}_f^*)$ і $\widetilde{A}_f^*\psi = \psi^*$. Покладемо

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi) h_k, \quad \psi^* = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi^*) h_k.$$

Тоді

$$c_k(\psi^*) = (\psi^*, h_k) = \overline{(h_k, \widetilde{A}_f^*\psi)} = \overline{(\widetilde{A}_f h_k, \psi)} =$$

$$= (\psi, \widetilde{A}_f h_k) = \mu_k^{\nu}(\psi, h_k) = \mu_k^{\nu} c_k(\psi)$$

(тут ми скористалися тим, що $h_k \in D(\widetilde{A}_f)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$, причому h_k є власним вектором оператора $\widetilde{A}_f$, а $\mu_k^{\nu} = (f(2k+1))^{\nu}$ – відповідне власне число). Звідси знаходимо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{2\nu} |c_k(\psi)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(\psi^*)|^2 =$$

$$= \|\psi^*\|^2_{L_2(\mathbb{R})} < \infty,$$

тобто $\psi \in D(\widetilde{A}_f)$. Крім того,

$$\widetilde{A}_f \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{\nu} c_k(\psi) h_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi^*) h_k = \psi^*.$$

Отже, $\widetilde{A}_f^* \subseteq \widetilde{A}_f$. Невід'ємність оператора A перевіряється безпосередньо. Теорема доведена.

Як наслідок дістаємо, що спектр оператора $\widetilde{A}_f$ є суто дискретним з єдиною граничною точкою у нескінченності.

3. Розглянемо рівняння

$$D_t^{\beta} u(t,x) + (-1)^{-[\beta]+1} D_t^{\{\beta\}} \widetilde{A}_f^{\alpha} u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega_{\infty}, \qquad (3)$$

де $\beta \in [-3,0)$, $\alpha > 0$ – фіксовані числа, $[\beta]$ – ціла, а $\{\beta\}$ – дробова частини числа β, $D_t^{\beta} \equiv I(\beta)$ – оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t у просторі D'_+, $\widetilde{A}_f^{\alpha}$ – степінь оператора $\widetilde{A}_f$:

$$L_2(\mathbb{R}) \supset D(\widetilde{A}_f^{\alpha}) \ni \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k = \varphi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \widetilde{A}_f^{\alpha} \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{\nu\alpha} c_k(\varphi) h_k \in L_2(\mathbb{R}),$$

де

$$D(\widetilde{A}_f^{\alpha}) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{2\nu\alpha} |c_k(\varphi)|^2 < \infty,$$

$$c_k(\varphi) = (\varphi, h_k), k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Під розв'язком рівняння (3) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(\cdot,x) \in D'_+ \cap C^{-[\beta]}((0,\infty))$ при кожному $x \in \mathbb{R}$;

2) $u(t,\cdot) \in D(\widetilde{A}_f^{\alpha}) \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$; $u(t,\cdot) = 0$ при $t < 0$;

3) u задовольняє рівняння (3).

4) $\forall t > 0 \ \exists c = c(t) > 0$: $\|D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c$.

Теорема 2. *Функція u є розв'язком рівняння (3) тоді і лише тоді, коли вона подається у вигляді*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\theta(t) \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/(-[\beta])}\} * g_{-\{\beta\}}(t)\Big) \times$$

$$\times c_k h_k(x), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R},$$

де

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\omega}^{\omega})',$$

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \textit{якщо } \nu\alpha/(-[\beta]) \equiv \delta_0 > 1, \\ \dfrac{1}{2\delta_0}, & \textit{якщо } 0 < \delta_0 < 1, \end{cases}$$

$u(t,\cdot) \in S_{\omega}^{\omega}$ при кожному $t > 0$.

Доведення. Передусім скористаємося наступною властивістю операторів D_t^{β}: $D_t^{\beta} = D_t^{[\beta]+\{\beta\}} = D_t^{[\beta]} D_t^{\{\beta\}}$. Якщо ввести позначення $D_t^{\{\beta\}} u(t,x) = z(t,x)$, то рівняння (3) при $t > 0$ набуває вигляду

$$\frac{\partial^p z(t,x)}{\partial t^p} + (-1)^{p+1} \widetilde{A}_f^{\alpha} z(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Omega_{\infty}. \qquad (4)$$

Тут $[\beta] = -p$, $D_t^{[\beta]} = D_t^{-p} = \dfrac{d^p}{dt^p}$. Зазначимо, що p, згідно з обмеженням на параметр β, може набувати значень: $p = 1$, якщо $-1 \le \beta < 0$; $p = 2$, якщо $-2 \le \beta < -1$; $p = 3$, якщо $-3 \le \beta < -2$.

Функція z є розв'язком рівняння (4) тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$z(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/p}\} c_k h_k(x),$$

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_\omega^\omega)'. \qquad (5)$$

Справді, якщо функція z зображається формулою (5), то безпосередньо встановлюємо, що z задовольняє рівняння (4).

Навпаки, нехай z – розв'язок рівняння (4). Тоді $z(t,\cdot) \in D(\widetilde{A}_f^\alpha) \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$. Отже,

$$z(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) h_k(x),$$

$$c_k(t) = (z(t,\cdot), h_k), k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\|z(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, \quad t > 0. \qquad (6)$$

Домножимо (4) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\left(\frac{\partial^p z}{\partial t^p}, h_k\right) + (-1)^{p+1}(\widetilde{A}_f^\alpha z, h_k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$(\widetilde{A}_f^\alpha z, h_k) = (z, \widetilde{A}_f^\alpha h_k) = (z, \mu_k^{\nu\alpha} h_k) =$$

$$= \mu_k^{\nu\alpha}(z, h_k) = \mu_k^{\nu\alpha} c_k(t).$$

Оскільки

$$\left(\frac{\partial^p z(t,\cdot)}{\partial t^p}, h_k\right) = \frac{\partial^p}{\partial t^p}(z(t,\cdot), h_k) =$$

$$= \frac{\partial^p}{\partial t^p} c_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то функція c_k (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$) є p разів неперервно диференційовною на $(0,\infty)$ і задовольняє диференціальне рівняння

$$c_k^{(p)}(t) + (-1)^{p+1}\mu_k^{\nu\alpha} c_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \qquad (7)$$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (7). Якщо $p = 1$, то

$$c_k(t) = c_k \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha}\}, \quad c_k = \mathrm{const}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Якщо $p = 2$, то відповідне характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - \mu_k^{\nu\alpha} = 0$. Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (7) зображається формулою

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/2}\} + c_k^{(2)} \exp\{t\mu_k^{\nu\alpha/2}\},$$
$$k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ – довільні сталі. Оскільки

$$u(t,x) = z(t,x) * g_{-\{\beta\}}(t),$$

то

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,x) = z(t,x) * g_{\{\beta\}} * g_{-\{\beta\}}(t) = z(t,x).$$

Із умови 4) випливає, що функція z задовольняє умову: $\|z(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c$ для кожного $t > 0$. Звідси та із співвідношення (6) дістаємо, що $c_k^{(2)} = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, тобто

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/2}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, t \in (0,\infty).$$

Якщо $p = 3$, то характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 + \mu_k^{\nu\alpha} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$\lambda_1 = -\mu_k^{\nu\alpha/3}, \quad \lambda_2 = \mu_k^{\nu\alpha/3}(\sqrt{3}/2 + i/2),$$

$$\lambda_3 = \mu_k^{\nu\alpha/3}(\sqrt{3}/2 - i/2).$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння

$$c_k'''(t) + \mu_k^{\nu\alpha} c_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

дається формулою

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/3}\} +$$

$$+ c_k^{(2)} \exp\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} t\mu_k^{\nu\alpha/3}\right\} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{t}{2}\mu_k^{\nu\alpha/3}\right) +$$

$$+c_k^{(3)}\exp\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}t\mu_k^{\nu\alpha/3}\right\}\times$$
$$\times\sin\left(\frac{t}{2}\mu_k^{\nu\alpha/3}\right),\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $c_k^{(3)}$ – довільні сталі.

Із умови 4) випливає, що $c_k^{(2)}=c_k^{(3)}=0$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, тобто

$$c_k(t)=c_k^{(1)}\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/3}\},\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

У всіх цих випадках маємо, що загальний розв'язок рівняння (7) зображається формулою

$$c_k(t)=c_k\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/p}\},\quad k\in\mathbb{Z}_+, t\in(0,\infty),$$

де $c_k=\mathrm{const}$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Отже, розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$z(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/p}\}c_kh_k(x),(t,x)\in\Omega_\infty.$$

Доведемо тепер, що $\gamma=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kh_k\in(S_\omega^\omega)'$. Для цього скористаємося тим, що $\|z(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le c$ для кожного $t>0$. Із обмежень на функцію f випливає, що

$$\mu_k=f(2k+1)\ge d_0(2k+1). \tag{8}$$

Урахувавши (8) та (6) знайдемо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\exp\{-2td_0(2k+1)^{\nu\alpha/p}\}\le c,$$

$$c=c(t)>0,$$

тобто $|c_k|\le c\exp\{td_0(2k+1)^{\nu\alpha/p}\}$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$. Це і означає, що $\gamma\in(S_\omega^\omega)'$. Звідси вже випливає, що $z(t,\cdot)\in S_\omega^\omega\subset D(\widetilde{A}_f^\alpha)$ при кожному $t>0$. Крім того,

$$z(t,\cdot)=u(t,\cdot)*g_{\{\beta\}}(t)$$

(при цьому $z=0$ при $t<0$). Тоді

$$u(t,x)=z(t,x)*g_{-\{\beta\}}(t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/(-[\beta])}\}*g_{-\{\beta\}}(t))c_kh_k(x),$$

що й потрібно було довести. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Граничне значення $D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)$ при $t\to+0$ існує в просторі $(S_\omega^\omega)'$, тобто*

$$D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}c_kh_k.$$

Зауваження 1. Якщо β набуває значень -1, -2, -3, то маємо відповідно рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\widetilde{A}_f^\alpha u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Omega_\infty;$$
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\widetilde{A}_f^\alpha u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Omega_\infty;$$
$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}+\widetilde{A}_f^\alpha u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Omega_\infty;$$

при цьому $g_{-\{\beta\}}=g_0=\theta'=\delta$, тобто

$$\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\delta_0}\}*g_{-\{\beta\}}(t)=$$
$$=\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\delta_0}\}*\delta(t)=\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\delta_0}\},$$

$\delta_0=\nu\alpha/p$.

Отже, при $t>0$ розв'язки цих рівнянь зображаються формулою

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/p}\}c_kh_k(x),t>0,x\in\mathbb{R}.$$

Для вказаних рівнянь наслідок 1 формулюється так: граничне значення $u(t,\cdot)$ при $t\to+0$ існує в просторі $(S_\omega^\omega)'$. Отже, $(S_\omega^\omega)'$ є у певному розумінні "максимальним" простором, у якому існують граничні значення функції $D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)$ при $t\to+0$.

Скориставшись наслідком 1 з теореми 2, поставимо задачу Коші для рівняння (3) так. Для (3) задамо початкову умову

$$D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)|_{t=0}=\gamma, \tag{9}$$

де $\gamma\in(S_\omega^\omega)'$. Під розв'язком задачі Коші (3), (9) розумітимемо розв'язок рівняння (3), який задовольняє початкову умову (9) у тому сенсі, що

$$D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)\to\gamma,\quad t\to+0,$$

у просторі $(S_\omega^\omega)'$. Із одержаних вище результатів випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Задача Коші (3), (9) коректно розв'язна у просторі початкових даних $(S_\omega^\omega)'$. Її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/(-[\beta])}\}*g_{-\{\beta\}}(t))\times$$

$$\times c_k h_k(x), \quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, x\in\mathbb{R},$$

де $\gamma=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k h_k\in(S_\omega^\omega)'$; $u(t,\cdot)\in S_\omega^\omega$ *при кожному* $t>0$.

Таким чином, $(S_\omega^\omega)'$ є максимальним простором початкових даних задачі Коші, при яких відповідні розв'язки рівняння (3) є при $t>0$ нескінченно диференційовними по x функціями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.